

# 引力场及量子场的 真空动力学图像

陈蜀乔 著

電子工業出版社

**Publishing House of Electronics Industry**

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书讨论了真空背景场中的相对论和量子场理论，真空场理论是力图建立四种力场统一的理论，整个理论体系建立在真空性质的四条基本假设之上。四种力场统一的机理源自于四种力场都是真空场不同形式的形变所导致的，该书讲述了不同形式的真空场形变。书中讲述的一些新的物理概念对于理论物理学工作者有很好的启发和借鉴作用，为物理学研究提供了一个新的视角。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究。

### 图书在版编目（CIP）数据

引力场及量子场的真空动力学图像 / 陈蜀乔著. —北京：电子工业出版社，2010.7

ISBN 978-7-121-11347-5

I. ①引… II. ①陈… III. ①引力场—真空电子学②量子场论—真空电子学 IV. ①O314②O413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 133292 号

策划编辑：赵 娜

责任编辑：赵 平 特约编辑：王 纲

印 刷：

装 订：

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本：787×1092 1/16 印张：22.25 字数：560 千字

印 次：2010 年 7 月第 1 次印刷

定 价：56.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn)，盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

服务热线：（010）88258888。

# 前 言

本书在原有量子场理论的基础上，引入了真空物质，并定义该物质为真空场。在真空场的基础上，将点模型量子场的“点”引入了邻域，该邻域构成量子场的内禀空间，从而为建立量子场的真空物理学图像搭建了一个平台。有邻域的点并不会违反相对论，为描述粒子所有的内禀特性，该理论扩展了量子场的四维时空，引入了多自由度粒子内禀空间及相应的算符，在扩充描述空间的同时，保持了数学形式和现代量子场的一致性。这使得经典理论进一步完善，其数学形式和现代经典量子场理论基本一致，但这些数学表达式有了更基本的真空性质作为物理基础，使理论有了明晰的物理图像。

全书共有 11 章。第 1 章讲述真空的结构，从真空的基本性质出发，引入基本假设建立真空场。第 2 章和第 3 章讲述场的拉格朗日形式、对称性和场量子化，讨论真空背景场的性质。第 4 章从真空场的角度讲述狭义相对论和广义相对论，引入测量协变原理，导出了光速不变原理；时空弯曲被理解为大范围的真空场形变，广义相对论的空间不再是真空。第 5 章和第 6 章讲述光子的结构和电磁场理论，由普朗克常数  $h$  的真空场性质建立了光子结构，解释了光子各种奇妙的物理特性。第 7 章讲述电子的内禀结构和自由电子理论，引入了球对称波的概念，解释了轻子质量和自旋，并算出了电磁耦合常数。第 8 章和第 9 章讲述规范不变性和弱作用场，提出了半向空间概念，解释了宇称不守恒；利用质量算符特性使玻色子具有质量，不再采用对称破缺获得的质量。第 10 章讲述强相互作用；真空场的塑性形变导致维度分裂，构成强子的弦结构，这使得真空场塑性形变部分可以用弦理论来描述。第 11 章讲述电动力学，通过举例介绍量子电动力学的过程，给出了跑动耦合常数的真空场解释；量子场的相互作用导致真空场泡沫化，出现量子场反常维度。

本书配有大量的清晰插图，尽可能地利用图像来说明量子场论的基本概念，以便读者阅读和理解。由于作者水平有限，书中难免有所疏漏，欢迎各位读者批评指正。

作 者  
2010 年 5 月

# 目 录

第 1 章 真空的结构	1
1.1 量子场概述	1
1.1.1 基本粒子的分类	1
1.1.2 理论	2
1.1.3 量子场论的建立和发展	2
1.1.4 自然单位制	3
1.1.5 度规	4
1.1.6 四种力场	5
1.2 真空物理图像的历史	6
1.2.1 以太的真空图像	6
1.2.2 Dirac 的真空	8
1.2.3 量子场论的真空图像	8
1.3 真空场的引入	9
1.3.1 实验手段及面临的困难	9
1.3.2 真空场的基本假设	10
1.3.3 真空场的维度性质	13
1.3.4 真空场基本单元的粒子性	14
1.4 真空场基本单元的静态应变分析	15
1.5 真空中量子场理论建立的基本思想	23
第 2 章 量子场的运动方程和真空背景场的均匀性	28
2.1 场的拉格朗日形式	28
2.1.1 经典力学的拉格朗日形式	29
2.1.2 场的拉格朗日形式	30
2.1.3 费曼路径积分	31
2.2 真空背景场的对称性与守恒定律	34
2.2.1 真空背景场的对称性	34
2.2.2 奈特定理	38
2.2.3 时空平移不变性和能量动量守恒	40
2.2.4 洛伦兹不变性和角动量守恒	41
第 3 章 正则量子化和粒子解释	42
3.1 场量子化的物理图像	42
3.1.1 算符的对易关系的物理意义	42
3.1.2 量子场算符的对易关系	43
3.2 正则量子化	44
3.2.1 哈密顿形式和正则量子化	44

3.2.2	Bose 场的正则量子化	46
3.2.3	Fermi 场的正则量子化	47
3.3	实标量场	50
3.3.1	正则量子化	50
3.3.2	动量表象	53
3.3.3	粒子数算符和粒子解释	56
3.3.4	零点能与生灭算符	57
3.3.5	协变对易关系与微观因果性	58
3.3.6	Feynman 传播函数	60
第 4 章	引力场	65
4.1	概述	65
4.1.1	狭义相对论时空	65
4.1.2	广义相对论时空	66
4.1.3	测量协变与协变场	66
4.2	测量协变性	68
4.2.1	测量协变原理	68
4.2.2	参照系间的相对性	70
4.2.3	光速不变原理	71
4.2.4	潮汐力	72
4.3	时空坐标架	74
4.3.1	时间的原始概念	74
4.3.2	时空间隔	76
4.3.3	张量的变换定律	78
4.4	协变导数与引力规范场 $\Gamma_{ij}^k$	80
4.4.1	矢量的勒维—奇维塔平移	80
4.4.2	协变微分	82
4.4.3	$\Gamma_{jk}^i$ 与 $g_{ik}$ 的关系	83
4.4.4	引力场和量子场间的关系	84
4.5	弯曲时空的描述	90
4.5.1	曲率张量	90
4.5.2	爱因斯坦张量	92
4.5.3	短程线	93
4.6	引力场方程	93
4.6.1	流守恒律	93
4.6.2	爱因斯坦引力场方程	97
4.6.3	引力场的万有特性	102
4.7	引力波	105
4.7.1	弱场近似	105
4.7.2	引力波	107

4.7.3	引力子的内禀结构	112
第 5 章	真空中光子的一维图像	117
5.1	光子的现有图像	117
5.1.1	光子的电磁波图像	117
5.1.2	光子的粒子性	119
5.1.3	不确定关系	119
5.1.4	光子的量子力学波函数	120
5.2	光子内禀空间 $\xi^1$ 维的分析	121
5.2.1	真空场理论中光子的图像概述	121
5.2.2	光子 $\xi^1$ 维概述	122
5.2.3	形变极限值 $\mathcal{H}$ 的真真空场物理意义	124
5.2.4	光子 $\xi^1$ 维的能量	125
5.2.5	光子 $\xi^1$ 维的动量	126
5.2.6	光子 $\xi^1$ 维的内禀场位移函数 $u(\tau, \xi)$ 的建立	126
第 6 章	光子四维时空图像	128
6.1	光子的内禀结构	128
6.1.1	光子的力线构成纵波	128
6.1.2	光子单根力线的位移函数	128
6.1.3	光子纵波的非扩散性	129
6.1.4	光子的纤维结构	130
6.1.5	光子的简化波函数	134
6.1.6	光子横向波动及几率波	136
6.1.7	光子的极化和自旋	142
6.1.8	光子波粒二象性的物理图像	147
6.2	电磁场理论	149
6.2.1	电磁场的协变形式和 Lorentz 条件	149
6.2.2	Coulomb 规范量子化电磁场	150
6.2.3	Lorentz 规范量子化	160
6.2.4	动量表象和粒子解释	162
第 7 章	轻子的图像	167
7.1	轻子的纤维结构	167
7.1.1	单电子内禀场的应变	168
7.1.2	单电子内禀场径向部分的形变	170
7.1.3	无自旋电子的纤维场的分区结构	171
7.1.4	轻子内禀结构的简化	174
7.1.5	内禀空间基和粒子空间基的自相似性	175
7.1.6	轻子和光子的耦合构成德布罗意波	177
7.1.7	电子的电力线	179
7.1.8	电子的磁力线	185
7.1.9	轻子的麦克斯韦方程	189

7.2 轻子自旋 ..... 190

7.2.1 轻子自旋波 ..... 190

7.2.2 自旋波在轻子内禀时空中的传播特性 ..... 190

7.2.3 自旋量子场的时空形变量 ..... 191

7.2.4 自旋角动量 ..... 192

7.2.5 转动应变量构成自旋动量 ..... 194

7.2.6 电子的自旋自由度 ..... 195

7.3 轻子的质量 ..... 197

7.3.1 轻子的传播特性 ..... 197

7.3.2 轻子的惯性质量 ..... 198

7.3.3 真空点的四维平移 ..... 200

7.3.4 质量汇聚波 ..... 201

7.3.5 静态轻子质量荷的精细结构 ..... 202

7.3.6 电子的内禀空间场函数 ..... 203

7.3.7  $e$ 、 $\mu$ 、 $\tau$  的内禀结构和质量 ..... 204

7.3.8 轻子的背景场及轻子的引力 ..... 207

7.3.9 运动轻子质量、动量的正交性 ..... 207

7.4 真自由粒子 Dirac 方程 ..... 210

7.4.1 Klein-Gordon 方程 ..... 210

7.4.2 自由粒子的 Dirac 方程和  $\gamma$  矩阵 ..... 211

7.5 Dirac 方程的性质 ..... 213

7.5.1 Dirac 方程的 Lorentz 不变性 ..... 213

7.5.2 自由电子相应的静止电子解 ..... 215

7.5.3 自由粒子 Dirac 方程的解 ..... 216

7.5.4 拉格朗日形式 ..... 219

7.6 电磁耦合常数的计算 ..... 221

7.6.1 电磁耦合常数的物理图像 ..... 221

7.6.2 考虑电子的情况 ..... 222

7.6.3 光子的情况 ..... 224

7.6.4 近距离的情况 ..... 225

7.6.5 光电耦合与经典电磁场 ..... 225

7.7 中微子 ..... 225

7.7.1 中微子内禀空间的构成 ..... 225

7.7.2 中微子内禀场函数 ..... 226

7.7.3 自旋量子波角量 ..... 227

7.7.4 中微子的静质量 ..... 229

7.7.5 半向空间的概念 ..... 229

7.7.6 费米子场的半向空间效应 ..... 231

7.7.7 中微子的狄拉克方程 ..... 232

7.7.8 轻子的点模型构成量子力学 ..... 233

7.7.9 全同粒子粒子的交换对称的物理图像 .....	238
<b>第 8 章 场的定域规范不变性</b> .....	240
8.1 整体规范不变性 .....	241
8.2 $U(1)$ 定域规范不变性与电磁相互作用 .....	244
8.3 $SU(n)$ 定域规范不变性 .....	249
<b>第 9 章 弱作用场</b> .....	255
9.1 弱相互作用顶角 .....	255
9.1.1 相互作用顶角 .....	255
9.1.2 费米子相互作用的顶角空间 .....	258
9.2 弱电统一模型的物理图像 .....	265
9.2.1 弱作用内禀空间图像 .....	265
9.2.2 真空中无对称破缺的弱电统一模型 .....	265
9.2.3 温伯格角 $\theta_W$ 的物理意义 .....	271
9.3 夸克弱相互作用 .....	277
9.3.1 卡比波角 .....	278
9.3.2 夸克弱电统一规范理论 .....	280
<b>第 10 章 强子结构</b> .....	283
10.1 $\pi^0$ 介子态的真空场图像 .....	283
10.2 $\pi^\pm$ 介子的真空场图像 .....	285
10.3 质子结构 .....	287
10.3.1 质子的形成 .....	287
10.3.2 质子自旋 .....	289
10.3.3 质子的弦与稳定性 .....	290
10.3.4 中子结构 .....	291
10.3.5 强子的 $SU(3)$ 表述 .....	291
10.4 强相互作用 .....	292
10.4.1 中性 $\pi^0$ 介子与核子的强相互作用 .....	293
10.4.2 $\pi$ 介子与核子的相互作用 .....	295
10.5 夸克 .....	299
10.5.1 夸克的味 .....	299
10.5.2 夸克的颜色 .....	300
10.5.3 强耦合常数 $a_s$ .....	303
10.6 胶子 .....	303
10.6.1 考虑某根弦内的波 .....	304
10.6.2 弦及夸克海 .....	305
10.7 核子内禀空间场函数 .....	308
10.7.1 核子真空内禀场函数 .....	308
10.7.2 量子色动力学的 $SU_c(3)$ 结构 .....	310
10.8 质量荷塑性形变的弦模型理论 .....	311
10.8.1 质量荷闭弦 .....	311



10.8.2	强子弦 .....	312
第 11 章	量子电动力学基本过程 .....	315
11.1	QED 的微扰论和费曼规则 .....	315
11.2	量子电动力学过程 .....	316
11.2.1	电子的 Rutherford 散射 .....	316
11.2.2	重整化的例子 .....	322
11.2.3	跑动耦合常数 .....	325
11.2.4	量子场的反常维度 .....	328
11.3	真空场论与超弦/M 理论 .....	333
11.3.1	真空场论与弦理论的基本思想 .....	333
11.3.2	粒子的相互作用 .....	337
11.3.3	四种力场的统一物理机制的比对 .....	338
11.3.4	狄拉克“大数假设” .....	340
附录 A	.....	343

# 第 1 章 真空的结构

真空并非一无所有的空间。从量子场论的观点来看，真空不空，它是基态的量子场，量子场是真空的激发态；本书从真空场的观点来看量子场，真空中所有的粒子都以波的形式存在：量子场能量  $E = \hbar\omega$  是一维波动； $E = mc^2$  是三维超球面波动。本章将对构成真空基态量子场的最小场基本单元的性质及其结构进行研究。

## 1.1 量子场概述

### 1.1.1 基本粒子的分类

基本粒子是真空受到激发而产生的。从物理性质来看，基本粒子的分类见表 1.1.1。

表 1.1.1 基本粒子的分类

强子	重子 (由夸克构成)	核子	质子 (Proton) : 符号为 p		有反粒子
			中子 (Neutron) : 符号为 n		
		超子	$\Lambda^0, \Omega, \Sigma^+ \Sigma^- \Sigma^0$		
		共振态粒子	$\Delta^- \Delta^0 \Delta^+ \Delta^{++}, \Sigma^{*+} \Sigma^{*-} \Sigma^{*0}, \Xi^{*-} \Xi^{*0}, \Omega$		
	介子	$\pi^+ \pi^- \pi^0, K^+ K^- K^0, \eta^+ \eta^- \eta^0$			
轻子	电子 e	$\mu$ 子	$\tau$ 子		
	电子中微子 $\nu_e$	$\mu$ 中微子 $\nu_\mu$	$\tau$ 中微子 $\nu_\tau$		
传播子	强力: 胶子和介子	弱力: 中间 Bose 子 $W^+, W^-, Z^0$	电磁力: 光子	引力: 引力子	

从粒子统计性质的角度来看，粒子具有两类：服从 Fermi 统计的为 Fermi 子；服从 Bose-Einsten 统计的为 Bose 子，Bose 子能传递相互作用。

### 1. 最基本的Fermi子，自旋为 1/2

(1) 夸克 $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$ ;

(2) 轻子 $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$

$m_e \approx 0.511\text{MeV}, m_\mu \approx 105.66\text{MeV}, m_\tau \approx 1784.1\text{MeV}$

### 2. 规范Bose子，自旋为 1

电磁作用→光子， $\gamma$ （电磁场量子）

强作用→胶子 $g^\alpha (\alpha=1,2,\cdots,8)$ ，具有色自由度， $SU(3)$ 群

弱相互作用→ $W^\pm, Z^0$

$m_W = (80.419 \pm 0.056) \text{ GeV}, m_Z = (91.1882 \pm 0.0022) \text{ GeV}$

$$W^+ \rightarrow e^+ \nu_e, \mu^+ \nu_\mu, \tau^+ \nu_\tau, c\bar{s}, Z^0 \rightarrow e^+ e^-, \mu^+ \mu^-, \tau^+ \tau^-, \dots$$

表 1.1.1 给出的仅是一些有代表性的基本粒子。事实上，对实验观测而言，所发现的粒子有上百种。初看这些粒子会感到一头雾水，但现在的理论和实验研究表明，最基本的粒子其实只有光子、轻子和夸克（Quark）。其中轻子和夸克是构建物质世界的基本“砖块”。基本粒子有很多未解之谜，如电荷、自旋、质量及波粒二象性等。这些未解之谜在后续的章节中会陆续讨论。

基本粒子的运动规律透露了物质深处的信息，因此，对其规律的研究就变得极其重要，这就是理论所要做的工作。目前研究基本粒子最成功的理论是量子场论，但量子场论并未涉及粒子的内部结构。

### 1.1.2 理论

这里简要地回顾一下早期建立基本粒子理论的几个要点。

(1) 高速（宏观）现象的研究——狭义相对论。

(2) 微观粒子场具有量子性，所有微观粒子都是某一种场的量子，由此提出量子场的概念。对微观（低速）现象的研究导致量子力学的建立。

(3) 1931 年，发现  $\beta$  衰变： $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ，弱作用的研究开始。

(4) 1932 年，发现中子：核的放射性， $\alpha, \beta, \gamma$  衰变。

(5) 1932 年，发现正电子： $\gamma^* \rightarrow e^+ + e^-$ ， $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ 。

(6) 由  $E = \frac{p^2}{2m}$ ， $\hat{E} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ， $\hat{p} \rightarrow i\hbar \nabla$ ，可得自由粒子的薛定谔方程：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

(7) 微观高速，考虑狭义相对论效应的研究引出 Klein-Gordon 方程。由  $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ ， $\hat{E} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ， $\hat{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$ ，可得到自由粒子的 Klein-Gordon 方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = c^2 \left( \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi$$

(8) 自由 Dirac 方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + c \left( \alpha \cdot \nabla + \frac{imc}{\hbar} \beta \right) \varphi = 0 \rightarrow \varphi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

其中， $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ， $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ， $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 。

负能量的困难： $E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \rightarrow$  Dirac 海（真空态）。

### 1.1.3 量子场论的建立和发展

1. 场的正则量子化：标量场、Dirac 场和电磁场。

2. 建立 QED。

3. 发散困难：高阶微扰修正存在发散困难。引入重整化，如在电磁作用中将电子质量

和电荷进行重新定义，吸收发散。

辐射修正：氢原子的能级 Lam 位移，电子反常磁矩。

#### 4. 标准模型 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

$SU(3) \rightarrow$  强相互作用

$SU(2) \times U(1) \rightarrow$  弱—电相互作用

(1) 弱相互作用：  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ 。

(2) 普适的 Fermi 作用，Lee-Yang (1956) V-A 理论。

(3) 强相互作用：（如原子核中质子和中子之间的核力）核力的介子交换理论  $\pi^+$ ， $\pi^0$ ，这是一个有效理论；强子的夸克模型，如  $p = uud$ ， $n = ddu$ ， $\pi^+ = u\bar{d}$ ， $\pi^- = d\bar{u}$ ， $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$ 。

(4) 量子色动力学 (QCD) 和量子电动力学 (QED) 的区别如下：

- 光子规范场 (Abelian) 无自相互作用；
- 胶子规范场 (Noabelian) 有自相互作用；
- QED 有渐进自由 (规范屏蔽)，色禁闭 (夸克之间的相互作用在近距离时变得很弱，夸克近似自由；夸克之间的相互作用在远距离时变得很强，夸克被禁闭在强子中)。

#### 1.1.4 自然单位制

真空场论中，把光速  $c$  作为时空测量标尺，所有物质的运动都在和光子运动相比较，光子传播变慢，时钟也相应变慢，光子传播的路径弯曲，那么空间也弯曲；而  $\hbar$  为量子场传播的总形变量，它是微观量子场最基本的量。在量子场理论中， $c$  和  $\hbar$  会频繁出现。为避免在公式和方程中不断重复出现  $c$  和  $\hbar$  而采用一种新的单位制，约定  $c = \hbar = 1$ ，这种新的单位制称之为自然单位制。在新单位之中，有两个常数值关注

牛顿引力常数：  $G = 6.7 \times 10^{-39} \text{ GeV}^{-2} = 1/m_{pl}^2$ 。这里， $m_{pl}$  为 Planck 质量定义为

$$m_{pl} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV} \quad (1.1.1)$$

在学习量子场理论之前，我们最为熟悉的量纲是 CGS 单位制。现在来对比一下这个新单位制和 CGS 单位制<sup>①</sup>，见表 1.1.2。

表 1.1.2 CGS 单位单位与新单位的关系

CGS 单位		单位制量纲的转换关系	单位转换关系
长度 $L$	cm	$L = \text{VAE}^{-1}$	$1 \text{ cm} = (\varepsilon)(c)^{-1}(\hbar)^{-1} \text{ GeV}^{-1} \cdot c \cdot \hbar$ $= 5.05 \times 10^{13} \text{ GeV}^{-1} \cdot c \cdot \hbar$
时间 $T$	sec	$T = \text{AE}^{-1}$	$1 \text{ sec} = (\varepsilon)(\hbar)^{-1} \text{ GeV}^{-1} \cdot \hbar$ $= 1.52 \times 10^{24} \text{ GeV}^{-1} \cdot \hbar$
质量 $M$	g	$M = V^{-2}E$	$1 \text{ g} = (\varepsilon)^{-1}(c)^2 \text{ GeV} \cdot c^{-2}$ $= 0.562 \times 10^{24} \text{ GeV} \cdot c^{-2}$
速度 $V$	c	$V = LT^{-1}$	$1 \text{ c} = (c) \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ $(c) = 3.00 \times 10^{10}$

① 邹国兴. 量子场论导论. 科学出版社, 1980 年 2 月第 1 版, p4.

续表

CGS 单位		单位制量纲的转换关系	单位转换关系
作用量 $A$	$\hbar$	$A = ML^2T^{-1}$	$1\hbar = (\hbar)g \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$ $(\hbar) = 1.05 \times 10^{-27}$
能量 $E$	GeV	$E = ML^2T^{-2}$	$1\text{GeV} = (\varepsilon)g \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}$ $(\varepsilon) = 1.60 \times 10^{-3}$

根据上表可以方便地实现两种量纲之间的互换。

### 1.1.5 度规

在理论的相对论协变描述中,时空是对称的,时间坐标和空间坐标统一用四维空间的矢量来描述。本书将采用闵氏空间度规。闵氏空间的时空点  $x$  用逆变坐标表示:

$$x = (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x}) \quad (1.1.2)$$

度规张量  $\mathbf{g}_{\mu\nu}$  定义为

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \mathbf{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1.3)$$

引进如下协变坐标:

$$x_\mu = \mathbf{g}_{\mu\nu} x^\nu \quad (1.1.4)$$

$$x^\mu = \mathbf{g}^{\mu\nu} x_\nu = \mathbf{g}_\nu^\mu x^\nu \quad (1.1.5)$$

$$(x_\mu) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^i) = (t, -\vec{x}) \quad (1.1.6)$$

内积为  $x^2 = x_\mu x^\mu = t^2 - \vec{x}^2$ 。

$$\mathbf{g}^{\mu\nu} \mathbf{g}_{\nu\lambda} = \mathbf{g}_\lambda^\mu = \delta_\lambda^\mu \quad (1.1.7)$$

重复指标表示对所有可能取值求和的约定。对微分算符

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_i) = (\partial_t, \nabla_i) \quad (1.1.8)$$

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \mathbf{g}^{\mu\nu} \partial_\nu = (\partial_0, -\partial_i) = (\partial_t, -\nabla_i) \quad (1.1.9)$$

达朗贝尔算符表示为

$$\square = \partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu = \mathbf{g}_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (1.1.10)$$

坐标和四动量矢量的标量积为

$$p \cdot x = p^\mu x_\mu = \mathbf{g}_{\mu\nu} p^\mu x^\nu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} \quad (1.1.11)$$

四动量算符为

$$p^\mu = i\partial^\mu = (i\partial^0, i\partial^i) = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla_i\right) = (p^0, p^i) = (p^0, \vec{p}) \quad (1.1.12)$$

$$p_\mu = \mathbf{g}_{\mu\nu} p^\nu = (p^0, -\vec{p}) \quad (1.1.13)$$

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - p^2 = m^2 \quad (1.1.14)$$

在后面的讨论中，常把  $\nabla_i$  简写为  $\nabla$ 。

### 1.1.6 四种力场

(1) **引力场** 引力场即重力场。我们生活在引力场中，如果没有引力的话，就会像太空中的宇航员一样，漂浮在空中，处于失重状态。引力场是唯一一种。对于任何物体都起作用的力场，它源于物体的质量，质量越大，引力就越大。一般情况下，引力总是相互吸引。如图 1.1.1，在图中黑色的球表示太阳，灰色的球表示地球，地球被引力拉着围绕太阳转动。引力的作用范围是宏观的，所以称为长程力。它们之间的引力由牛顿的万有引力定律描述：

$$F_{\text{引}} = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$$

随着距离的增大，引力按平方反比规律逐渐减弱。引力很弱，电子和质子之间的引力只有它们之间静电力的  $1/10^{39}$ ，因而引力在微观物理学中作用很小。

描述引力场的理论除了牛顿万有引力定律还有现代的广义相对论（广义相对论是由物理学家爱因斯坦创立的描述时空和引力关系的理论）。

(2) **电磁场** 电磁场源于电荷。在梳头的时候，梳子会对头发产生吸引力，这就是静电。电磁作用和引力不同，它对电中性的粒子不起作用。在引力场中，时钟会变慢，但在电磁场中时钟并不会变慢。另一方面，电磁力又很像引力，在图 1.1.1 中可以看出静电场之间的作用力和引力场很相似，都是按距离的平方反比递减的长程力。

电磁力比引力的强度大得多，约为  $1.0 \times 10^{33}$  倍。同时电荷有正反两种，因此大的物体总的电磁力有可能相抵消，这也就是为什么在宇宙范围内引力更为重要。描述电磁场的理论主要有麦克斯韦方程和量子电动力学。麦克斯韦方程是英国物理学家麦克斯韦在法拉第的电磁学实验基础上于 1861 年建立的描述电场、磁场性质以及它们之间关系的一组数学方程式。法拉第是一位比麦克斯韦更早的化学家和物理学家。量子电动力学是 20 世纪初到 20 世纪中期，由很多位物理学家在粒子物理学实验基础上共同努力建立的理论。它是精确描述基本粒子之间电磁相互作用的理论。

(3) **强作用场** 强作用场存在于原子核内，如图 1.1.2。从这个图可以看到物质由原子构成，原子由核外电子和中心部分的原子核构成，原子核又由质子和中子构成，把质子中子拉到一起的力就是强作用力。质子和中子又由更小的称为夸克的粒子构成。每一个质子和中子都由三个夸克构成，把三个夸克拉到一起的力也是强作用力。所以强作用力是夸克之间的基本相互作用力。强作用力比电磁力强  $100 \sim 1000$  倍。它的力程很短，在  $10^{-13} \text{ cm}$  范围以内，超过这个范围，强力迅速减弱。它与长程的电磁力和引力的性质相差极大。描述强作用场的理论叫量子色动力学。量子色动力学是在量子电动力学基础上建立的描述基本粒子之间强相互作用的理论。

(4) **弱作用场** 弱作用场是四种力场中最不寻常的力场，弱作用场存在于基本粒子的内部。弱力作用于所有的夸克和轻子，如图 1.1.3。

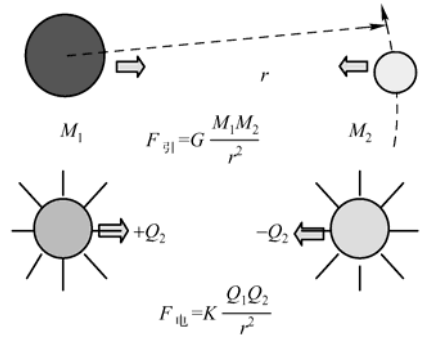


图 1.1.1 引力场和电磁场

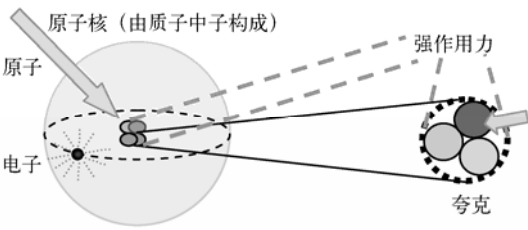


图 1.1.2 强作用场

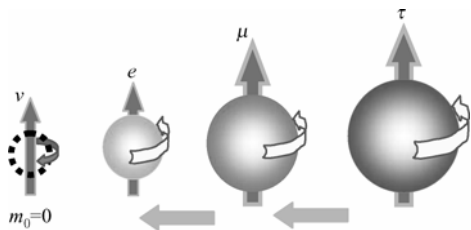


图 1.1.3 弱作用场

先说一下轻子。轻子有三种：电子、 $\mu$ 轻子和 $\tau$ 轻子。它们具有相同的自旋和相同的电荷。 $\mu$ 轻子比电子重约 200 多倍， $\tau$ 轻子比电子重约 3500 倍，轻子是这三种粒子的统称。弱力主要的效应是改变粒子，粒子的质量会发生变化。如弱力导致 $\tau$ 轻子衰变成比它轻的 $\mu$ 轻子、 $\mu$ 轻子在弱作用下变为电子。弱力的强度比电磁力小得多，只有电磁场强度的千分之一。弱力作用范围很小，目前认为小于 $10^{-16}$  cm。量子场动力学也是在量子电动力学基础上建立的描述基本粒子之间弱相互作用的理论。

可见每种力场的性质都是大不相同的，每种力场都有相应的理论。那么四种力场有可能统一吗？换句话说，四种力场可以用一种理论来描述吗？这正是本书力图解决的问题。

对四种力场进行统一的目的是要寻求四种力场本质的共性，就是探索物质世界本质的努力。为此物理学家进行了不懈的努力：

- (1) 1861 年麦克斯韦实现了电场和磁场的统一。
- (2) 爱因斯坦 1926 年以后直到 1955 年去世前一直致力于引力场和电磁场的统一，但未能获得成功。
- (3) 20 世纪 60 年代末，美国物理学家格拉肖、温伯格和巴基斯坦物理学家萨拉姆等人建立了弱电统一理论，把电磁场和弱作用场成功统一。他们因此获得 1979 年诺贝尔物理学奖。
- (4) 20 世纪 70 年代末到 80 年代初，物理学家试图把强、弱、电三种力场进行统一，这种理论称为大统一理论，这个理论未获得成功，在此基础上物理学家们又提出了超对称的大统一理论，并获得了满意的结果。
- (5) 把四种力场进行统一的理论目前最有影响是超弦理论。这个理论认为存在一种极微小、运动于十维时空抽象的弦，它具波粒二象性，弦不同的振动模式构成了不同的基本粒子，超弦理论现在又发展成为膜理论（这个理论目前仍在探索之中）。

## 1.2 真空物理图像的历史

### 1.2.1 以太的真空图像

19 世纪 60 年代，麦克斯韦继承和发展了法拉第的思想，用严格的数学形式表达了电场和磁场。麦克斯韦理论的最大成就是预言了电磁场可以脱离电荷以多种形式在空间传播。光本身就是一种电磁波，不过它的波长比一般的无线电波的波长短得多。

光在真空中的传播速度，通常记为  $c$ ，约等于  $3 \times 10^8 \text{m/s}$ 。这个光速是麦克斯韦方程组中解出来的电磁波的传播速度，它与光源的速度没有关系。对声波而言，声波相对于静止媒质的传播速度是各向同性的，与声源的运动速度无关。

于是马上产生了一个问题<sup>①</sup>：如果光波也和声波一样，是靠一种媒质（以太）来传播的，那么只有对静止的以太，它的传播速度才有可能各向同性的。在力学中一切惯性系是平衡的，现在从电磁学（或光学）研究可以定义一个优越的惯性系，即相对于以太的静止的参考系，它似乎就是牛顿的绝对空间。因此人们曾认为，通过对光速的测量，应该可以找到这个唯一的绝对参考系，光在它内部的传播是各向同性的，而在其余的参考系中，光速就不可能是各向同性的了。

地球每年绕太阳运行一周，轨道速度约  $30 \text{km/s}$ ，暂时认为太阳系对应于绝对参考系，由于地球公转和自转，因而地球在以太海洋中的运动状态不断变化，人在地球上就会感觉到以太风扑面而来，即使感觉不到，但人们通过光速的测量，可以从光速的各向异性证实以太风的存在。

以太究竟是一种什么东西呢？它看不见、摸不着，存在于真空中，渗透在大气及一切液体和固体内，由光速的巨大的数值（比声的速度大一百万倍）估计，它也许是质量极轻、刚性极大的弹性媒质，如图 1.2.1 所示就是以太的真空图像。

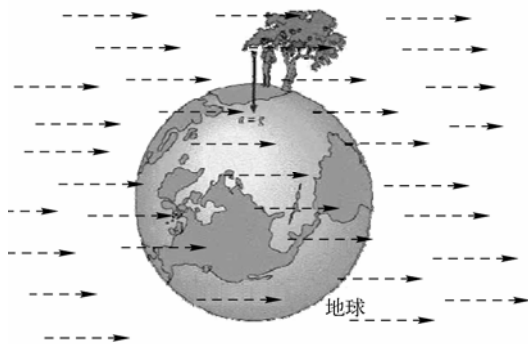


图 1.2.1 以太的真空图像

以太的经典理论存在的必要性基于两点：以太是电磁波的载体；以太的存在给出了绝对参照系。但最终遇到一些难以解决的问题，使得人们不得不把它抛弃。具体的困难表现在以下几个方面<sup>②</sup>。

首先，在力学时期人们认为以太具有弹性。由于光波实验肯定了光是横波，所以进一步认为以太应该是弹性的固体介质，这是因为在流体中发生的波只能为纵波。其次，由于它的传播速度约为  $3 \times 10^8 \text{m/s}$ ，所以以太的弹性强度必须很大，这使得天体和地面物体在以太中运动会遇到难以想像的巨大阻力，然而事实并非如此。

1876—1887 年，迈克尔逊和莫雷两人做了精密度高得多的实验，才得出了明确的否定结论——地面上根本找不到以太风。这否定了以太作为绝对参照系的性质。

1905 年，爱因斯坦提出狭义相对论，抛弃了以太的经典概念，即传递电磁作用的角

① 倪光炯，李洪芳. 近代物理. 上海科学技术出版社，1979，19-20.

② 薛晓舟. 量子真空物理导引. 科学出版社，2005，p9.



色。人们认为电磁场本身就是物质的一种形态，光传播的物理实质就是电磁场本身的振动以波动的形式在真空中传播。这里，真空是一无所有的空间。之后，爱因斯坦也意识到这样简单地抛弃以太，是个值得反思的问题。爱因斯坦提出无论是在狭义相对论中，还是在广义相对论中，空间是具有物理性质的。因此在这种意义上说，空间或真空存在着一种以太。空间、真空和以太这三者，不过是同一物理存在的三个不同名称。

经典以太的不存在不能确定真空是空无的，关键是真空物质以何种形式存在，与可观测的物质间关系如何，这就涉及真空结构。

### 1.2.2 Dirac的真空<sup>①</sup>

1928年，Dirac建立了电子的相对论方程。为了克服负能态的困难，Dirac提出了电子海的假说。

他认为在这个世界上，所有的负能态都已被电子所填满，形成所谓的电子海。由于Pauli原理，它阻止正能态的电子继续向负能态跃迁。

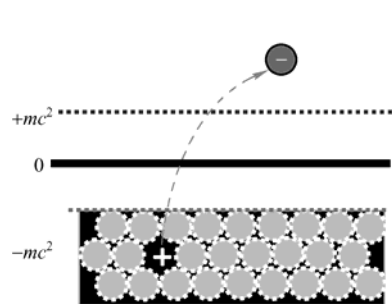


图 1.2.2 Dirac 的真空

电子海就是所谓真空，它没有观测效应。但是，如果从电子海中将一个动量为  $\vec{p}$ ，能量为  $E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$ ，自旋为  $S_p$  的电子激发到正能态，如图 1.2.2 所示，那么除了观察到一个电荷为  $-e$  的普通电子以外，在电子海中还留下一个空穴。和真空相比，这个空穴相当于一个电荷为  $+e$ ，能量为  $-E = +\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$ ，动量为  $-\vec{p}$ ，自旋为  $-S_p$  的粒子，就是所谓的正电子。一个普通的正能正电子可以放出能量而跃迁到负能态，填补电子海中的一个空穴，实际上这就是电子对的湮灭。

### 1.2.3 量子场论的真空图像<sup>②</sup>

量子场论认为，真空并不是“真”的“空”无一物，在真空状态下，全空间充满各种虚粒子，只是每个场因处于基态而都不显现出相应的粒子，整个空间都没有实粒子存在。真空基态场被激发，则处于激发态，有正反粒子产生。

量子场论描述了一个场与粒子相统一的物理图景：全空间同时相互重叠地充满了各种场，每种场各对应一种粒子。电磁场对应着光子，电子场对应着电子，中微子对应着中微子场等，它们同时存在于全空间。

场的能量最低的状态称为基态。当某种场处于基态时，场由于不可能通过状态变化释放能量而无法输出任何信号和显现出直接的物理效应，观测者也因此无法观测到粒子的存在。场的能量增加称为激发。

当基态的场被激发时，它就处在能量较高的状态，称为激发态。场处于激发态时就产生了相应的粒子。场的不同激发态所对应的粒子数目及其运动状态是不同的，粒子的产生和湮灭代表量子场激发和退激。

① 邹鹏程. 量子力学. 高等教育出版社, 1990, p508.

② 高潮, 甘华明. 图解当代科技(彩色扩大版)(上册). 红旗出版社, p158.

由此可见，场是较粒子更基本的物质存在，粒子只是场处于激发态的表现。如图 1.2.3 所示，可以用一条线表示一种场，水平直线表示基态的场，水平线上的隆起峰表示激发态的场。其中图 1.2.3 (a) 表示所有的场都处于基态，场所在的空间称为真空；图 1.2.3 (b) 表示有一个质子和电子的状态。

现代物理学研究表明，真空中尽管不存在大时空尺度下可观测的实粒子，但在极小的时空尺度下会产生正反虚粒子对，如果外界不输入能量，这些虚粒子对会迅速湮灭。因此，真空中不断地有各种虚粒子对的产生、湮灭和相互转化的现象，称为真空涨落。

按照量子场论，相互作用存在于场之间，无论是处于基态还是处于激发态的场，都同样地与其他场相互作用；粒子之间的相互作用来自于它们所对应的场之间的相互作用，场之间的相互作用是粒子转化的原因。

每一种理论对真空都有不同的理解。对于真空的更多的理解和认识，推荐读者阅读薛晓舟先生所著的《量子真空物理导引》一书。该书全面而系统地介绍了现代物理学对真空的认识，本书只研究把真空视为真空场这种特定定义下的真空结构和性质。

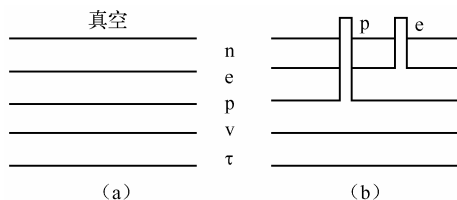


图 1.2.3 量子场的真空

## 1.3 真空场的引入

构成世界最基本的物质是什么？高能物理实验和标准模型理论研究表明构成这个实物世界的所有物质都由轻子和夸克构成，且存在四种力场，即引力场、电磁场、强作用场和弱作用场。所有这一切都来源于真空。两千多年前，中国古代思想家老子在《道德经》中提出“道生一，一生二，二生三，三生万物”。从真空场理论的角度来理解，“道”就是真空物质。从量子场论的观点来看，所有的粒子都是真空基态场的激发态，而有了基本粒子，力场才可能存在。

### 1.3.1 实验手段及面临的困难

真空不空已经成为物理学界的共识。如何通过实验来研究真空却是一个棘手的问题。由于基本粒子源自于真空，只有先弄清基本粒子的内部结构，才能间接地弄清真空物质的性质。标准模型理论研究表明，构成物质世界最基本的粒子是电子和夸克。本书研究的首要目标就锁定在电子和夸克上。

目前在探测基本粒子的内部结构时，是借助于高能粒子加速器让两个基本粒子互相撞击，把粒子击碎后，对碎片进行分析。但是两个高能粒子相撞，得到的不是碎片，而是更多的（200 多种）基本粒子（如图 1.3.1 所示）。例如：在高能粒子加速器中，一个正电子和一个反电子相撞，会发生湮灭而变成一对光子，实物粒子消失于真空；在能量很高的时候，则会产生大量的基本粒子，如图 1.3.2 所示<sup>①</sup>。这表明真空不空，粒子可以从真空中产生，也可以消失于真空。

① 图 1.3.1 和图 1.3.2 取自于 <http://www.cern>。

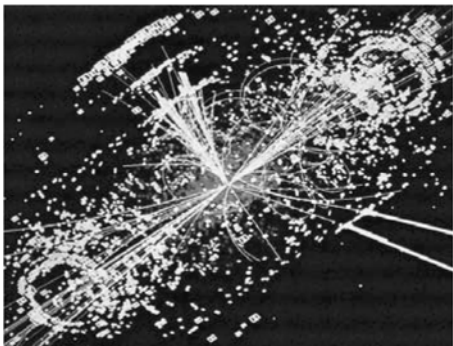


图 1.3.1 高能粒子相撞，得到的不是碎片，而是更多的基本粒子

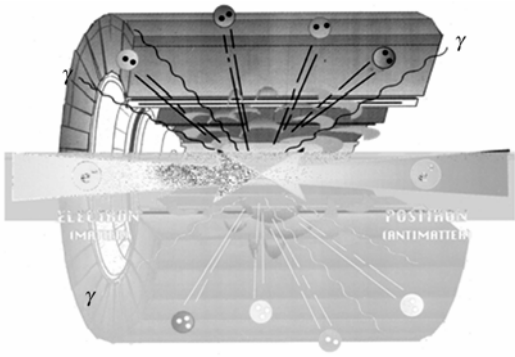


图 1.3.2 电子在加速器中发生对撞

显然，这种实验手段无法探测出电子和夸克的内部结构。但除此之外，还没有找到更好的实验手段。对于这种实验结果的理论分析，建立了称为标准模型的量子场理论。标准模型能解释关于基本粒子的现有的所有实验数据，量子理论正确地表述了基本粒子的整体性质，因此说它是物理学史上最成功的理论并不为过。

由于认识问题的方式和手段，对电子和夸克内部结构没有任何涉及，只能知道的是电子和夸克带有电荷（电子电荷： $\pm 1$ ，夸克电荷： $\pm 1/3, \pm 2/3$ ）、自旋（ $\hbar/2$ ）和质量，是 Fermi 子，满足泡利不相容原理等，至于是什么原因使得电子和夸克具有这些性质就不得而知了，对电子和夸克的内禀结构图像几乎一无所知。

大家所熟知的标准模型理论中，每一种量子场  $\varphi(x^\mu)$  描述一种基本粒子。基本粒子的整体被视为一个点，该点具有质量、电荷和自旋等自由度。为什么会具有这些自由度，这属于量子场的内禀性质，现有的量子场理论并不清楚。显然，这样的情况令人失望。为此，我们将在真空不空的基础上，建立一个新的物理学图像，力图回答上述问题。

在该理论中，为了研究基本粒子的内禀结构，引入基本粒子的内禀场。单一量子场  $\varphi(x^\mu)$  的整体被视为一个有邻域的点，该邻域就是量子场的内禀场  $u^\mu(\xi^\mu)$ 。在此基础上，可以构建一个不违反相对论的基本粒子的图像模型，并讨论如何由量子内禀场  $u^\mu(\xi^\mu)$  的性质得出基本粒子为什么会具有质量、电荷和自旋等自由度的原因。

现有的量子场理论首推标准模型理论，是目前最符合实验的理论，但由于是类点粒子理论，没有涉及粒子的内禀结构。基于真空不空，在标准模型理论的基础上给出粒子的内禀结构是新理论努力的方向和任务。本书将力图描绘出粒子的内禀结构以及四种力场的统一物理学图像，并将这样的理论暂且称为真空场理论。

1.3.2 真空场的基本假设

真空场论的首要任务是研究并认识真空。真空认识的困难在于：平直真空的性质对于实验而言，没有可观测性。这类似于一个先天的盲人想要正确地理解颜色的概念一样。具体困难如下。

困难 1：真空存在物质，这种物质应该是一种最为原始的物质，由于没有可观测性，在该物质上无法定义测度。换言之，平直真空上既不能定义时间，也无法定义空间。时空只能定义在形变的真空场之上。

困难 2: 真空不应该具有动力学特性, 如质量和惯性等; 动力学特性来自于对宏观物体的观测, 而真空无可观测性, 因而, 用宏观物理学的性质解释更基本的性质如同用分子的性质解释原子性质一样, 是不合理的 (可以存在某种基本的共性), 只能用原子的性质来解释分子性质, 两者之间不满足充分必要条件。

困难 3: 真空也不应该具有任何基本粒子的性质, 如有电荷、自旋等性质。真空具有粒子性及动力学性质会使得理论陷入用粒子解释粒子的逻辑循环中, 从本质上来说, 人们对真空的认识并没有前进。

困难 4: 真空物质的存在不可避免地引入了一个绝对参照系, 而绝对参照系的存在会使人们回到牛顿经典力学后期以太存在的时代。

基于上述困难, 那么真空是不可认识的吗? 扰动后的真空具有可观测效应。粒子物理实验证实粒子可以消失于真空, 也可以从真空中产生。如果真空的性质和现有物理学没有任何相关性, 那么很难想象今天的物理学从何而来, 物理学不可能无中生有。因而可以谨慎推论真空应该存在某种和宏观物理性质相似的更基本的性质。我们把真空的这种更基本的性质作为真空场理论的基本假设, 并以此为出发点, 推论出既能满足现有的物理学概念和规律同时又给出量子场内禀结构的新理论。

是什么原因使得真空中的这些物质能够产生出千变万化、纷繁复杂的大千世界呢? 基本考虑是: 真空物质是可以形变的, 这是真空物质应该具有的最基本的性质, 否则物理学无从谈起。

这里把平直真空中的物质定义为真空; 形变后的真空物质定义为场。真空物质统称为真空场。本理论的所有的研究都基于真空形变后的基础之上。众所周知, 我们生活的世界是三维空间。把真空不空这一基本事实结合起来, 那么真空场形变后应具有三维特性, 这是最简单、最直接的推论。整个可观测的宇宙中都应该有这种场。

由 Noether 定理可知: 时空平移不变性导致能量动量守恒, 空间各向同性导致角动量守恒。这表明真空具有均匀性和连续性及各向同性的性质。而真空在空间上表现为具有三维特性, 因而是一种三维物质, 它和数学不一样, 总存在一种能保持原有性质的最小的三维物质。所以我们做出第一条和第二条假设。

假设 I 假设真空由可数无穷多的大小为  $h_f$  的致密、均匀、连续的物质构成, 这种物质形态称为真空场, 或者称为真空基态场。 $h_f$  称为真空场基本单元。

假设 II 真空场基本单元  $h_f$  形变后才显出三维特性。维度指向由应变确定, 维度间具有独立性。

造成维度效应的原因源自于场基本单元的弹性。考虑一个未形变的场基本单元, 沿某一方向发生形变时, 点  $O$  变为  $O'$ , 如图 1.3.4 所示, 该方向就存在一个完备的维度。由正坐标轴 (拉伸区) 和反坐标轴 (压缩区) 构成。与此同时,  $O'$  会拉伸周围的场质, 与坐标轴垂直的圆盘形变量最大, 这一圆盘就构成与之垂直的坐标平面, 该圆盘和轴具有轴对称关系。如果此时还存在任意的一个场形变, 则应变按平行四平方法则进行叠加, 叠加后圆盘就是非均匀形变, 轴对称破缺, 存在一个新的指向, 这样就出现了第二个维度, 如图 1.3.3 所示, 显然这两个维度正交。由两个维度确定了一个新的平面, 当又存在一个新的应变时, 如果该形变不在二维面上, 那么与平面正交的方向最先发生形变, 这样就出现了第三个维度。为什么不出现第四个维度, 这是因为任意方向的应变都可以通过平行四平方法则被三个维度

分解，不需要第四个维度，上帝是节俭的。出现多种场形变叠加，最终会叠加出三个相互正交应变最强的三个维度，这就是场基本单元的三个维度。如果在某一区域内的场基本单元的维度方向具有相同的取向，那么宏观地表现出来该空间存在三个维度。

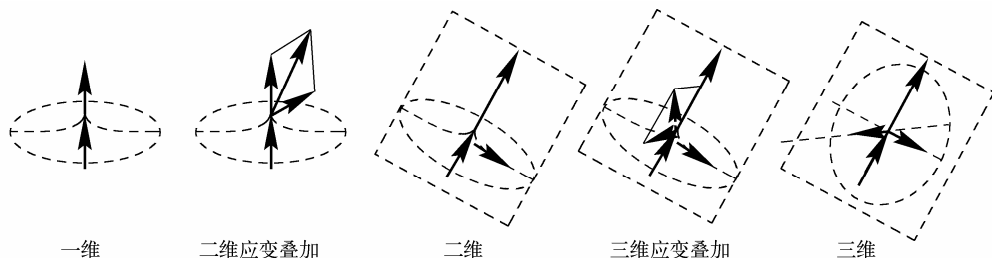


图 1.3.3 场基本单元应变叠加出现维度效应

由以上分析可知，三个维度之间的形变存在关联，三维特性源自于有弹性的场基本单元发生对称形变，或者说基本假设 II 是假设 III 的推论。

这里的真空具有颗粒性，每一个基本单元被视为坐标空间中的一个点，用  $\xi^\mu$  表示。同一个场基本单元上，可以重叠地存在一组场形变。这些场是相互独立的，但对于时间维是共同的，每一种场应变都会对时间产生叠加效应。因而每一个点不再是一个简单的点，而是一个场，场函数为

$$\xi^\mu(\sigma_i), \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{四维时空}) \quad (1.3.1)$$

$\xi^\mu_A(\sigma_i) (A=1,2,3,\dots,N)$  是场的一组独立的场函数，这些场可重叠在同一基本单元内，任何一个空间区域的点  $\xi^\mu$  都是  $N$  个场的叠加态：

$$\xi^\mu(\xi) = \sum_{A=1}^N \xi^\mu_A(\sigma_i) \quad (1.3.2)$$

真空场除了具有三个空间维度和可分性之外，还有什么特性呢？首先应该可以形变，如果不可以形变，粒子又从何产生呢？如果有形变，形变不可能无限大。于是我们给出第三条假设。

假设 III 场基本单元  $h_f$  可以发生小的形变，并存在着拉伸极限和压缩极限，延某一方方向形变的极限值为  $\mathcal{H}/2$ 。在拉伸和压缩极限内为弹性形变，不同点处的性质处处相同，并与考察的方向无关。超过形变极限后，会发生塑性形变。

当一种物质形变之后，再形变就会变得更困难，于是我们给出第四条假设。

假设 IV 真空场的形变会降低其传播能力。

基本假设的物理图像，如图 1.3.4 所示。

如果真空的传播能力降低，光子的传播速度就会变慢，光速的非均匀性会导致光线发生折射，如同光进入水中之后会变慢发生折射一样，光线会发生弯曲。

有了以上四条基本假设，就有了真空基本的性质，真空场理论找到了出发点之后，就走出了最困难的一步。基本假设的确立是整个理论成功的关键，接下来研究真空场基本单元性质。

场基本单元  $h_f$  是构成宇宙万物的最小的单元，是一个非常小的量  $h_f = 2h$ ， $h$  是普朗克常数。

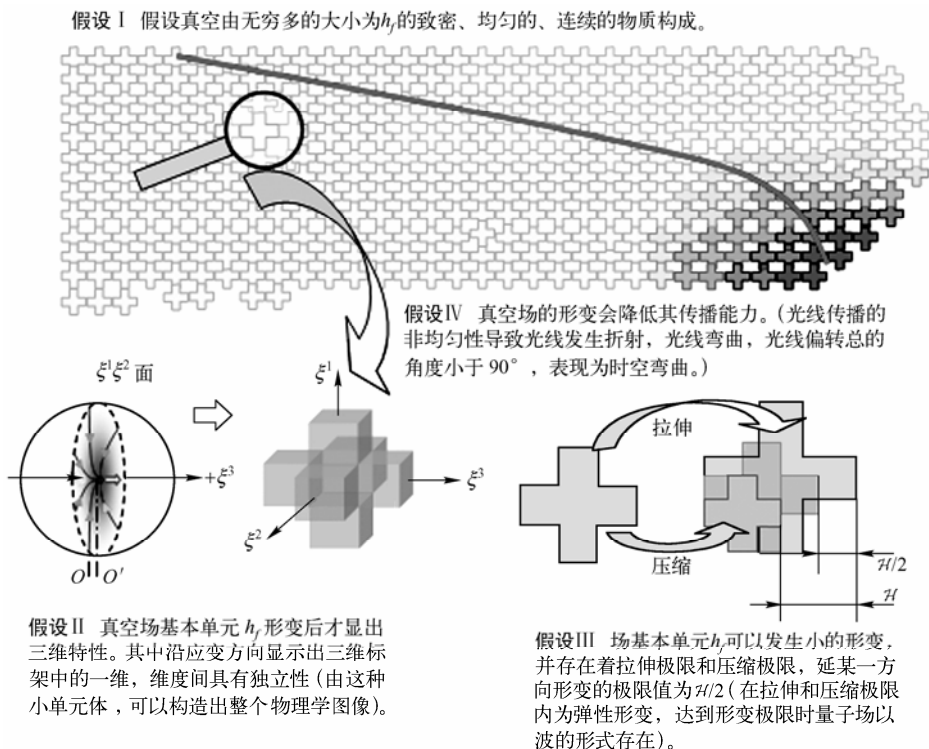


图 1.3.4 真空场理论关于真空性质的四条基本假设

今天物理学发展的前沿, 已经告诉我们<sup>①</sup>: 真空是一种由正反粒子对组成的电中性的静止质量为零的Bose子凝聚态。它具有特殊的物理性质、物理结构和特殊的动力学规律。在后续的讨论中, 可以看到场基本单元满足这一物理图像。

### 1.3.3 真空场的维度性质

#### 1. 真空场形变量的量纲

既然万物源自于真空, 就必然要求真空物质要形变, 因而形变量就是场最基本的量。真空形变构成场, 场具有时间、空间和质量三种可观测且相互独立的性质。时间、空间和质量的存在源自于真空形变。场形变量的量纲为

$$[\text{时间}][\text{长度}][\text{质量}]$$

这一量纲即普朗克常数  $h$  的量纲<sup>②</sup>。

#### 2. 真空场的维度性质

由前面的假设, 我们知道了真空具有颗粒性。真空的颗粒结构发生形变后才显出三维

① 罗泽恩. 真空动力学——物理学的新架构. 上海科学普及出版社, 2003, p2.

② 超弦理论被认为是真空场理论的塑性形变部分理论。弦理论是: 在普朗克标度下, 空间度量是量子化的, 具有断续性结构。长度的最小值是普朗克长度, 这个最小值的数量级为  $10^{-33}\text{cm}$ 。由此, 我们可以逻辑地得出: 在数量级上二维面积量子的取值为  $10^{-66}\text{cm}^2$ , 三维体量子取值为  $10^{-99}\text{cm}^3$ 。这样的尺度正是量子场中心点的尺度。

特性。换言之，场具有三维特性。接下来研究场的维度性质。

传统的流形概念来源于欧氏空间<sup>①</sup>。 $n$ 维实流形就可以看作是由一块块 $R^n$ （实 $n$ 维欧氏空间）黏合起来的结果。因此， $n$ 维实流形的最重要的特性就是在它的每一点的邻近，都有 $n$ 维的局部坐标系。

定义 1 实  $n$  维流形  $M$  是一个豪斯道夫（Hausdorff）空间，它的每一个点有一个含有该点的开集与  $R^n$  的开集同胚。

定义 2 豪斯道夫空间是一个可分空间，其中的任意两个分开的点各自具有互不相交的开邻域。

现在来具体考虑一下真空场的特性，由前面的假设可以知道真空场是物质的，具体地分析一下真空场的三维特性。

如图 1.3.5 所示是一种场，考虑三维线度为  $h$  的立方体它可以分成  $2^3 = 8$  块线度为  $h/2$  的小立方体。假设一个立方体分裂成 8 个小立方体的概率均为  $p$ ，这种过程不断重复下去，就形成了大小小立方体的分形结构，设  $N_m$  是经过  $m$  次分裂后碎块的总数，则

$$N_{m+1} = [8p + (1 - p)]N_m$$

(1.3.3)

上式右端第一项表示破裂成的小块数，右端第二项是还未分裂的小块数目。根据分数维的定义式

$$N(r) = r^{-D}$$

(1.3.4)

形成碎块的分布的分形维数就是

$$D = \frac{\lg\left(\frac{N_{m+1}}{N_m}\right)}{\lg\left(\frac{N_m}{N_{m+1}}\right)} = \frac{\lg(7p+1)}{\lg 2}$$

(1.3.5)

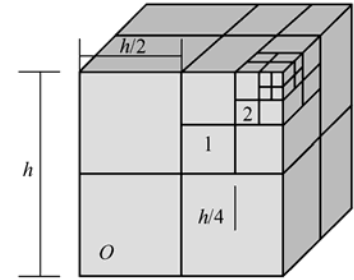


图 1.3.5 三维结构

当这一块真空场存在一种严格的分形结构，即总是无限可分时，那么可分的概率为 1，即  $p = 1$ ，则

$$D = \frac{\lg 8}{\lg 2} = 3$$

(1.3.6)

流形的维度等于三维。

而当某种场的结构出现问题，如场质缺损（局域）未局域场质增多，则  $p \neq 0$ ，则  $D \neq 0$ 。对于实际的物理学来说，当真空物质经过无限次分裂后，总存在一种最基本的单元。真空具有颗粒结构，把能保持三维特性的最小单元定义为基本单元真空场。

现在，把场所占有的空间按真空场基本单元的大小分割成无限多个大小为  $l^3$  的立方小体积， $l^3$  就是真空场基本单元的体积。用  $\alpha = 1, 2, \dots$  来标记。这种方法和量子场论的空间格子化是一致的，只是  $l^3$  有明确的大小。

如果真空受到扰动，那么将出现真空场泡沫化，那么真空场的空间维度将不再是严格的三维。在量子场相互作用区域，场的维度将小于三维。

1.3.4 真空场基本单元的粒子性

真空由场基本单元构成，具有颗粒结构。把场基本单元视为一种真空基态的粒子，处

① 刘式达，刘式适 编著；郭柏灵，倪皖荪 审阅. 非线性科学丛书孤波和湍流. 上海科技教育出版社，1994，p83.

于非激发态，该粒子没有任何可观测性。把真空基态粒子的波函数定义为  $\phi$ ：

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}, \quad \phi^* = \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \\ \vdots \\ \phi_n^* \end{pmatrix}; \quad \phi_i = \exp[-i\varepsilon_\mu x^\nu], \quad \phi_i^* = \exp[i\varepsilon_\mu x^\nu] \quad (1.3.7)$$

真空场的场应变  $\varepsilon_\mu = 0$ ，满足

$$\phi_0 = \phi_0^* = \phi_0 \phi_0^* = 1 \quad (1.3.8)$$

是质量为零的标量场，即我们熟知的 Goldstone 粒子。

## 1.4 真空场基本单元的静态应变分析

真空场发生形变时，称为真空场的形变，形变量的大小称为真空场形变量。真空场形变量和真空场坐标量进行比较则构成相对形变量，称为应变变量。

### 1. 形变

形变包括体积改变和形状畸变，这里先不考虑真空场形变的原因。当整体真空场没有发生缺损时，真空场应满足连续性假设。如图 1.4.1 所示，要求区域  $D$  内的每一点，连续地变化到区域  $D_1$  的相应点，而且两者是一一对应的关系。具体地说，如果  $P$  点为  $D_1$  内的任意一点，在物体变形后，它经过一个位移而变到  $D_1$  中的一点  $P_1$ ；分别用  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  和  $(\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3)$  表示  $P$  点和  $P_1$  点的坐标。这里  $\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3$  必须是  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  的单值连续函数。现在把  $P_1$  点和  $P$  点的三个点坐标对应地相减，可得  $P$  点的位移量  $PP_1 = U$  在三个坐标轴上的分量，这三个分量简称为位移分量，

如用  $u, v, w$  表示位移分量，则有

$$\left. \begin{aligned} u &= \xi_1^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3) - \xi^1 = f_1(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \\ v &= \xi_1^2(\xi^1, \xi^2, \xi^3) - \xi^2 = f_2(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \\ w &= \xi_1^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3) - \xi^3 = f_3(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \end{aligned} \right\} \quad (1.4.1)$$

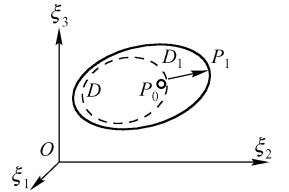


图 1.4.1 应变位移

这里的  $u, v, w$  就是真空场的形变量。用  $u^i, i=1,2,3$  表示  $u, v, w$ 。  $u^i$  构成形变空间。形变空间构成一个具有可观测效应的场，该场用  $u$  表示。在真空场论中  $u = u(u^1, u^2, u^3)$  定义为场位移函数。由真空场基本假设 II 可知真空场最大形变量  $u_{\max}^i = \mathcal{H}$ ；当  $u^i = 0$  时，为平直真空场，就是场基态。

### 2. 应变

基本单元真空场具有三维特性，可以想像成一个微分平行六面体。显然，如果其中每个微分面到六面体的变形为已知，则整个场的变形情况就知道了。以后分别用正应变（对称相对伸长度）与剪应变表示棱边的伸长与棱边夹角的变化。

首先来研究一下真空场平行六面体在  $\xi_1 O \xi_3$  面上的投影  $ABCD$ 。如图 1.4.2 所示，在变形前六面体  $A$  点的坐标为  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ 。在六面体变形时，投影上的  $A$  点移到  $A'$  点， $B$  点移到  $B'$  点， $C$  点移到  $C'$  点， $D$  点移到  $D'$  点，而整个矩形  $ABCD$  移到  $A' B' C' D'$  的位置， $A$  的位移



是  $u$  和  $w$ ，它们是坐标的函数，因此有

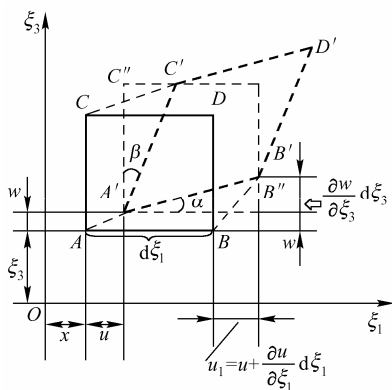


图 1.4.2 应变和位移关系示意图

$$u = f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), w = f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (1.4.2)$$

$B$  点的  $\xi_1$  坐标和  $A$  点的  $\xi_1$  坐标是不同的，因此  $B$  点沿  $\xi_1$  轴的位移不同，根据泰勒级数展开，并略去高阶微量后，其表达式应为

$$u_1 = f_1(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2, \xi_3) = u + \frac{\partial u}{\partial \xi_1} d\xi_1 \quad (1.4.3)$$

若边长  $AB = d\xi_1$ ，则在  $x$  轴上的投影的全伸长量为

$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} d\xi_1$$

如果用  $\varepsilon_1$  表示沿  $\xi_1$  轴的相对伸长，则有

$$\varepsilon_1 = \frac{u_1 - u}{d\xi_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \quad (1.4.4)$$

用相同的方法可以得到平行于  $\xi_2$  轴和  $\xi_3$  轴的边长的相对伸长为

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \xi_2}, \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial \xi_3} \quad (1.4.5)$$

下面再来研究一下六面体的各直角由于剪应变而发生的角形变。取直角  $BAC$  或  $B''A'C''$ ，变形时，棱边  $A'B'$  转动一个角度  $\alpha$ ，棱边  $A'C''$  转动一个角度  $\beta$ ，在  $\xi_1 O \xi_3$  平面内，角应变用  $\gamma_{31}$  表示，其值为角  $\alpha$  和角  $\beta$  之和，即

$$\gamma_{31} = \alpha + \beta \quad (1.4.6)$$

由于变形是微小的，所以这些解可以用正切之和表示，也可以用位移表示。

若  $A$  点在  $\xi_3$  轴方向的位移为

$$w = f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

$B$  点在  $\xi_3$  轴方向的位移为

$$w_1 = f_3(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2, \xi_3) = w + \frac{\partial w}{\partial \xi_1} d\xi_1$$

因为由  $A$  点过渡到  $B$  点时，坐标  $\xi_1$  发生变化，而位移也将由于  $\xi_1$  的变化而发生相应的变化。

$B$  点与  $A$  点沿  $\xi_3$  轴方向位移之差为

$$B''B' = W_1' - W = \frac{\partial w}{\partial \xi_1} d\xi_1$$

在直角三角形  $AB''B'$  中，可得

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{B''B'}{A'B''} = \frac{\frac{\partial w}{\partial \xi_1}}{d\xi_1 + \frac{\partial u}{\partial \xi_1} d\xi_1} = \frac{\frac{\partial w}{\partial \xi_1}}{1 + \frac{\partial u}{\partial \xi_1}}$$

在分解中， $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}$  与 1 相比是个微量，故略去，因而得  $\alpha = \frac{\partial w}{\partial \xi_1}$ ；用相同的方法可得  $\beta = \frac{\partial u}{\partial \xi_3}$ 。

最后由式 (1.4.6) 可得在  $\xi_1 O \xi_3$  平面内相对剪应变为

$$\gamma_{31} = \frac{\partial u}{\partial \xi_3} + \frac{\partial w}{\partial \xi_1}$$

用同样的方法可以得到  $\xi_1 O \xi_2$  和  $\xi_2 O \xi_3$  平面内的剪应变为

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v}{\partial \xi_1}, \quad \gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial \xi_3} + \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \quad (1.4.7)$$

由以上分析便可得到用位移表示应变的几何关系为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \gamma_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \gamma_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_3} + \frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \gamma_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.4.8)$$

应变张量为

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

这是一个更一般的表述形式,  $\varepsilon_{ij}$  就是真空场的场应变变量, 构成动量场函数。

在研究基本单元真空场应变问题时, 可以找到三个互相垂直的平面, 在这些平面上没有剪应变, 这样的平面为主平面, 而这些平面的法线方向称为主方向。对应于主方向的正应变则称为主应变。

设有  $ACDBEGHF$  正六面体基本单元真空场 (如图 1.4.3 所示), 因为它是一个微元体, 在研究物体的几何关系时, 可以认为它的应变是均匀的。在变形前  $A$  点的坐标为  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , 变形后  $A'$  点的坐标为  $[(\xi_1 + u), (\xi_2 + v), (\xi_3 + w)]$ ,  $u, v$  和  $w$  为  $A$  点的位移, 即  $AA'$  在  $O\xi_1$ ,  $O\xi_2$  和  $O\xi_3$  轴上的投影, 而且假设这些都是很小的量, 并且都是  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  的连续函数。 $H$  点在变形前的坐标是

$$[(x + d\xi_1), (\xi_2 + d\xi_2), (\xi_3 + d\xi_3)]$$

变形后的坐标是

$$[(x + d\xi_1) + (u + du)]$$

$$[(y + d\xi_2) + (v + dv)]$$

$$[(z + d\xi_3) + (w + dw)]$$

其中  $du, dv$  和  $dw$  为  $H$  点相对于  $A$  点的位移在  $O\xi_1$ ,  $O\xi_2$  和  $O\xi_3$  轴上的投影。

$u$  是  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  的连续函数。则  $(u + du)$  将是  $(\xi_1 + d\xi_1), (\xi_2 + d\xi_2), (\xi_3 + d\xi_3)$  的连续函数。即如果有<sup>①</sup>

$$u = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow (u + du) = f[(\xi_1 + d\xi_1), (\xi_2 + d\xi_2), (\xi_3 + d\xi_3)]$$

而后一式用泰勒级数展示后, 将有

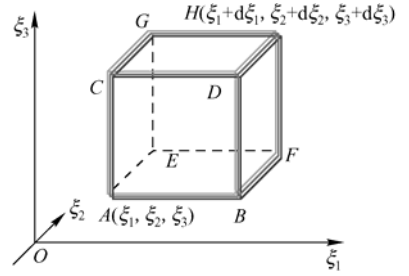


图 1.4.3 场形变的微元体

① 徐秉业, 刘信声. 应用弹塑性力学. 北京清华大学出版社, 1995, p45.

$$u + du = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \frac{\partial f}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial f}{\partial \xi_3} d\xi_3 + (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3 \text{ 的高阶项})$$

### 3. 剪应变

由于  $u = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  是很小的量，它的增量也都是很小的量，因此  $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3$  的高阶项都可以忽略，这时有

$$\begin{aligned} du = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial u}{\partial \xi_3} d\xi_3 = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \right) d\xi_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_3} + \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) d\xi_3 \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_2} - \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \right) d\xi_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_3} - \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) d\xi_3 \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

在上式中， $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \right)$  为剪应变，其几何图像是：如果  $v$  随  $\xi_1$  的增大而增大，

则  $\frac{\partial v}{\partial \xi_1}$  为正值，同样如果  $u$  随  $\xi_2$  的增大而增大，则  $\frac{\partial u}{\partial \xi_2}$  为正值。可见，直角  $\xi_1 O \xi_2$  的减小相

当于正的剪应变  $\varepsilon_{12}$ ，即六面体夹角减小对应于正剪应变，夹角的增大对应于负的剪应变。

如图 1.4.4 所示。如考虑一个立方体，对于代表每一个场基本单元的小立方体而言，压缩形变使得由正方体变为小截头正锥体，如图 1.4.5 (a) 所示。对于  $O$  点而言，当  $O \rightarrow O'$  点，原来的点向下移动  $u$ ，为负值，原来的  $O$  点为垂直正交的直角，现在为钝角，六面体夹角增大对应于负的剪应变，因而压缩对应于负值；如果是拉伸形变，原来的点向上移动  $u$ ，为正值，原来的  $O$  点为垂直正交的直角，六面体夹角减小对应于正剪应变，拉伸形变对应于正值。这使得我们将压缩场定义为负；拉伸场定义为正。对于图 1.4.5 (a) 截头方锥体应变可以做一种近似，考虑主应变方向，近似为立方体应变，如图 1.4.5 (b) 所示。

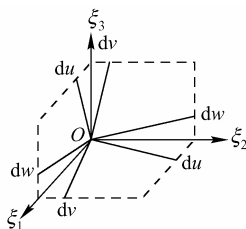


图 1.4.4 剪应变示意图

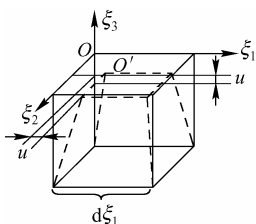


图 1.4.5 (a) 截头方锥体应变

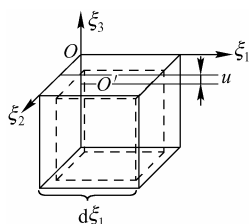


图 1.4.5 (b) 立方体应变

### 4. 刚体转动

在式 (1.4.9) 中  $\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} - \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right)$  为转动张量的分量形式，描述转动应变，如

图 1.4.6。考虑  $\varepsilon'_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_2} - \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \right)$ ，对于小应变张量而言<sup>①</sup>： $\frac{\partial v}{\partial \xi_1} \approx \alpha$ ， $\frac{\partial u}{\partial \xi_2} \approx \beta$ ，

$$\varepsilon'_{21} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)。$$

① 陆明万，罗学富. 弹性理论基础. 清华大学出版社，1990 年 2 月第一版，61-64.

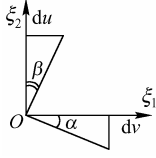


图 1.4.6 转动张量示意图

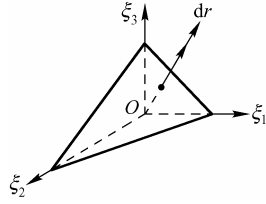


图 1.4.7 在主应力空间中应变和应变增量

## 5. 主应变

在研究应变问题时，可以找到三个相互垂直的平面，在这些平面上没有剪应变，这样的平面为主平面，该平面的法线方向称为主方向。在式 (1.4.9) 中，若后两项表示刚体转动，并不引起应变，即  $\alpha = \beta$ ，如图 1.4.6 所示，则在计算应变时，可以忽略不计，则

$$du_i = \varepsilon_{ij} d\xi_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.4.10)$$

在主应变空间中  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  表示一个应变状态 (如图 1.4.8)。若  $r$  增加了一个量  $dr$ ，且其方向保持不变，这时  $r$  和  $dr$  在  $O\xi_1$ 、 $O\xi_2$  和  $O\xi_3$  方向的投影是成比例的，应变表达式应满足如下关系

$$\varepsilon = \frac{dr}{r} = \frac{du}{d\xi_1} = \frac{dv}{d\xi_2} = \frac{dw}{d\xi_3} \quad (1.4.11)$$

(可以直观地看出这是电力线的表达式) 因此可得

$$du = \varepsilon d\xi_1, \quad dv = \varepsilon d\xi_2, \quad dw = \varepsilon d\xi_3 \quad (1.4.12)$$

由式 (1.4.12) 得

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1 - \varepsilon)d\xi_1 + \varepsilon_{12}d\xi_2 + \varepsilon_{13}d\xi_3 &= 0 \\ \varepsilon_{21}d\xi_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon)d\xi_2 + \varepsilon_{23}d\xi_3 &= 0 \\ \varepsilon_{31}d\xi_1 + \varepsilon_{32}d\xi_2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon)d\xi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

如果式 (1.4.13) 的系数行列式为零，则此式将具有非零解，此时

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_2 - \varepsilon & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_3 - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

将此行列式展开后，则可得

$$\varepsilon^3 - I'_1 \varepsilon^2 + I'_2 \varepsilon - I'_3 = 0 \quad (1.4.14)$$

式中  $I'_1, I'_2$  和  $I'_3$  为应变第一、第二和第三不变量，相应可写为

$$\left. \begin{aligned} I'_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ I'_2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2 \\ I'_3 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + 2\varepsilon_{12} \varepsilon_{23} \varepsilon_{31} - (\varepsilon_1 \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_3 \varepsilon_{12}^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.4.15)$$

如果方程式 (1.4.14) 可以因式分解，则应有

$$(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3) = 0$$

式中  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  为主应变，以主应变表示的应变不变量将为

$$\left. \begin{aligned} I'_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ I'_2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 \\ I'_3 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.4.16)$$

沿主方向取出边长为  $dx_1, dx_2, dx_3$  的正六面体，变形后其相对体积变化为（略去高阶小量）

$$\begin{aligned} \frac{dV' - dV}{dV} &= \frac{(1 + \varepsilon_1)dx_1(1 + \varepsilon_2)dx_2(1 + \varepsilon_3)dx_3 - dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3} \\ &\approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I'_1 \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

因此第一应变不变量  $I'_1$  表示每单位体积变形后的体积变化，又称体积应变。

## 6. 非刚性的小应变张量

若为非刚体转动，即  $\alpha \neq \beta$ ，如图 1.4.6 所示，则在计算应变时，不能忽略。

按式 (1.4.7) 对  $\varepsilon_{i2}$  和  $\varepsilon_{i3}$  的定义式 (1.4.9) 可写为

$$du = \varepsilon_{i1}d\xi_1 + \varepsilon_{i2}d\xi_2 + \varepsilon_{i3}d\xi_3 + \varepsilon'_{i2}d\xi_2 + \varepsilon'_{i3}d\xi_3$$

用同样的方法可以推导出  $dv$  和  $dw$  的表达式为

$$\begin{aligned} dv &= \varepsilon_{21}d\xi_1 + \varepsilon_{22}d\xi_2 + \varepsilon_{31}d\xi_3 + \varepsilon'_{21}d\xi_1 + \varepsilon'_{31}d\xi_3 \\ dw &= \varepsilon_{31}d\xi_1 + \varepsilon_{32}d\xi_2 + \varepsilon_{33}d\xi_3 + \varepsilon'_{31}d\xi_1 + \varepsilon'_{32}d\xi_2 \end{aligned}$$

这里应变用张量表示

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{21} & 0 & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.4.18)$$

将上式再作分解，可写成如下形式

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}}_{\text{内禀动量项}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{环质量项}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{21} & 0 & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{自旋项}} \quad (1.4.19)$$

这就是真空场形变空间的微分表述形式。上式标记的“内禀动量项”、“自旋项”、“环质量项”的物理意义在后续的章节在进行讨论。

这可以认为  $d\xi_i$  为一个无形变坐标空间的基， $du_i$  为形变空间的基，两个基之间的变换矩阵（雅可比矩阵）为  $\varepsilon_{ij}$ 。 $\varepsilon_{ij}$  为相对形变量，当  $\varepsilon_{ij} = 0$  时，为平直空间，而  $\xi^i$  为平直空间内的坐标架，是一个理想的数学标架。在真空场论中，如果不存在场形变，那么对应的物理空间就不存在方向以及物理坐标架。由式 (1.4.9) 和式 (1.4.19) 知，主应变表述具有最简单的形式

$$du_i = \varepsilon_i d\xi_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

主应变的方向就是应变场的方向，也是构成形变空间中自然标架的取向。在该标架中，主平面上没有剪应变，环质量项被归并到主应变项中，式 (1.4.20) 写为

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}}_{\text{静质量项}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{21} & 0 & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{自旋项}} \quad (1.4.20)$$

内禀动量项和环质量项两项共同构成静质量项。

## 7. 由应变求位移

考虑两个点  $p^0$  和  $p'$  (如图 1.4.4 所示), 它们的坐标分别为  $\xi^k$  和  $\xi'^k$ 。其中  $p^0$  是参考点, 可选用已给定位移值的边界点, 或者已能判断具有单向位移的内点。设它的位移为  $u_i^0$ 。  $p'$  是任意内点, 它的位移  $\bar{u}_i$  可由沿连接  $p^0$ ,  $p'$  两点的任意曲线  $C$  积分而得:

$$\bar{u}_i = u_i^0 + \int_{p^0}^{\bar{p}} du_i = u_i^0 + \int_{p^0}^{\bar{p}} \frac{\partial u_i}{\partial \xi^l} d\xi^l \quad (1.4.21)$$

在研究真空场变形时, 一般取一个平行六面体的基本单元真空场进行分析。真空场在变形时, 各相邻小单元体不能是互相无关的, 必然是相互有联系的, 因此应该认为物体在变形场是连续的, 变形后仍是连续的, 如在相邻的六面体  $A$  和  $B$  上 (如图 1.4.8 (a) 所示), 其相邻的棱边是  $ab$  和  $a_1b_1$ , 变形后  $ab$  和  $a_1b_1$  都应当伸长和缩短同样的数值, 因为它们是公共的棱边。如果六面体  $ABCD$  相交于  $c$  点 (如图 1.4.8 (b) 所示), 在变形前  $c$  点角度总和是  $360^\circ$ , 变形后, 这些角度都将改变, 其中某些角度增大了, 另一些角则减小了, 但是它们的总和还应等于  $360^\circ$ 。由此可见, 应变之间应该是以某种关系互相联系的。连续物体应变之间关系的数学表达式即为应变协调方程。

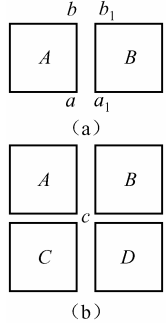


图 1.4.8 应变协调示意图

设物体中某一点的坐标是  $(x, y, z)$ , 其位移是  $u, v$  和  $w$ , 应变为  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}$  和  $\gamma_{yz}$ , 若已知  $u, v$  和  $w$ , 则应变便可由位移表示, 如果在表达式中消去位移  $u, v$  和  $w$ , 那么所有的六个应变张量  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  都始终只表述同一个位移。换言之, 方程描述的轨迹是一个连续的不间断的径迹, 这保证了若某一初始连续的物体按给定的应变状态变形时, 能始终保持连续, 既不开裂, 又不重叠, 则可得到应变之间的关系。

现将正应变  $\varepsilon_x$  对  $y$  取两次微分, 而将  $\varepsilon_y$  对  $x$  取两次微分, 则有

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

如将上式两边相加, 可得

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

上式右侧括号中的表达式即为剪应变  $\gamma_{xy}$ , 因此有

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.4.22)$$

用同样的方法可以得到另外两个类似的方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.4.23)$$

如果取剪应变的表达式为

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

将上面的第一式对  $z$  取微分, 第二式对  $x$  取微分, 第三式对  $y$  取微分, 则有

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

将上述第一式与第三式相加, 然后减去第二式, 则可得

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$$

如将上式对  $x$  求导数, 则有

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \quad (1.4.24)$$

用相同的方法, 可得

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x \partial z}$$

式 (1.4.24) 是由圣维南首次导出的, 通常称为变形协调方程式或变形的协调方程。

应变协调方程保证了所研究的真空场不致发生断裂, 仍然保持三维性质。应变协调方程给出了场应变的边界条件。对于真空场来说, 沿某一方向最大的形变位移不可能超过  $H/2$ , 因而还有附加条件:

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq \left( \frac{H}{2} \right)^2, \quad u_{\max}^2 + v_{\max}^2 + w_{\max}^2 = \left( \frac{H}{2} \right)^2 \quad (1.4.25)$$

满足第一个条件时, 场应变处于非激发态; 满足第二个条件则形成可观测的实物粒子。

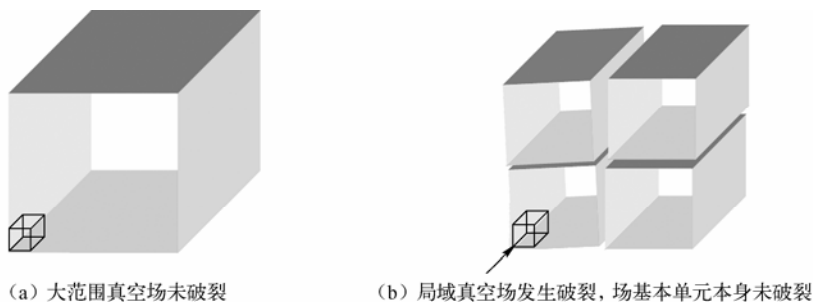


图 1.4.9 大范围真空场形变

大范围真空场光滑连续的时空维度严格等于四维, 这样的时空是相对论时空, 存在引力场。大范围真空场出现断裂意味着出现量子场, 时空维度不再严格等于四维, 这样的时空

不再是相对论时空。真空场破裂类似于钢化玻璃破裂，出现破裂不是长长的裂缝，而是小碎片，但场基本单元本身并没有破裂，如图 1.4.9 所示。这样的时空是量子场的时空，存在电磁场和弱作用场。场基本单元是一个独立体，极度的形变会导致场基本单元的破裂表现为维度分裂出现塑性形变，进入到弦的时空，存在强作用场。

## 1.5 真空中量子场理论建立的基本思想

所有的一切都来自于真空，这是真空场理论的基本出发点，所以必须从研究真空入手，对物质本质的认识才能更进一步。量子场论的真空图像是目前和实验最为接近的物理学图像，但这种图像过于复杂。事物的本质应该表现出一种简单的美，在此基础上，应该存在更简单的物理学图像。真空是万物之源，真空应该是简单而原始的。真空的形变构成具有可观测性的场，时间、空间和质量都是真空形变所产生的效应。要特别强调的是，质量是和时空同样基本的量。

真空场理论寻求四种力场统一的核心思想就是由满足基本假设的真空在极小区域的真空场扰动或激发形成量子场，量子场存在多种自由度空间，自由度空间弯曲可构成电磁场、弱作用场、强作用场；量子场的背景真空场大范围存在的微弱形变，就构成引力场。所有这一切都是弹性形变，是本书研究的范围。超出弹性形变的范畴是塑性形变。

真空场理论包含弹性形变和塑性形变两部分理论。新理论的物理图像很简单，整个物质世界以及四种力场都是由满足基本假设的真空受到激发或形变产生出来的，整个真空场理论的建立都基于这一简单的物理图像，如图 1.5.1 和图 1.5.2 所示。

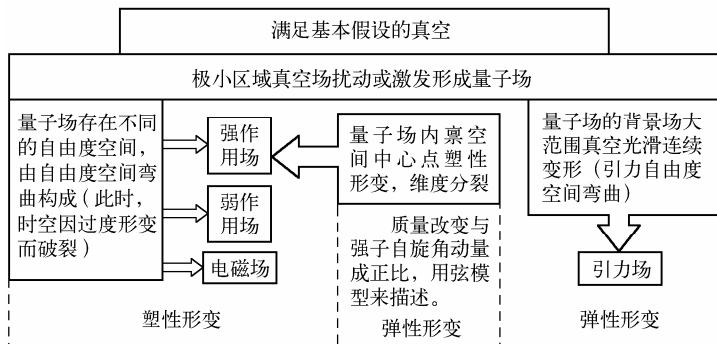


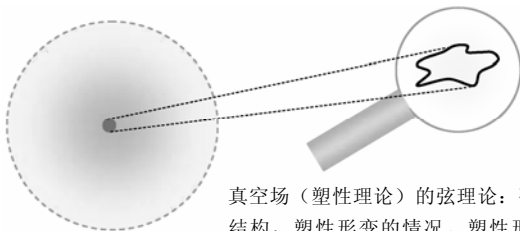
图 1.5.1 真空场理论的基本思想

量子场论：把量子场视为一个点，

坐标架为  $x(x^0, x^1, x^2, x^3)$

真空场（弹性理论）论：把量子场视为有邻域的点，邻域是量子场内禀空间，点是量子场中心点。内禀空间坐标为  $\xi(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ ；

坐标空间四维时空扩展为  $N$  自由度空间  $x(x^0(\xi), x^1(\xi), x^2(\xi), x^3(\xi), \dots, x^N(\xi))$ 。基本粒子被认为是一个点状的广义荷压弯了多维自由度空间所产生的效应，或者说基本粒子是多维弯曲自由度空间上的一个点



真空场（塑性理论）的弦理论：研究量子场中心点的结构，塑性形变的情况。塑性形变的中心点是质量荷，因而真空场弦理论只适用于研究质量荷空间。质量荷空间为二维空间  $\sigma(\tau, \sigma)$ ，内禀空间坐标变为  $\xi(\xi^0(\sigma), \xi^1(\sigma), \xi^2(\sigma), \xi^3(\sigma))$

图 1.5.2 量子场、真空场和真空弦理论的关系



- 质量荷二维空间  $\sigma(\tau, \sigma)$
- 量子场内禀空间  $\xi(\xi^0(\sigma), \xi^1(\sigma), \xi^2(\sigma), \xi^3(\sigma))$
- 观测空间是  $N$  自由度空间  $x(x^0(\xi(\sigma)), x^1(\xi(\sigma)), x^2(\xi(\sigma)), x^3(\xi(\sigma)), \dots, x^N(\xi(\sigma)))$

## 1. 真空的形变

平直（相对于观察者而言）真空场没有任何可观测性，在平直真空场中，存在平直的四维时空坐标架  $x(x^0, x^1, x^2, x^3)$ ，真空场形变后，四维时空坐标架弯曲，变为  $x(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ 。考虑真空场  $x^i(\lambda)$  的某一点  $\lambda_0$  产生形变  $\varepsilon$ <sup>①</sup>，或者说点  $\lambda_0$  沿  $\bar{x}$  方向受到挤压，真空产生形变，形变量为  $\varepsilon$  则有

$$\begin{aligned} x'^i &= x^i(\lambda_0 + \varepsilon) = x^i(\lambda_0) + \varepsilon \left( \frac{dx^i}{d\lambda} \right)_{\lambda_0} + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \left( \frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} \right)_{\lambda_0} + \dots \\ &= \left( 1 + \varepsilon \frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \frac{d^2}{d\lambda^2} + \dots \right) x^i \Big|_{\lambda_0} = \left( 1 + \varepsilon \bar{x} + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \bar{x}^2 + \dots \right) x^i \Big|_{\lambda_0} \\ 1 + \varepsilon \bar{x} + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \bar{x}^2 + \dots &= \exp[\varepsilon \bar{x}] \\ x^i &\rightarrow x'^i = \exp[\varepsilon \bar{x}] x^i = \varphi(x^i) x^i \end{aligned}$$

真空场中， $x^i(\lambda)$  某一点  $\lambda_0$  的应变  $\frac{x^i(\lambda_0 + \varepsilon)}{x^i(\lambda_0)} = \exp[\varepsilon \bar{x}]$  就构成了该点场函数：

$$\varphi(x) = \exp[\varepsilon \bar{x}] \quad (1.5.1)$$

从真空场的角度可见空间的形变导致点  $\lambda_0$  量子场  $\varphi(x^i)$  的产生。如果考虑相对形变量存在相应的振幅  $h$ ，则场的相对形变量（以后简称形变量）为

$$u(x) = h \exp[\varepsilon \bar{x}] \quad (1.5.2)$$

称为该点场位移函数。对于量子场而言，场波函数（即场量）为  $\varphi(\xi) = A \exp[ik_\mu \xi^\mu]$ ， $A^2$  对应粒子的几率幅；位移函数为  $u(\xi) = h \exp[ik_\mu \xi^\mu]$ 。场波函数和场位移函数的振幅的物理意义不同， $A^2$  是粒子的几率幅， $h$  则是量子场内禀场的形变量。量子场波函数和位移函数的建立参见后续轻子和光子图像章节。

在真空场中，设  $\varepsilon$  为某点的应变变量（应变变量对应四动量），对于  $\Omega$  区域的整个空间而言，存在  $i$  个点，总应变量为  $\varepsilon_{\text{all}} = \sum_i \varepsilon_i$ 。要注意的是这里的点不是数学上的点，是有邻域的点，每一个点可视为一个发生形变的小体积元。每点空间形变，做这样的代换  $x \rightarrow \varphi(x)$ ，这样  $\varepsilon$  便构成应变密度。

$$\varepsilon_{\text{all}} = \int_V \varepsilon \, dV \quad (1.5.3)$$

$$\exp[\varepsilon \varphi] = 1 + \varepsilon \varphi + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \varphi^2 + \frac{1}{3!} \varepsilon^3 \varphi^3 + \frac{1}{4!} \varepsilon^4 \varphi^4 + \dots \quad (1.5.4)$$

第一项为真空的四动量密度，或者说真空量子场基态的四动量密度： $dP_0 = 1$ ；第二项

① B.F.舒茨[英]. 数学物理中的几何方法. 冯承天, 李顺祺 译, 张民生 校. 上海科学技术文献出版社, 1986, p52.

为具有宏观效应的四动量密度： $\mathbf{d}P_1 = \varepsilon\varphi$ ；第三项为量子场的四动量密度： $\mathbf{d}P_2 = \frac{1}{2!}\varepsilon^2\varphi^2$ ；高阶项  $\mathbf{d}P_n = \frac{1}{3!}\varepsilon^3\varphi^3 + \frac{1}{4!}\varepsilon^4\varphi^4 + \dots$  则为真空中量子场起伏（例如量子场本身的自相互作用）。以上的理解只是一个大致的物理图像。接下来看一下四动量密度的具体表达式。

$N$  维空间某点场应变  $\varepsilon$  的长度为

$$|\varepsilon| = \sqrt{(\varepsilon^0)^2 - (\varepsilon^1)^2 - \dots - (\varepsilon^N)^2} = \sqrt{\eta_{\mu\nu}\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu}$$

这里  $\eta_{\mu\nu}$  为  $N$  维动量空间的度规。式 (1.5.4) 的第三项为量子场的四动量密度。

$$\mathbf{d}P_2 = \frac{1}{2!}(\eta_{\mu}^{\nu}\varepsilon^{\mu}x_{\nu})^2\varphi(x) = \frac{1}{2}\left[(\varepsilon^0x_0)^2 - (\varepsilon^1x_1)^2 - \dots - (\varepsilon^Nx_N)^2\right]\varphi(x)$$

真空的形变的被重新理解为如下几方面。

(1) 自由量子场的  $L$  氏量密度对应单粒子内禀自由度空间的应变间隔。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2!}(\eta_{\mu}^{\nu}\varepsilon^{\mu}x_{\nu})^2\varphi(x) = \frac{1}{2}\left[(\varepsilon^0x_0)^2 - (\varepsilon^1x_1)^2 - \dots - (\varepsilon^Nx_N)^2\right]\varphi(x)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\varphi(x)\partial_{\nu}\varphi(x) \quad (1.5.5)$$

式中， $\eta^{\mu\nu}$  为  $\mathcal{L}$  空间的度规。

(2) 场应变是自由度空间中的应变，每一个自由度的应变为该自由度的能量，于是量子场的总的应变对应该量子场的哈密顿量密度。

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}[(\varepsilon^0)^2 + (\varepsilon^1)^2 + \dots + (\varepsilon^N)^2]\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^N(\varepsilon^{\mu})^2\varphi(x)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\delta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\varphi(x)\partial_{\nu}\varphi(x) \quad (1.5.6)$$

式中， $\delta^{\mu\nu}$  为  $\mathcal{H}$  空间的度规。

考虑到量子场内禀空间为  $N$  维自由度空间，每一种自由度空间又可以独立地发生弯曲，每一种弯曲对应一种相互作用。把自由度空间由平直态推广到弯曲态，普通偏微分  $\partial_{\mu}$  换成协变微分  $D_{\mu}$ ，这样就包含了相互作用的情况。量子场的  $L$  氏量密度和哈密顿量密度可重新写为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}D_{\mu}\varphi(x)D_{\nu}\varphi(x) \quad (1.5.7)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\delta^{\mu\nu}D_{\mu}\varphi(x)D_{\nu}\varphi(x) \quad (1.5.8)$$

(3) 真空量子场源自于平直真空的形变，正形变场恒等于负形变场，弯曲空间会有相应的补偿以保持守恒。于是可以得到多自由度量子的统一的场方程，对于标量场

$$D_{\mu}D_{\nu}\varphi(x)g^{\mu\nu} = 0 \quad (1.5.9a)$$

正旋量场为

$$D_{\mu}\varphi(x^{\nu})g_{\nu}^{\mu} = 0 \quad (1.5.9b)$$

反旋量场为

$$D_{\mu}^*\bar{\varphi}(x^{\nu})g_{\nu}^{\mu} = 0 \quad (1.5.9c)$$

这里  $g^{\mu\nu}$  为粒子内禀自由度空间度规。独立自由度空间的弯曲用协变微分描述。这一表述只是一个粗略的表述形式，有待进一步完善。

真空的形变借用四维应变来表述。考虑四维应变构成应变张量  $\varepsilon_{ab}$  ( $a, b = 0, 1, 2, 3$ )，四

维时空的应变张量采用泡利 (Pauli) 度规,  $\varepsilon = \varepsilon_{ab} \eta_{\mu\nu}$ , 写成分量的形式为

$$\varepsilon_{ab} \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{00} & \varepsilon_{01} & \varepsilon_{02} & \varepsilon_{03} \\ \varepsilon_{10} & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{20} & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{30} & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{00} & -\varepsilon_{01} & -\varepsilon_{02} & -\varepsilon_{03} \\ \varepsilon_{10} & -\varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{20} & -\varepsilon_{21} & -\varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{30} & -\varepsilon_{31} & -\varepsilon_{32} & -\varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

可以把  $\varepsilon$  这个矩阵进行如下简单的分解:

$$\varepsilon_{ab} \eta_{\mu\nu} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{能量项}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\Delta \vec{\varepsilon}_{11} + \vec{\varepsilon}_{m1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\vec{\varepsilon}_{22} + \vec{\varepsilon}_{m2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\vec{\varepsilon}_{33} + \vec{\varepsilon}_{m3}) \end{bmatrix}}_{\text{质量动量项}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_{01} & -\varepsilon_{02} & -\varepsilon_{03} \\ \varepsilon_{10} & 0 & -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{20} & -\varepsilon_{21} & 0 & -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{30} & -\varepsilon_{31} & -\varepsilon_{32} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{电磁项}} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{这里 } \varepsilon_{ii} = \Delta \vec{\varepsilon}_{ii} + \vec{\varepsilon}_{mi}, \quad \vec{\varepsilon}_{ii} \perp \vec{\varepsilon}_{mi}) \quad (1.5.10)$$

$\varepsilon$  被分解为三项: 能量项、质量动量项和电磁项。四动量的存在必然会引起背景空间弯曲, 当背景时空弯曲时,  $x \rightarrow x'$ 。每一种形式的应变构成一种独立的自由度。这些自由度具有能量和动量的量纲。

## 2. 引入自由度空间

单一粒子内部空间存在多个自由度。先不考虑自由度的成因, 自由度是独立存在的, 可把自由度视为一种新的维度。建立一个自由度空间  $x(x^0, x^1, x^2, \dots, x^N)$ 。在自由度空间中, 存在  $N$  个维度 (如电子存在的自由度: 能量、动量、静质量和自旋等), 每一个自由度有一个坐标轴  $x^i$ , 由  $x$  构成自由度空间的完备正交系:

$$\varepsilon \bar{x} = \varepsilon^0 x^0 + \varepsilon^1 x^1 + \dots + \varepsilon^N x^N$$

$x^i x^j = 0, i \neq j$ 。每一个自由度 (如能量、动量、静质量) 对应一种应变, 具体的应变可以作如下规定。利用多维闵可夫斯基度规  $\eta_{ij}$  可将上式写为

$$\begin{aligned} \varepsilon \bar{x} &= \eta_{ij} \varepsilon^i x^j = \varepsilon^0 x^0 - \varepsilon^1 x^1 - \dots - \varepsilon^N x^N \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{00}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{能量 } p_0 \text{ 项}} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{动量 } p_1 \text{ 项}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{动量 } p_2 \text{ 项}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \\ &\quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}}_{\text{动量 } p_3 \text{ 项}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi^3 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix}}_{\text{静质量}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} - \dots \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

这里在平直空间条件下,  $x^i$ ,  $R$  ( $R$  为内禀空间半径)。

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}^0 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{00}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{能量 } p_0 \text{ 项}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{动量 } p_1 \text{ 项}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{动量 } p_2 \text{ 项}} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}^3 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}}_{\text{动量 } p_3 \text{ 项}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^4 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix}}_{\text{静质量}} \\
 x^0(\xi) &= \begin{pmatrix} \xi^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^1(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^3(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi^3 \end{pmatrix}, \quad x^4(\xi) = x_M = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \quad (1.5.12)
 \end{aligned}$$

$x^i(\xi), i=0, 1, 2, 3$  为可观测四维时空;  $\xi^i, i=0, 1, 2, 3$  为内禀空间四维时空, 可延伸至可观测四维时空中。 $x^4(\xi)$  和其余的内禀自由度  $x^i(\xi), i=0, 1, 2, 3$  被限制在内禀空间中, 这样多维闵可夫斯基度规  $\eta_{ij}$  对于我们的观测而言, 退化为四维闵可夫斯基度规  $\eta_{\mu\nu} (\mu, \nu=0, 1, 2, 3)$ 。

$\boldsymbol{\varepsilon}$  为应变矩阵, 应变满足

$$\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_N = 0 \quad (1.5.13)$$

即  $\partial_\mu u_\mu = 0$ , 其物理意义是应变守恒量。这里的  $\varepsilon_m$  为球对称应变, 构成静质量项。

# 第 2 章 量子场的运动方程和真空背景场的均匀性

## 2.1 场的拉格朗日形式

### 1. 真空背景中的量子场

场的物理本质是真空场形变所产生的效应，因此场具有可观测性。可以把场理解为一种广义的物质。物质的狭义的理解是基本粒子等，场与空间的物质分布相联系。如图 2.1.1 所示，由式 (1.5.1) 得知真空  $x^i(\lambda)$  中任意点  $\lambda_0$  的形变变量为  $\varepsilon$ ，就构成一个基本粒子，即量子场  $\varphi(x)$ ，该量子场可以视为一个有邻域的点， $\varepsilon(\varepsilon_0, \vec{\varepsilon})$  为四动量， $\varphi(\varepsilon x)$  沿  $\vec{\varepsilon}$  方向传播。这样的图像是极其粗略的，更精细的结构在后续章节中进行论述。但这种粗略的图像具有量子场最基本的特性，足以支撑对量子场进行基础的讨论。

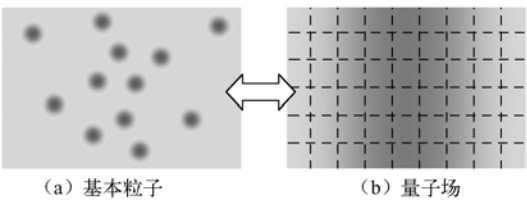


图 2.1.1 基本粒子构成的量子场

考虑由某一种基本粒子构成的场  $\varphi(x)$ ，量子场具有波粒二象性。更多以波的形式表现出来，用连续经典场描述更为适合；以粒子的形式表现出来时，则用量子场描述更为适合。为了对运动的基本粒子进行描述，必须引入广义坐标和广义速度。

### 2. 广义坐标、广义速度

假设有一个自由度为  $n$  的动力系<sup>①</sup>。  $q_i(t)$  是它的坐标 ( $i=1,2,\dots,n$ )。它们可以是一个粒子的直角坐标、球坐标或柱坐标 ( $n=3$ )；也可以是  $N$  个粒子耦合系统的坐标 ( $n=3N$ )，或者是一根绳子或一面鼓皮上各点的坐标 (自由度分别是  $\infty^1$  和  $\infty^2$ )；也可以是一个三维场各点的坐标 (自由度  $\infty^3$ )。一般  $q_i(t)$  称为动力系的广义坐标，对应的速度称为广义速度， $\dot{q}_i(t)=dq_i(t)/dt$ 。

一种基本粒子场  $\varphi(x)$  构成一个自由度为  $n$  的动力系。该场和面鼓类似，鼓面是二维振动的面，鼓面上的点可以视为两维振动曲面上的点；量子场可以视为三维振动的超曲面。同样类比鼓皮上各点的坐标，量子场三维振动的超曲面各点的坐标表征了场的位置， $\varphi_i(x)$  就是量子场动力学系统的广义坐标，广义速度为  $\dot{\varphi}_i(x)=\varphi_i(x)/dt$ 。

① 邹国兴. 量子场论导论. 科学出版社, 1980 年 2 月第 1 版, p6.

### 2.1.1 经典力学的拉格朗日形式

由于量子场是真空背景场的激发态，量子场对称性决定于真空背景场的性质。场的拉格朗日形式在对称性、量子化和相互作用中起着十分重要的作用。量子场的运动规律由拉格朗日方程来描述，为此要先建立场的拉格朗日形式，然后再利用它来研究普遍的对称性和守恒律。

从力学观点看，场是一个具有无穷多自由度的动力学体系。因此，场的拉格朗日形式可简单地通过把经典力学拉格朗日形式推广到具有无穷多自由度的系统而得到。

分析力学指出，任何力学系统都存在一个拉氏量  $L$ ，它决定系统的运动方程。考虑最简单的情况，单自由度粒子的动力学由拉氏量

$$L(t) = L(q(t), \dot{q}(t)) \quad (2.1.1)$$

确定。其中  $q(t)$  和  $\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt}$  表示粒子在  $t$  时刻的广义坐标和广义速度。相应的作用量为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt \quad (2.1.2)$$

其中积分取在从  $q(t_1)$  到  $q(t_2)$  的整个路径上。

考虑路径的一个任意变分

$$q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) + \delta q(t) \quad (2.1.3)$$

假设路径的端点是固定的，即  $q(t)|_{t_1} = q(t_1)$ ， $q(t)|_{t_2} = q(t_2)$  已给定，则体系从状态 1 过渡到状态 2 所遵循的实际路径  $q(t)$  使作用量  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt$  的变分为零。

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right) dt$$

由于起止时刻的  $q(t)$  已经给定，因而变分边值条件满足

$$\delta q|_{t_1} = \delta q|_{t_2} = 0 \quad (2.1.4)$$

把边界条件代入上式，得

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q dt \quad (2.1.5)$$

由最小作用量原理，粒子的实际运动使  $S$  取极小值。即要求  $\delta S = 0$ ，而变分的路径是任意的，得到拉格朗日运动方程体系的 Euler-Lagrange 方程组为

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (2.1.6)$$

可直接把上述单粒子的拉格朗日形式推广到多粒子体系。由  $M$  个点组成的体系是有限自由度体系，其自由度数目是  $3M$ 。该体系唯有时间  $t$  是独立变数，它有  $3M$  个广义坐标  $q_\alpha(t)$  ( $\alpha=1,2,\dots,3M$ )，是时间  $t$  的函数。 $q_\alpha(t)$  对  $t$  的导数  $\dot{q}_\alpha(t)$  称为广义动量。广义坐标  $q_\alpha(t)$  又称为所论质点系的动力变数。因此，体系的自由度数目等于它的广义坐标的数目。

对  $n$  自由度体系，其拉氏量可写为

$$L(t) = L(q_1(t), \dots, q_n(t); \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)) = L(q_\alpha(t); \dot{q}_\alpha(t)), \quad \alpha=1,2,3,\dots,n$$

相应的作用量为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha(t); \dot{q}_\alpha(t)) dt \quad (2.1.7)$$

同样由  $\delta S = 0$ ，可推得拉格朗日运动方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \quad (2.1.8)$$

从真空场的角度来理解拉格朗日运动方程：基本粒子运动实际上是物质波的传播，而波是沿短程线路径进行传播的。拉格朗日运动方程表述了物质传播所应遵循的运动规律。经典粒子的运动和光线走短程线在本质上是相同的。

### 2.1.2 场的拉格朗日形式

场量  $\varphi(x) \equiv \varphi(t, \vec{x})$  可视为真空中的四维振动超曲面，把其空间坐标  $x$  看成是自由度编号，这种编号是连续的。这种场为连续经典场，所对应的场量  $\varphi(t, \vec{x})$  则看作是广义坐标。由于所考虑的是量子场，所以要把连续的、不可数无限自由度的场近似为间断的、可数有限自由度的体系。

离散化的方法是，将空间分成  $n^3$  个小格，第  $i$  个小格的体积元记为  $\Delta v_i$ ，对应于这个小格的场的广义坐标  $\varphi_i(t)$  将取为场量  $\varphi(x)$  在这个小格中的平均值。

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{\Delta v_i} \int_{\Delta v_i} \varphi(t, \vec{x}) d^3 x \quad (2.1.9)$$

对应的广义速度是

$$\dot{\varphi}_i(t) = \frac{1}{\Delta v_i} \int_{\Delta v_i} \dot{\varphi}(t, \vec{x}) d^3 x \quad (2.1.10)$$

对于连续分布的场，有

$$\varphi(t, \vec{x} + \Delta \vec{x}) = \varphi(t, \vec{x}) + \nabla \varphi(t, \vec{x}) \cdot \Delta x \quad (2.1.11)$$

由此可求得相邻小格中场的平均值为

$$\varphi_{i+1}(t) = \varphi_i(t) + \nabla \varphi_i(t) \cdot \Delta x \quad (2.1.12)$$

可见，相邻小格的场量由该格的场量及其空间导数表示，它反映了理论的定域性。因此，可把第  $i$  个小格看成是一个子系统，其拉氏量  $L_i$  依赖于自身及其相邻小格。

$$L_i(t) = L_i(\varphi_i(t); \dot{\varphi}_i(t), \nabla \varphi_i(t)) \quad (2.1.13)$$

而

$$\mathcal{L}_i(t) = \frac{L_i(t)}{\Delta v_i} \quad (2.1.14)$$

表示第  $i$  个小格的平均拉氏量密度。取  $\Delta v_i \rightarrow 0$  时， $\mathcal{L}_i$  的极限

$$\mathcal{L}_i(x) = \lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} \mathcal{L}_i(t) = \mathcal{L}(\varphi_i(t, \vec{x}); \dot{\varphi}_i(t, \vec{x}), \nabla \varphi_i(t, \vec{x})) \equiv \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) \quad (2.1.15)$$

称为场的拉氏量密度。场的总拉氏量为

$$L_i(t) = \sum_i L_i(t) = \sum_i \mathcal{L}_i(t) \Delta v_i \quad (2.1.16a)$$

取  $\delta \varphi(x) = 0$  的连续极限得到

$$L(t) = \int \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) d^3x \quad (2.1.16b)$$

而场的作用量为

$$S = \int L(t) dt = \int \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) d^4x \quad (2.1.17)$$

可以看出,在场论中拉氏量密度 $\mathcal{L}$ 起了主要作用。

场的运动方程可从最小作用量原理推导出来。设场的边界保持不变,且在边界上场 $\delta\varphi(x)=0$ ,则由场的变分所产生的作用量的变分为

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) \right) d^4x \\ &\stackrel{\delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu (\delta \varphi)}{=} \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right) - \left( \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi \right] d^4x \\ &= \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi - \left( \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi \right] d^4x + \int \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right) d^4x \\ &\quad \text{求定积分后, 利用边界条件 } \partial_\mu \varphi = 0, \text{ 该项为 } 0 \\ &= \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \delta \varphi d^4x \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

根据最小作用量原理,  $\delta S = 0$ 。再由 $\delta\varphi$ 的任意性立刻得到场的拉格朗日运动方程:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} = 0 \quad (2.1.19)$$

可直接把上述结果推广到多分量场 $\varphi_a(x)$  ( $a=1,2,\dots,n$ ), 这时场的拉氏量密度可定义为

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\dots \varphi_\alpha(x) \dots, \dots \partial_\mu \varphi_\alpha(x) \dots) \quad (2.1.20)$$

场的拉格朗日运动方程为

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} = 0 \quad (a=1,2,\dots,n) \quad (2.1.21)$$

这就是多分量场 $\varphi_a(x)$ 的拉格朗日运动方程。该方程描述了量子场 $\varphi_a(x)$ 的运动特性。

### 2.1.3 费曼路径积分

前面讨论了量子场的拉氏量, 理论物理学是一门实验的科学, 如何把粒子的内禀结构通过实验手段表现出来。基本的过程如下:

真空基本性质—建立粒子的模型—得到粒子的内禀性质—内禀空间四动量、质量—量子场拉氏量—费曼路径积分性质—实验观测的总几率幅。

例如量子力学几率幅, 粒子从 $a$ 到 $b$ 的过程中, 从时刻 $t_a$ 的点 $x_a$ 到时刻 $t_b$ 的点 $x_b$ 的几率 $P(b,a)$ 是 $a$ 到 $b$ 的几率幅的绝对平方<sup>①</sup>:

$$P(b,a) = |K(b,a)|^2 \quad (2.1.22)$$

这个几率幅是每条路径的贡献 $\phi[x(t)]$ 之和:

① [美]R.P.费曼, A.R.西布斯 著, 张邦固, 韦秀清 译. 量子力学与路径积分. 科学出版社出版, 1986年12月第一版, p29.



$$K(b, a) = \sum_{\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的所有路径}} \phi[x(t)] \quad (2.1.23)$$

单条路径的贡献具有一个与作用量  $S$  成正比的相角:

$$\phi[x(t)] = \text{conste}^{(i/\hbar)S[x(t)]} \quad (2.1.24)$$

$$S[a, b] = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}, x, t) dt \quad (2.1.25)$$

具体可以进一步考察量子力学的路径积分形式。

量子力学系统的动力学由哈密顿  $H(p, q)$  描述, 系统的时间演化决定于薛定谔方程:

$$i \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H(p, q) \psi(t) \quad (2.1.26)$$

此方程的形式解可表示为

$$\psi(t) = U(t'', t') \psi(t') \quad (2.1.27)$$

其中,

$$U(t'', t') = \exp[-iH \cdot (t'' - t')] \quad (2.1.28)$$

称为演化算符。而系统的位置几率跃迁振幅可表示为

$$\langle q'' | U(t'', t') | q' \rangle = \langle q'' | \exp[-iH \cdot (t'' - t')] | q' \rangle \equiv \langle q'', t'' | q', t' \rangle \quad (2.1.29)$$

其中  $|q\rangle$  和  $|q, t\rangle$  分别是薛定谔绘景和海森堡绘景中的坐标本征矢。

现在要把式 (2.1.29) 表示为路径积分形式。注意到系统在固定时刻  $t_i$  以不同的几率位于坐标为  $q$  的点, 但必位于其中的某一点, 故有

$$\int dq |q, t_i\rangle \langle q, t_i| = 1 \quad (2.1.30)$$

把  $t'$  到  $t''$  的时间间隔等分为  $n+1$  段, 设每段的长为  $\tau$ , 对每一个  $t_i (i=1, 2, \dots, n)$  使用式 (2.1.30), 有

$$\tau = \frac{t'' - t'}{n}, \quad t' = t_0 \quad \begin{array}{c} | \\ \hline t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad \cdots \quad t_{n-2} \quad t_{n-1} \quad t_n = t'' \end{array} \rightarrow$$

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = \int dq_1 \cdots dq_n \langle q'', t'' | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \cdots \langle q_1, t_1 | q', t' \rangle \quad (2.1.31)$$

利用式 (2.1.29), 对右边积分中任一小跃迁振幅计算可得

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle &= \langle q_{j+1} | \exp(-iH\tau) | q_j \rangle = \langle q_{j+1} | 1 - iH\tau + O(\tau^2) | q_j \rangle \\ &= \underbrace{\delta(q_{j+1} - q)}_{(1)} - i\tau \underbrace{\langle q_{j+1} | H | q_j \rangle}_{(2)} \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

$$\begin{aligned} \delta(q_{j+1} - q) &= \int \frac{dp}{2\pi} \exp[ip(q_{j+1} - q)] - i\tau \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle \\ &\quad \tau \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle \end{aligned}$$

通常,  $H(p, q)$  具有形式:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (2.1.33)$$

利用

$$\langle q | p \rangle = (2\pi)^{-1/2} \exp(ip \cdot q) \quad (2.1.34)$$

可得

$$\begin{aligned}
 \langle q_{j+1} | \frac{p^2}{2m} | q_j \rangle &= \int dp' dp \langle q_{j+1} | p' \rangle \langle p' | \frac{p^2}{2m} | p \rangle \langle p | q_j \rangle \\
 &= \int \frac{dp' dp}{2\pi} \exp[ip' q_{j+1}] \frac{p^2}{2m} \langle p' | p \rangle \exp[-ip q_j] \\
 &= \int \frac{dp' dp}{2\pi} \exp[ip' q_{j+1} - ip q_j] \frac{p^2}{2m} \delta(p - p') \\
 &= \int \frac{dp}{2\pi} \exp[ip(q_{j+1} - q_j)] \frac{p^2}{2m}
 \end{aligned} \tag{2.1.35}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}
 \langle q_{j+1} | V(q) | q_j \rangle &= V(q) \delta(q_{j+1} - q_j) \\
 &= \int \frac{dp}{2\pi} \exp[ip(q_{j+1} - q_j)] V(q_j)
 \end{aligned} \tag{2.1.36}$$

注意, 式 (2.1.35) 和式 (2.1.36) 右边的  $\frac{p^2}{2m}$  和  $V(q_j)$  已是普通的数。结合上两式得到

$$\langle q_{j+1} | H | q_j \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \exp[ip(q_{j+1} - q_j)] H(p, q_j) \tag{2.1.37}$$

把它代入式 (2.1.32) 得到

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | H | q_j, t_j \rangle = \int \frac{dp_j}{2\pi} \exp \left\{ ip_j [(q_{j+1} - q_j) - \tau H(p, q_j)] \right\} \tag{2.1.38}$$

把它代入式 (2.1.31) 并取连续极限即得位置几率跃迁振幅的路径积分形式:

$$\begin{aligned}
 \langle q'', t'' | q', t' \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^n dq_j \prod_{j=1}^{n+1} \frac{dp_j}{2\pi} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^{n+1} [p_j (q_{j+1} - q_j) - \tau H(p_j, q_j)] \right\} \\
 &= \int \mathcal{D}q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi} \exp \left\{ i \int_{t'}^{t''} dt [p_j \dot{q} - H(p, q)] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.1.39}$$

上式中的积分是无穷维的, 称为泛函积分, 积分变量是两个函数  $q(\tau)$  和  $p(\tau)$ 。

考虑 Legendre 变换:

$$L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) = p(\tau) \dot{q}(\tau) - H(p, q) = \frac{1}{2} m (\dot{q}(\tau))^2 - V(q(\tau))$$

作用量:

$$\begin{aligned}
 S[p(\tau), q(\tau)] &= \int_{t'}^{t''} [p(\tau) \dot{q}(\tau) - H(p, q)] dt = \int_{t'}^{t''} L(p(\tau), q(\tau)) dt \\
 \langle q'', t'' | q', t' \rangle &= \int \mathcal{D}q \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi} \exp \left\{ i S[p_j(\tau), \dot{q}(\tau)] \right\}
 \end{aligned}$$

如果  $H$  取通常的式 (2.1.33) 形式, 则式 (2.1.39) 中对  $p_j$  的积分可以完成, 利用高斯积分公式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi} \exp \left\{ i \left[ p_j \dot{q} - \frac{\tau}{2m} p_j^2 \right] \right\} = \left( \frac{m}{2\pi i \tau} \right)^{1/2} \exp \left( i \tau \frac{m}{2} \dot{q}^2 \right) \tag{2.1.40}$$

式 (2.1.39) 可化为

$$\begin{aligned}
\langle q'', t'' | q', t' \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \tau} \right)^{1/2} \int \prod_{j=1}^n \frac{dq_j}{(2\pi i \tau / m)^{1/2}} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^{n+1} \tau \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{\tau} \right)^2 - V(q_j) \right] \right\} \\
&= N \int \mathcal{D}q \exp \left[ i \int_{t'}^{t''} dt L(q, \dot{q}) \right] \\
&= N \int \mathcal{D}q \exp(iS)
\end{aligned} \tag{2.1.41}$$

其中,  $L(q, \dot{q})$  是经典拉氏量,  $S$  是经典作用量,  $N$  是个无穷大的归一化常数。由于处理的总是归一化的跃迁振幅,  $N$  的大小是无关紧要的。

综合上述, 考虑费曼路径积分, 场作用量可粗略地写为<sup>①</sup>

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = N \int e^{i \int^{L[\psi]} \mathcal{D}\psi} \tag{2.1.42}$$

由于场作用量可粗略地写为  $\int e^{i \int^{L[\psi]} \mathcal{D}\psi}$ , 于是量子场的作用量可重新表述为

$$\begin{aligned}
\langle q'', t'' | q', t' \rangle &= N \int e^{i \int \frac{1}{2} [(\varepsilon^0 x_0)^2 - (\varepsilon^1 x_1)^2 - \dots - (\varepsilon^N x_N)^2] \varphi(x)} \mathcal{D}\psi \\
&= N \int e^{i \int \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi(x) \partial_\nu \varphi(x)} \mathcal{D}\psi
\end{aligned} \tag{2.1.43}$$

对于反物质而言, 量子场的作用量可表述为

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = N \int e^{i \int \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{\varphi}(x) \partial_\nu \bar{\varphi}(x)} \mathcal{D}\psi \tag{2.1.44}$$

上述对真空场的基本思想做了大致的介绍, 由此知求解拉氏量密度  $L$  是确定量子场运动方程的核心。对于上式的  $e^{i \int^{L[\psi]}}$ , 考虑由  $j$  个粒子构成的场可以近似地写为

$$\exp(i \sum_N L_j[\psi]) = \exp i L_1[\psi] \cdot \exp i L_2[\psi] \cdots \exp i L_j[\psi] \cdots \exp i L_N[\psi] \tag{2.1.45}$$

对于每一个单一粒子而言,  $\exp i L_j[\psi]$  被解释为场  $\psi$  的形变所构成的场函数。

## 2.2 真空背景场的对称性与守恒定律

物理学理论的发展使人们认识到: 自然界的所有守恒定律均分别联系于某种对称性。每一条守恒定律均分别以某种对称性作为它更深一层的物理原因。例如, 空间平移对称性表现为动量守恒定律, 时间平移对称性联系于能量守恒定律, 等等。而空间平移对称性和时间平移对称性及空间转动对称性则源自于真空场的性质, 量子场的真空背景场具有良好的均匀性及对称性是能量、动量、角动量守恒的真空场解释。

### 2.2.1 真空背景场的对称性

为了直观地了解时空平移不变性, 下面从量子力学的层面来理解这一问题<sup>②</sup>。

① QUANTUM FIELD THEORY Notes taken from a course of R. E. Borcherds, Fall 2001, Berkeley Richard E. Borcherds, Mathematics department, Evans Hall, UC Berkeley, CA 94720, U.S.A. e-mail: reb@math.berkeley.edu, arXiv:math-ph/0204014 v1 8 Apr 2002, Pag4.

② 相关的数学推导源自于云南师范大学物理系李江淮教授 2006 年研究生课程的讲课内容。

## 1. 守恒物理量

满足

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = 0 \quad (2.2.1)$$

条件的  $\hat{A}$  为守恒量。由量子力学知, 算符  $\hat{A}$  作用量的平均值为

$$\bar{A} = \int \psi^*(t, \vec{x}) \hat{A}(\vec{x}, \vec{p}) \psi(t, \vec{x}) \quad (2.2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}}{dt} &= \int \psi^* \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \psi dx + \int \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \hat{A} \psi dx + \int \psi^* \hat{A} \frac{\partial \psi}{\partial t} dx \\ &\stackrel{\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \psi}{=} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar} \int \hat{H}^* \psi^* \hat{A} \psi dx + \frac{1}{i\hbar} \int \psi^* \hat{A} \hat{H} \psi dx = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] \\ &\stackrel{\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} (\hat{H} \psi)^*}{=} \\ &\stackrel{\text{由守恒条件 } \frac{d\bar{A}}{dt} = 0}{=} \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] = 0 \end{aligned}$$

得到守恒条件:

$$[\hat{A}, \hat{H}] = 0 \quad (2.2.3)$$

## 2. 时间平移对称性与能量守恒

薛定谔方程为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \hat{H} \psi(t, \vec{x}) \quad (2.2.4)$$

$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = \hat{H}$  与时间无关,

$t' = t + \Delta t, \quad \Delta t \rightarrow 0$

$\psi(t, \vec{x})$  时间平移后, 为  $\psi'(t', \vec{x})$ 。

$$\begin{aligned} \psi'(t', \vec{x}) &= \psi(t - \Delta t, \vec{x}) \stackrel{\text{泰勒展开}}{=} \psi(t, \vec{x}) + (-\Delta t) \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) \\ &= (1 - \Delta t \frac{\partial}{\partial t}) \psi(t, \vec{x}) \stackrel{\Delta t \rightarrow 0}{=} \exp\left(-\Delta t \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi(t, \vec{x}) = \exp(-\Delta t \vec{T}) \psi(t, \vec{x}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{i\hbar} \Delta t \hat{E}\right) \psi(t, \vec{x}) = \hat{D}_t \psi(t, \vec{x}) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

这里,  $\vec{T} = \frac{\partial}{\partial t}$  是时间的坐标基。从真空场的角度来看, 具有这样的图像: 场  $\psi(t, \vec{x})$  变为  $\psi'(t', \vec{x})$  时, 对于量子场而言,  $\psi(t, \vec{x})$  的中心点沿  $\vec{T}$  方向移动  $\Delta t$ , 变为  $\psi'(t', \vec{x})$ , 时间发生平移

$$\psi'(t', \vec{x}) = \hat{D}_t \psi(t, \vec{x}) \quad (2.2.6)$$

令  $\hat{D}_t$  为时间平移算符:

$$\hat{D}_t = 1 - \frac{1}{i\hbar} \Delta t \hat{E} \quad (2.2.7)$$

$\Delta t$  是  $\psi(t, \vec{x})$  变为  $\psi'(t', \vec{x})$  需要的时间, 作用于式 (2.2.4)。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{D}_t \psi(t, \vec{x}) = \hat{D}_t \hat{H} \hat{D}_t^{-1} \psi'(t', \vec{x})$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi'(t', \vec{x}) = \hat{D}_t \hat{H} \hat{D}_t^{-1} \psi'(t', \vec{x}) \Rightarrow \hat{H} = \hat{D}_t \hat{H} \hat{D}_t^{-1} \Rightarrow \hat{D}_t \hat{H} = \hat{H} \hat{D}_t$$

得

$$[\hat{D}_t, \hat{H}] = 0 \quad (2.2.8)$$

$$\left[1 - \frac{1}{i\hbar} \Delta t \hat{E}, \hat{H}\right] = 0 \Rightarrow -\frac{1}{i\hbar} \Delta t [\hat{E}, \hat{H}] = 0 \Rightarrow [\hat{E}, \hat{H}] = 0$$

即

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = 0 \quad (2.2.9)$$

能量守恒，场  $\psi(t, \vec{x})$  的能量（量子场能量在真空场中的定义是场四维形变量  $\psi(t, \vec{x})$  随生成时间的变化率）不随时间改变，说明背景真空场时间维度具有均匀性。

### 3. 空间平移对称性与动量守恒

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (2.2.10)$$

$$x' = x + \Delta x, \quad \Delta x \rightarrow 0$$

$\psi(t, \vec{x})$  空间平移后，为  $\psi'(t, \vec{x}')$ ，即

$$\psi'(t', \vec{x}) = \psi(t, \vec{x}) \quad (2.2.11)$$

$$\psi'(t', \vec{x}) = \psi(t, \vec{x} + \Delta \vec{x}) \stackrel{\text{泰勒展开}}{=} \psi(t, \vec{x}) + (-\Delta t) \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x})$$

$$= \left(1 - \Delta x \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(t, \vec{x}) \stackrel{\Delta x \rightarrow 0}{=} \exp\left(-\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(t, \vec{x}) = \exp(-\Delta x \vec{X}) \psi(t, \vec{x}) \quad (2.2.12)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{i\hbar} \Delta x \cdot \hat{\vec{p}}\right) \psi(t, \vec{x}) = \hat{D}_{\vec{x}} \psi(t, \vec{x})$$

这里， $\vec{X} = \vec{\nabla}$  是空间的坐标基。具有这样的图像：场  $\psi(t, \vec{x})$  变为  $\psi'(t, \vec{x}')$  时，对于量子场而言， $\psi(t, \vec{x})$  的中心点沿  $\vec{X}$  方向移动  $\Delta \vec{x}$ ，变为  $\psi'(t, \vec{x}')$ ，空间发生平移

$$\psi'(t', \vec{x}) = \hat{D}_t \psi(t, \vec{x}) \quad (2.2.13)$$

令  $\hat{D}_{\vec{x}}$  为空间平移算符：

$$\hat{D}_{\vec{x}} = 1 - \frac{1}{i\hbar} \Delta \vec{x} \cdot \hat{\vec{p}} \quad (2.2.14)$$

作用于式 (2.2.4)。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \hat{D}_{\vec{x}} \psi(t, \vec{x}) = \hat{D}_{\vec{x}} \hat{H} \hat{D}_{\vec{x}}^{-1} \psi'(t, \vec{x}')$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi'(t, \vec{x}') = \hat{D}_t \hat{H} \hat{D}_t^{-1} \psi'(t, \vec{x}') \Rightarrow \hat{H} = \hat{D}_{\vec{x}} \hat{H} \hat{D}_{\vec{x}}^{-1} \Rightarrow \hat{D}_{\vec{x}} \hat{H} = \hat{H} \hat{D}_{\vec{x}}$$

得

$$[\hat{D}_{\vec{x}}, \hat{H}] = 0 \quad (2.2.15)$$

$$\left[1 - \frac{1}{i\hbar} \Delta x \cdot \vec{p}, \hat{H}\right] = 0 \Rightarrow -\frac{1}{i\hbar} \Delta x [\hat{p}, \hat{H}] = 0 \Rightarrow [\hat{p}, \hat{H}] = 0$$

即

$$\frac{d\bar{\vec{p}}}{dt} = 0 \quad (2.2.16)$$

动量守恒，场 $\psi(t, \vec{x})$ 的动量（量子场动量在真空场中的定义是场四维形变量 $\psi(t, \vec{x})$ 随空间的变化率）不随空间改变，说明背景真空场空间维度具有均匀性。

#### 4. 空间转动对称性与角动量守恒

考虑空间发生一个微小的转动：

$$\Delta\vec{\varphi} = \Delta\varphi \vec{n} \quad (2.2.17)$$

与 $\vec{n}$ 垂直的转动平面（转动角 $|\Delta\vec{\varphi}| = \Delta\varphi$ ）， $\vec{n} \perp \vec{x}$ ， $\vec{n} \perp \vec{x}'$ ， $\vec{n} \perp \Delta\vec{x}$ ，

$$\Delta\vec{x} = \Delta\vec{\varphi} \times \vec{x} \quad (2.2.18)$$

$$|\Delta\vec{x}| = \Delta\varphi |\vec{x}| \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{|\Delta\vec{x}|}{|\vec{x}|}$$

$$|\Delta\vec{x}| = |\Delta\vec{\varphi}| |\vec{x}| \sin\theta$$

$$L(\Delta\vec{\varphi} \wedge \vec{x}) = L(\vec{n} \wedge \vec{x}) = \theta$$

$$\Delta\varphi = \frac{|\vec{y}' - \vec{y}|}{|\vec{y}|} = \frac{|\Delta\vec{x}|}{|\vec{x}| \sin\theta} \quad (2.2.19)$$

$$\varphi'(t, \vec{x}') = \varphi(t, \vec{x}) \quad (2.2.20)$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \Delta\vec{x} = \vec{x} + \Delta\vec{\varphi} \times \vec{x} = \vec{x} + \Delta\varphi \vec{n} \times \vec{x}$$

$$\varphi'(t, \vec{x}) = \varphi(t, \vec{x} - \Delta\vec{x})$$

$$= \varphi(t, \vec{x}) + (-\Delta\vec{x}) \cdot \nabla \varphi(t, \vec{x}) = \varphi(t, \vec{x}) - \Delta\varphi (\vec{n} \times \vec{x}) \cdot \nabla \varphi(t, \vec{x})$$

$$\stackrel{\hat{\vec{p}} = -i\hbar \nabla}{=} \left[ 1 + \frac{1}{i\hbar} \Delta\varphi (\vec{n} \times \hat{\vec{x}}) \cdot \hat{\vec{p}} \right] \varphi(\vec{x}, t) \stackrel{(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})}{=} \stackrel{(\vec{n} \times \vec{x}) \cdot \hat{\vec{p}} = \vec{n} \cdot (\vec{x} \times \hat{\vec{p}})}{=} \left[ 1 + \frac{1}{i\hbar} \Delta\varphi \vec{n} \cdot (\hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}) \right] \varphi(\vec{x}, t)$$

$$\stackrel{\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}}{=} \left[ 1 + \frac{1}{i\hbar} \Delta\varphi \vec{n} \cdot \hat{\vec{L}} \right] \varphi(\vec{x}, t) \quad (2.2.21)$$

令转动算符 $\hat{R} = 1 + \frac{1}{i\hbar} \Delta\varphi \vec{n} \cdot \hat{\vec{L}}$ ， $\varphi'(t, \vec{x}) = \hat{R} \varphi(t, \vec{x})$ ， $\hat{R}$ 作用于薛定谔方程：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{R} \varphi(t, \vec{x}) = \hat{R} \hat{H} \hat{R}^{-1} \varphi'(t, \vec{x}) \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi'(t, \vec{x}) = \hat{H} \varphi'(t, \vec{x})$$

算符满足 $[\hat{R}, \hat{H}] = 0$ ，即

$$[\hat{R}, \hat{H}] = [1, \hat{H}] + \frac{1}{i\hbar} \Delta\varphi \vec{n} \cdot [\hat{\vec{L}}, \hat{H}] = 0 \Rightarrow [\hat{\vec{L}}, \hat{H}] = 0$$

$$\frac{d\hat{\vec{L}}}{dt} = 0 \quad (2.2.22)$$

空间各向同性导致角动量守恒。

量子场真空背景场具有良好的均匀性，使得量子场具有时间平移对称性、空间平移对称性和空间转动对称性。为了进一步理解守恒定律，有必要从量子场论的层面来理解这一问题。

## 2.2.2 奈特定理

拉格朗日形式为研究场系统在连续变换下的对称性提供了一个方便而又完整的方法，其结果可表述为奈特定理：

如果作用量  $S$  在关于时空坐标  $x^\mu$  和场量  $\varphi_\alpha(x)$  的某种连续变换下是不变的，则一定存在着相应的守恒律和守恒量。

下面用两种方法来证明奈特定理，并分别导出微分形式的守恒定律和积分形式的守恒定律。

### 1. 微分形式的守恒定律的证明

考虑使时空坐标  $x$  和场量  $\varphi(x)$  有一无限小改变：

$$\begin{cases} x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \\ \varphi_\alpha(x) \rightarrow \varphi'_\alpha(x') = \varphi_\alpha(x) + \delta \varphi_\alpha(x) \end{cases} \quad (2.2.23)$$

$\delta \varphi_\alpha(x)$  通常称为全变分。它可以分解为两部分：

$$\begin{aligned} \delta \varphi_\alpha(x) &= \varphi'_\alpha(x') - \varphi_\alpha(x) \\ &= \varphi'_\alpha(x') - \varphi_\alpha(x') + \varphi_\alpha(x') - \varphi_\alpha(x) \\ &= \delta_\alpha \varphi_\alpha + \delta_x \varphi_\alpha \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

这里所表示的泛函变分包含了两方面的贡献：其一来源于单纯场量的改变，其二由坐标变换所引起。其中，

$$\delta_\alpha \varphi_\alpha = \varphi'_\alpha(x') - \varphi_\alpha(x') \quad (2.2.25)$$

是由场量自身的改变所引起的，为泛函变分，如图 2.2.1 所示。

$$\begin{aligned} \delta_x \varphi_\alpha &= \varphi_\alpha(x') - \varphi_\alpha(x) \\ &= \partial_\mu \varphi_\alpha \delta x^\mu \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

是单纯由时空坐标改变所引起的，是通常的函数微分，如图 2.2.2 所示。

在变换 (2.2.23) 下，作用量的变分是

$$\delta S = \int_{R'} \mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x'), \partial'_\mu \varphi'_\alpha(x')) d^4 x' - \int_R \mathcal{L}(\varphi_\alpha(x), \partial_\mu \varphi_\alpha(x)) d^4 x \quad (2.2.27)$$

$$\delta S = \int_R \left( \delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu \right) d^4 x \quad (2.2.28)$$

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x'), \partial'_\mu \varphi'_\alpha(x')) - \mathcal{L}(\varphi_\alpha(x), \partial_\mu \varphi_\alpha(x)) \quad (2.2.29)$$

它可以分解为两部分

$$\delta \mathcal{L} = \delta_\varphi \mathcal{L} + \delta_x \mathcal{L} \quad (2.2.30)$$

$$\begin{aligned} \delta_x \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\varphi_\alpha(x'), \partial'_\mu \varphi_\alpha(x')) - \mathcal{L}(\varphi_\alpha(x), \partial_\mu \varphi_\alpha(x)) \\ &= (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

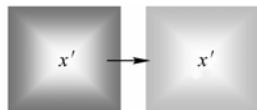


图 2.2.1 场量自身的改变

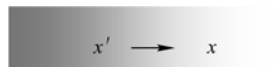


图 2.2.2 时空坐标改变

$$\begin{aligned}
\delta_\varphi \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x'), \partial'_\mu \varphi'_\alpha(x')) - \mathcal{L}(\varphi_\alpha(x'), \partial'_\mu \varphi_\alpha(x')) \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} \delta_\varphi \varphi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \delta_\varphi (\partial_\mu \varphi_\alpha) \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} \delta_\varphi \varphi_\alpha + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \delta_\varphi \varphi_\alpha \right) - \left( \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \right) \delta_\varphi \varphi_\alpha \\
&= \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \right) \delta_\varphi \varphi_\alpha + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \delta_\varphi \varphi_\alpha \right) \\
&= \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \delta_\varphi \varphi_\alpha \right) \tag{2.2.32}
\end{aligned}$$

$$\delta S = \int_R \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \delta_\varphi \varphi_\alpha + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) d^4 x \tag{2.2.33}$$

利用式 (2.2.24) 和式 (2.2.26), 并记

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi_\alpha - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{2.2.34}$$

再次利用式 (2.2.24) 和式 (2.2.26), 可把式 (2.2.33) 改写为

$$\delta S = \int_R \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \delta \varphi_\alpha + T^{\mu\nu} \delta x_\nu \right) d^4 x \tag{2.2.35}$$

$\delta x_\nu$ ,  $\delta \varphi_\alpha$  可由  $l$  个无穷小参数  $\omega_\beta$  (与  $x$  无关,  $\beta=1,2,\dots,l$ ) 表征的线性变换来表示:

$$\delta x_\nu = X_\nu^\beta \omega_\beta, \quad \delta \varphi_\alpha = \Psi_\alpha^\beta \omega_\beta \tag{2.2.36}$$

把式 (2.2.36) 代入式 (2.2.35), 并记

$$J^{\mu\beta} = T^{\mu\nu} X_\nu^\beta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \Psi_\alpha^\beta \tag{2.2.37}$$

$J^{\mu\beta}$  称为奈特流, 可得

$$\delta S = -\omega_\beta \int_R \partial_\mu J^{\mu\beta} dx \tag{2.2.38}$$

当四维时空经受无穷小的连续变换  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$  时, 场函数经过相应的线性变换  $\varphi_\alpha(x) \rightarrow \varphi'_\alpha(x') = \varphi_\alpha(x) + \delta \varphi_\alpha(x)$ , 场的 Lagrange 函数密度保持不变, 即

$$\mathcal{L}(\varphi_\alpha(x'), \partial'_\mu \varphi_\alpha(x')) = \mathcal{L}(\varphi_\alpha(x), \partial_\mu \varphi_\alpha(x)) \tag{2.2.39}$$

就是说场的运动规律在变换式 (2.2.23) 之下具有不变性。在条件式 (2.2.39) 之下, 若再假定四维时空经受无穷小的连续变换  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  的 Jacobi 行列式  $\left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| = 1$ , 则场系统作用量是不变的, 即

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_R d^4 x' \mathcal{L}(\varphi'_\alpha(x'), \partial'_\mu \varphi'_\alpha(x')) - \int_R d^4 x \mathcal{L}(\varphi_\alpha(x), \partial_\mu \varphi_\alpha(x)) \\
&= \int_R \left| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right| d^4 x \mathcal{L}(\varphi_\alpha(x), \partial_\mu \varphi_\alpha(x)) - \int_R d^4 x \mathcal{L}(\varphi_\alpha(x), \partial_\mu \varphi_\alpha(x)) = 0 \tag{2.2.40}
\end{aligned}$$

任一个有限的时空连续变换都是无数个无穷小变换的连续施行, 故若把式 (2.2.23) 代之以有限变换, 上面的陈述依然是成立的。把式 (2.2.38) 代入式 (2.2.40), 得



$$\partial_\mu J^{\mu\beta} = 0 \quad (2.2.41)$$

这就是微分形式的守恒定律。

## 2. 积分形式的守恒定律的证明

把式 (2.2.38) 式转变为  $J^{\mu\beta}$  沿  $\Sigma$  的面积分, 即

$$\delta S = -\omega_\beta \int_R \partial_\mu J^{\mu\beta} d^4x = -\omega_\beta \int_\Sigma J^{\mu\beta} d^3\sigma = -\omega_\beta \sum_{j=1}^3 \int_{\Sigma_j} J^{j\beta} d^3\sigma_j - \omega_\beta \int_{\Sigma_0} J^{0\beta} d^3\sigma_0$$

因为空间区域  $R$  的每一对界面中的两个平面具有相反的法线方向, 而且场在  $R$  的边界面上满足周期边界条件, 故  $\sum_{j=1}^3 \int_{\Sigma_j} J^{j\beta} d^3\sigma_j = 0$ 。考虑到  $t=t_1$  平面和  $t=t_2$  平面法线方向相反, 这样, 上式右边只有第二项积分也为零, 注意  $\Sigma_0 = V$  是通常的三维体积。

$$-\omega_\beta \left( \int_V J^{0\beta} d^3x \Big|_{t=t_1} - \int_V J^{0\beta} d^3x \Big|_{t=t_2} \right) = 0 \quad (2.2.42)$$

定义奈特荷为

$$Q^\beta(t) = \int_V J^{0\beta} d^3x \quad (2.2.43)$$

上式可写为

$$\delta S = -\omega_\beta (Q^\beta(t_1) - Q^\beta(t_2)) \quad (2.2.44)$$

由  $\delta S = 0$  得到积分形式的守恒定律为

$$Q^\beta(t_1) = Q^\beta(t_2) \quad (2.2.45)$$

### 2.2.3 时空平移不变性和能量动量守恒

无穷小时空平移变换可表示为

$$x^\nu \rightarrow x'^\nu = x^\nu + \omega^\nu \quad (2.2.46)$$

其中  $\omega^\nu$  为与时空无关的无穷小参量。这时有

$$\delta x_\nu = \omega_\nu = g_\nu^\beta \omega_\beta \quad (2.2.47)$$

从时空均匀性知  $\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = \Phi(x)$ , 可得

$$\delta \varphi_a = \varphi'_a(x') - \varphi_a(x) = 0 \quad (2.2.48)$$

把它们与式 (2.2.36) 对照, 即得现在的  $X_\nu^\beta$  和  $\Psi_a^\beta$  为

$$X_\nu^\beta = g_\nu^\beta, \Psi_a^\beta = 0 \quad (2.2.49)$$

把它代入式 (2.2.37) 并由式 (2.2.34) 得到奈特流为

$$J^{\mu\beta} = T^{\mu\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_\alpha)} \partial^\beta \varphi_\alpha - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.2.50)$$

相应的奈特荷可从式 (2.2.39) 得到, 记为  $P^\nu$ :

$$Q^\nu(t) = P^\nu = \int J^{0\nu} d^3x = \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} \partial^\nu \varphi_\alpha - g^{0\nu} \mathcal{L} \right) d^3x \quad (2.2.51)$$

它是守恒的。 $P^\nu$  就是场的能量动量四矢量, 能量动量组成一个洛伦兹四矢量。 $T^{\mu\nu}$  为能量动量张量。为了说明  $P^\nu$  就是场的能量动量四矢量, 只需说明  $P^\nu$  的零分量是场的能量。事实

上, 由式 (2.2.48) 有

$$P^\nu = \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} \partial^\nu \varphi_\alpha - \mathcal{L} \right) d^3x \quad (2.2.52)$$

把它与多粒子系统的哈密顿函数  $H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L$  比较, 即知  $P^0$  就是场系统的总能量或哈密顿, 而

$$\mathcal{H} = T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} \partial^0 \varphi_\alpha - \mathcal{L} \quad (2.2.53)$$

是场的能量密度或哈密顿密度。

## 2.2.4 洛伦兹不变性和角动量守恒

无限小洛伦兹变换可表示为

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_{\mu\nu} x^\nu \quad (2.2.54)$$

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = \Phi(x), \quad \Delta \Phi(x) = 0 \quad (2.2.55)$$

这里  $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$ , 由式 (2.2.55) 及式 (2.2.35) 有

$$0 = \int_R \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \delta \varphi_\alpha + T^{\mu\nu} \delta x_\nu \right) d^4x \quad (2.2.56)$$

$$T^{\mu\nu} \delta x_\nu = 0 \quad (2.2.57)$$

由 (2.2.54) 知

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} \delta x_\nu &= T^{\mu\nu} \varepsilon_{\nu\lambda} x^\lambda = \frac{1}{2} [T^{\mu\nu} x^\lambda - T^{\mu\lambda} x^\nu] \varepsilon_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} M^{\mu\nu\lambda} \\ M^{\mu\nu\lambda} &= T^{\mu\nu} x^\lambda - T^{\mu\lambda} x^\nu \end{aligned} \quad (2.2.58)$$

得到

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\lambda} = 0$$

即角动量守恒。

从上述的讨论可知, 真空背景场具有时空移动不变性且各向同性。真空背景场的这种良好的性质使得物质世界得以存在, 而不致混乱。

## 第3章 正则量子化和粒子解释

每一种量子场都是由相应的基本粒子构成的。对于真空量子场而言，可以把基本粒子的内禀自由度性质归并在粒子内禀空间的中心点上，真空量子场仍然可以用点粒子理论进行描述，点粒子理论是场量子化的基本出发点。

### 3.1 场量子化的物理图像

#### 3.1.1 算符的对易关系的物理意义

坐标  $x^i$  和动量  $p_i$  可用坐标算符  $\hat{x}^i$  和动量算符  $\hat{p}_i$  代替， $\hat{p}_i$  是个微分算符， $\hat{x}^i$  对波函数的作用是相乘，对于任一波函数  $\psi$ ，有

$$\begin{aligned}\hat{x}^i \hat{p}_i \psi &= \frac{\hbar}{i} x^i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ \hat{p}_i \hat{x}^i \psi &= \frac{\hbar}{i} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} (x^i \psi) = \frac{\hbar}{i} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \psi + \hbar \psi\end{aligned}$$

这两个结果并不相同，且

$$\hat{x}^i \hat{p}_i \psi - \hat{p}_i \hat{x}^i \psi = i\hbar \psi \quad (3.1.1)$$

上述关系的物理图像是什么呢？

在量子场中，定义  $\vec{\lambda}$  为坐标空间的切向量， $\vec{p}$  为动量空间的切向量。如图 3.1.1 所示， $d/d\lambda$  的积分曲线为  $x(\lambda)$ ， $d/dk$  的积分曲线为  $\lambda(k)$ 。

$$\vec{\lambda} = x \frac{\partial}{\partial \lambda} = x \vec{e}_x = \frac{d\lambda}{dk} \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{d}{dk} \quad (3.1.2)$$

$$\vec{p} = p \frac{\partial}{\partial x} = p \vec{e}_p = \frac{dx}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\lambda} \quad (3.1.3)$$

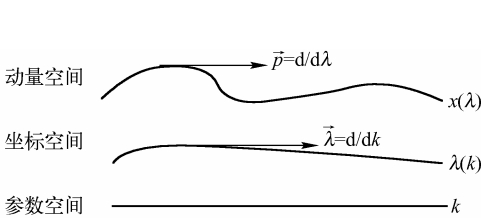


图 3.1.1 参数空间切向量

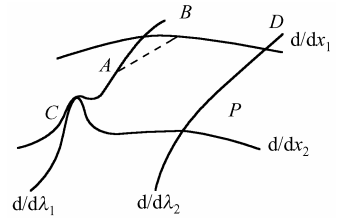


图 3.1.2 对易关系的物理意义

有

$$\begin{aligned}x^i(B) - x^i(A) &= [e^{\varepsilon d/d\lambda}, e^{\varepsilon d/dk}] x^i|_p \\ [e^{\varepsilon d/d\lambda}, e^{\varepsilon d/dk}] x^i &= \left[ 1 + \varepsilon \frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{d^2}{d\lambda^2} + 0(\varepsilon^3), 1 + \varepsilon \frac{d}{dk} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{d^2}{dk^2} + 0(\varepsilon^3) \right] x^i\end{aligned}$$

$$x^i(B) - x^i(A) = \{\varepsilon^2[\vec{\lambda}, \vec{p}] + O(\varepsilon^3)\}x^i \Big|_p \quad (3.1.4)$$

正好就是  $\vec{\lambda}$ ,  $\vec{p}$  组成的不完整四边形的开部, 就是量子场时空总的形变量  $\hbar$ , 如图 3.1.2 所示。由于量子场的存在, 沿  $d/d\lambda_1$  和  $d/d\lambda_2$  要走一段曲线, 而这正好就是真空场中光子的场的最大形变量  $\hbar$ , 采用里括号以后, 可以扣除背景场中的场形变部分, 于是有这样的表述:  $[x^i, p_i] \equiv i\hbar$  可以适用于更宽的范围。

### 3.1.2 量子场算符的对易关系

对于场取极限  $n \rightarrow \infty$ , 就得到场量, 空间每一点的场被考虑为一个独立的广义坐标。在经典物理中这种极限的一个简单例子是有重量的振动弦。对于弦上  $N$  个有限数目的珠子, 需要解  $N$  个耦合的振子运动方程; 在  $N \rightarrow \infty$  的极限下, 达到连续弦的极限, 由位移场  $\varphi(t, x)$  来描述, 它作为弦上位置  $x$  和时间  $t$  的函数而连续地变化。 $\varphi$  的数值度量了弦上  $x$  点在  $t$  时刻偏离静止位置的幅度; 它的时间导数  $\partial\varphi(t, x)/\partial t$  则度量了它在  $(t, x)$  的速度。按照这种类比, 运用正则形式, 我们预期  $\varphi(x)$  起着坐标  $q(t)$  的作用而  $\partial\varphi(t, x)/\partial t$  对应于  $\dot{q}(t)$ 。与有重量的振动弦不同的是, 在量子场中 (考虑单一粒子), 量子场被理解为点在时空中的振动。

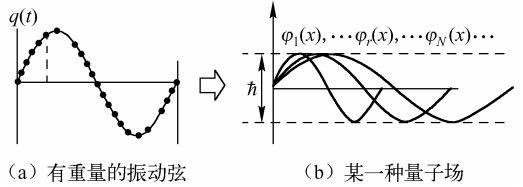


图 3.1.3  $\varphi_r(x)$  被看作为该力学体系的广义坐标

场量是通过它与粒子相互作用来观测的, 而电子的动量和位置是满足测不准关系的, 同时电子和电磁场相互作用时, 其总动量守恒。因此, 要保持量子理论的内部协调, 电磁场的动量能量和空间位置应有相应的测不准关系。同样其他场也都应该满足相应的测不准关系, 这一点也得到实验的支持。

测不准关系本质上源自于单量子场的时空形变总量  $\hbar$ 。量子力学中, 坐标算符  $\hat{x}$  和动量算符  $\hat{p}_x$  满足  $[\hat{x}, \hat{p}_x] \equiv \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar$  该式和经典场量子化条件  $[\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i(\hbar)\delta_{\alpha\beta}$  相对应, 推广到离散形式下的量子场对应  $[\varphi_i, p_j] = i(\hbar)\delta_{ij}$ 。由于空间长度  $x \Leftrightarrow \varphi(x)$ ,  $\varphi(x)$  没有长度的量纲, 因此必然要引入一个系数, 该系数为  $\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}$ 。但是在场未量子化以前是无法反映这种事

实的, 只有场经过量子化以后才能反映出场的测不准关系。

在具体量子化时, 还要考虑到基本粒子分别属于 Bose 子和 Fermi 子两大类。它们满足不同的统计法则。场量子化以后, 可自动得出这两种不同的统计法则, 并正确地给出统计和自旋的关系。

Bose 场的量子, 自旋为整数或零, 服从 Bose-Einstein 统计法, 称为 Bose 子。Bose 场在真空场中的图像是真空中某点平移形成总应变为  $\hbar$  的量子场 (并不考虑该点的内禀性质), 把场的正则坐标  $\phi'_A(t)$  和正则共轭动量  $p'_A(t)$  视为 Hilbert 空间的算符, 本质上时空中形成一个总形变量为  $\hbar$  的量子场, 因而它们应该满足以下对易关系。

$$[\phi'_A(t), p'_B(t)] = i\hbar\delta_{AB}\delta^j \quad (3.1.5a)$$

$$[\phi'_A(t), \phi'_B(t)] = [p'_A(t), p'_B(t)] = 0 \quad (l, j = 1, 2, \dots, f; \quad A, B = 1, 2, \dots, N) \quad (3.1.5b)$$

其中, 指标  $l, j$  分别是第  $l$  个和第  $j$  个小区域的标记。假定在连续极限下, 第  $l$  个小区域收缩

到  $\bar{x}_j$  点, 第  $j$  个小区域收缩到  $\bar{x}_j$  点, 那么, 区域的标记就可以用相应的收缩点来代替, 在连续极限下, 式 (3.1.5) 重写为

$$[\phi_A^l(\bar{x}_l, t), \pi_B^j(\bar{x}_j, t)] = i\hbar \delta_{AB} \delta^{(3)}(\bar{x}_l - \bar{x}_j) \quad (3.1.6a)$$

$$[\phi_A(\bar{x}, t), \phi_B(\bar{x}, t)] = [p_A^l(\bar{x}, t), p_B^j(\bar{x}, t)] = 0 \quad (3.1.6b)$$

基本粒子相互转换是基本粒子的基本运动规律, 即所研究的基本粒子体系中各种粒子的数目经常要改变。在场量子化以后, 引入了生灭算符, 可以自动地得出粒子产生和湮灭的过程。

## 3.2 正则量子化

### 3.2.1 哈密顿形式和正则量子化

经典力学中  $n$  自由度体系, 其拉氏量为  $L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t))$ , 可定义其正则共轭动量为

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2.1a)$$

拉氏方程可以表示为

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} \quad (3.2.1b)$$

进行勒让德变换可得

$$H(q_\alpha, p_\alpha) = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned} dH(q_\alpha, p_\alpha) &= \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \\ &= \frac{\partial(p_\alpha \dot{q}_\alpha)}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial(p_\alpha \dot{q}_\alpha)}{\partial p_\alpha} dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \\ &= p_\alpha \frac{d\dot{q}_\alpha}{dq_\alpha} dq_\alpha + \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \stackrel{(3.2.1)}{=} \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \dot{p}_\alpha dq_\alpha \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

上述结果和式 (3.2.3) 比较, 得到哈密顿方程

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2.4)$$

引进经典泊松括号可得

$$\{A, B\}_{PB} = \frac{\partial A}{\partial p_\alpha} \frac{\partial B}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial q_\alpha} \frac{\partial B}{\partial p_\alpha} \quad (3.2.5)$$

用泊松括号可以直接验证

$$\{p_\alpha, q_\beta\}_{PB} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \{p_\alpha, p_\beta\}_{PB} = \{q_\alpha, q_\beta\}_{PB} = 0 \quad (3.2.6)$$

$$\{H, q_\alpha\}_{PB} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha, \quad \{H, p_\alpha\}_{PB} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \dot{p}_\alpha \quad (3.2.7)$$

$$\{H, F\}_{PB} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} + \dot{p}_\alpha \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} = \dot{F} \quad (3.2.8)$$

其中,  $F$  是任意力学量。

正则量子化方法把力学量作为算符, 由经典泊松括号过渡到量子对易关系

$$\{A, B\}_{PB} \rightarrow i[A, B] \quad (3.2.9)$$

对于  $n$  个自由度的自由粒子体系, 对其正则坐标  $q_\alpha$  和正则共轭动量  $p_\alpha$  进行如下的算符对应

$$q_\alpha \rightarrow \hat{q}_\alpha, \quad p_\alpha \rightarrow \hat{p}_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n; \quad E \rightarrow \hat{E} = i\frac{\partial}{\partial t} \quad (3.2.10)$$

假定体系的态函数为  $\varphi(q_\alpha, t)$ , 并假定  $\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\alpha$  满足如下对易关系 (即量子化条件)

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i(\hbar)\delta_{\alpha\beta}, \quad [\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\beta] = [\hat{p}_\alpha, \hat{p}_\beta] = 0 \quad (3.2.11)$$

海森伯图景下的量子运动方程

$$\dot{\hat{q}}_\alpha = i[\hat{H}, \hat{q}_\alpha], \quad \dot{\hat{p}}_\alpha = i[\hat{H}, \hat{p}_\alpha] \quad (3.2.12)$$

对于量子场而言, 任何量子场都以粒子的形式存在, 如电子、光子、中微子等。假设考虑某种粒子的图像。粒子用波函数  $\varphi(x)$  来描述。把  $\varphi(x)$  理解为描述该粒子运动的场。为了表现出场的粒子性, 就必须对连续的经典场进行量子化, 把连续的、不可数无限自由度的场近似为间断的、可数有限自由度的体系。

和经典质点体系不同的是  $\varphi(x)$  场最初源自于几率波。在量子场里, “几率波” 这一概念已不再适用。但为了说明量子化的物理图像, 有必要再借用 (读者不用由此引起误解) 几率波的物理图像来说明。

先把  $\varphi(x)$  想像为几率波。量子场以点粒子的形式存在, 在对于测量而言, 找到粒子的可能性如图 3.2.1 (a) 所示, 颜色深的为几率高的区域, 颜色浅的为几率小的区域。根据测不准原理, 不可能确定粒子的具体位置。因而只好把这种可能性视为连续的场, 这种连续场一旦被测量到, 从实验上来看, 连续场立刻以一个点的形态出现。换言之, 场在  $\Delta v_i$  出现的可能性以点的形式表现出来。于是可以从场的离散形式入手, 然后取连续极限来得到场的哈密顿形式和正则量子化的方案。

从场拉氏量的离散形式出发, 定义正则共轭动量 (注意重复指标求和约定)

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i(t)} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \dot{\varphi}_i(t)} \Delta v_j = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\varphi}_i(t)} \Delta v_i = \pi_i(t) \Delta v_i \quad (3.2.13)$$

这里,

$$\pi_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\varphi}_i(t)} \quad (3.2.14)$$

$\Delta v_i$  内的场取连续极限。当小区域的数目  $i$  趋向无限大, 且每个小区域都收缩到它所包含的某个空间点  $x$  时,  $\Delta v \rightarrow 0$ ,  $\varphi_i(t)$  和  $\dot{\varphi}_i(t)$  分别趋向  $\varphi(x)$  和  $\dot{\varphi}(x)$ , 有下列对应关系:

$$q_\alpha \leftrightarrow \lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ \Delta v_i \rightarrow 0}} \varphi_i(t) = \varphi(\vec{x}, t)$$

$$p_\alpha \leftrightarrow \lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ \Delta v_i \rightarrow 0}} \pi_i(t) = \lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ \Delta v_i \rightarrow 0}} \frac{p_i}{\Delta v_i} = \pi(\vec{x}, t)$$

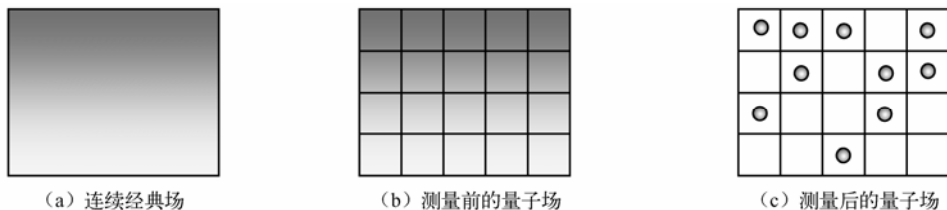


图 3.2.1 场的量子化示意图

得

$$\pi(x) = \lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} \pi_i(t) = \lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\phi}_i(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} \quad (3.2.15)$$

$\pi(x)$  称为场  $\phi(x)$  的正则轭动量。

对于测量而言，粒子被简化为点，每一小格空间  $\Delta v_i$  都有可能找到粒子。通过这样的空间网格收缩  $i \rightarrow \infty$ ， $\Delta v_i \rightarrow 0$ ，总能在某一个小格中找到粒子，如图 3.2.1 (c) 所示。在该小格中找到粒子的哈密顿密度  $\mathcal{H}$  为该粒子的哈密顿量  $H_i$ ，在小格内没有找到粒子时的哈密顿量为零，即哈密顿密度  $\mathcal{H}$  为零，对哈密顿密度  $\mathcal{H}$  无贡献。这一操作使得我们测量到的哈密顿密度  $\mathcal{H}$  都没有空格，哈密顿密度  $\mathcal{H}$  就是一个小格的  $H_i$ 。换言之，对某种单一的场而言，哈密顿密度  $\mathcal{H}$  就是这种场单一粒子的哈密顿量  $H_i$ 。因而每一种（ $p_\mu$  为定值）粒子就有一个固定的  $\mathcal{H}$  量。

离散形式下场的哈密顿量可写为

$$H = \sum_i (p_i \dot{\phi}_i - L_i) = \sum_i H_i \quad (3.2.16)$$

$H_i$  表示第  $i$  个小格  $\Delta v_i$  中场的哈密顿量，而  $H_i = \frac{H_i}{\Delta v_i}$  是该小格的平均哈密顿密度，对其取连续极限得

$$\mathcal{H} = \lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} H_i = \lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} \frac{p_i \dot{\phi}_i - L_i}{\Delta v_i} = \lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} (\pi_i(t) \dot{\phi}_i(t) - \mathcal{L}_i) = \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \quad (3.2.17)$$

这称为场的哈密顿密度。连续形式下的哈密顿量为

$$H = \lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} \sum_i H_i = \int \mathcal{H} d^3x \quad (3.2.18)$$

利用式 (3.2.16) 和场的拉格朗日方程 (2.1.19) 可导出场的正则运动方程：

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \phi)} \quad (3.2.19)$$

经过上述处理，实现了场的量子化。

### 3.2.2 Bose场的正则量子化

Bose 场的量子，自旋为整数或零，服从 Bose-Einstein 统计法，称为 Bose 子。对于 Bose 场可以完全类比于经典粒子系来进行量子化。首先把场的正则坐标  $\phi_i$  和正则共轭动量  $p_i$  视为 Hilbert 空间的算符，量子对易关系在离散场形式下的对应是

$$[\phi_i, p_j] = i(\hbar) \delta_{ij}, \quad [\phi_i, \phi_j] = [p_i, p_j] = 0$$

或者由式 (3.2.11) 改写为

$$[\varphi_i, \pi_j] = i\hbar \frac{\delta_{ij}}{\Delta v_i}, [\varphi_i, \varphi_j] = [\pi_i, \pi_j] = 0 \quad (3.2.20)$$

令  $\Delta v \rightarrow 0$  过渡到连续情形, 注意到

$$\lim_{\Delta v_j \rightarrow 0} \frac{\delta_{ij}}{\Delta v_j} = \delta^3(x - x') \quad (3.2.21)$$

即得到场的等时对易关系

$$\begin{cases} [\varphi(t, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{x}')] = [\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] = 0 \\ [\varphi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] = i\hbar \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{cases} \quad (3.2.22)$$

相应地可得量子场的正则运动方程

$$\dot{\varphi} = i[H, \varphi], \quad \dot{\pi} = i[H, \pi] \quad (3.2.23)$$

结果可直接推广到多分量场。这时每个场分量的正则共轭定义为

$$\pi_\alpha(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_\alpha(x)} \quad (3.2.24)$$

场的哈密顿密度为

$$\mathcal{H} = \pi_\alpha \dot{\varphi}_\alpha - \mathcal{L} \quad (3.2.25)$$

场的等时对易关系为

$$\begin{cases} [\varphi_\alpha(t, x), \varphi_\beta(t, x')] = [\pi_\alpha(t, x), \pi_\beta(t, x')] = 0 \\ [\varphi_\alpha(t, x), \pi_\beta(t, x')] = i\hbar \delta_{\alpha\beta} \delta^3(x - x') \end{cases} \quad (3.2.26)$$

量子场每一时空点的性质就是点粒子的性质。场的量子化等时对易关系 (3.2.22) 给出了 Bose 场 (点粒子) 在时空点所具有的性质, 量子场  $\varphi(x)$  在时空点  $x$  的存在会引起真空场形变, 形变总量为  $\hbar$  ( $\hbar$  和  $h$  相差一个常数  $2\pi$ )。对于 Fermi 场而言, 这一量子化方法不适用, 因为 Fermi 子的时空总形变量为  $\hbar_f$ , 向球内中心形变, 只有静质量效应, 没有传播效应。对于观测而言, 量子场必须处于运动状态才有可观测性, 这意味着 Fermi 场的时空总形变量  $\hbar_f$  没有直接的可观测性, 因而 Bose 场的量子化方式不再适用, 必须采用其他方法。

### 3.2.3 Fermi场的正则量子化

Fermi 场的量子具有半数自旋, 服从 Fermi-Dirac 统计法。假定  $\psi(t, \mathbf{x})$  是 Fermi 场的场函数, 场的正则坐标和正则共轭动量分别是  $\psi(t, \mathbf{x})$  和  $\pi(t, \mathbf{x})$ 。量子场正则运动方程为

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{i} [\psi(t, \mathbf{x}), H(t)] \\ \dot{\pi}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{i} [\pi(t, \mathbf{x}), H(t)] \end{cases} \quad (3.2.27)$$

Fermi 量子化条件不是正则等时对易关系, 必须从 Fermi 统计出发来建立场算符所满足的对易关系。方程 (3.2.27) 的一组完全正交的平面波解为  $\frac{1}{V} e^{i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ 。

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \bar{a}_k e^{i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.2.28a)$$



$$\psi^+(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.2.28b)$$

把  $\bar{a}_{\mathbf{k}}^+$ 、 $\bar{a}_{\mathbf{k}}$  分别称为粒子产生、湮灭算符，按照 Pauli 原理来寻找它们所满足的对易关系。用  $|0, 1_{\mathbf{k}}\rangle$  代表量子场具有一个动量为  $\mathbf{k}$ 、能量为  $E_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}$  状态的粒子，而能量动量为其他值的粒子数均为零。按照 Fermi 统计，能量动量取某定值的粒子数，或者为零，或者为 1，其余的可能性均不存在。因此，应有以下诸式成立：

$$\bar{a}_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0 \quad (3.2.29a)$$

$$\bar{a}_{\mathbf{k}}^+ |0, 1_{\mathbf{k}}\rangle = 0 \quad (3.2.29b)$$

$$\bar{a}_{\mathbf{k}} |0, 1_{\mathbf{k}}\rangle = |0\rangle \quad (3.2.29c)$$

$$\bar{a}_{\mathbf{k}}^+ |0\rangle = |0, 1_{\mathbf{k}}\rangle \quad (3.2.29d)$$

以  $\bar{a}_{\mathbf{k}}$  左乘式 (3.2.29b)，再以  $\bar{a}_{\mathbf{k}}^+$  左乘式 (3.2.29c)，然后将所乘的结果相加，就得到如下的本征值方程

$$(\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ + \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ \bar{a}_{\mathbf{k}}) |0, 1_{\mathbf{k}}\rangle = |0, 1_{\mathbf{k}}\rangle \quad (3.2.30a)$$

另一方面，以  $\bar{a}_{\mathbf{k}}^+$  左乘式 (3.2.29a)，再以  $\bar{a}_{\mathbf{k}}$  左乘式 (3.2.29d)，然后将所得结果相加，又得到如下的本征值方程

$$(\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ + \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ \bar{a}_{\mathbf{k}}) |0\rangle = |0\rangle \quad (3.2.30b)$$

态矢量  $|0, 1_{\mathbf{k}}\rangle$  和  $|0\rangle$  是算符  $\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ + \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ \bar{a}_{\mathbf{k}}$  的唯一可能的两个本征右矢，其相应本征值都是 1，因而必定有

$$\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ + \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ \bar{a}_{\mathbf{k}} = 1 \quad (3.2.31)$$

现在，把式 (3.2.30a) 中的  $\mathbf{k}$  换成  $\mathbf{k}'$  ( $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ )，则

$$\bar{a}_{\mathbf{k}'} |0\rangle = 0$$

以  $\bar{a}_{\mathbf{k}}^+$  左乘此式，再以  $\bar{a}_{\mathbf{k}'}$  左乘式 (3.2.29d)，然后将所得结果相加，得到

$$(\bar{a}_{\mathbf{k}'} \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ + \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ \bar{a}_{\mathbf{k}'}) |0\rangle = 0 \quad (3.2.32a)$$

再将式 (3.2.29c) 中的  $\bar{a}_{\mathbf{k}}$  换成  $\bar{a}_{\mathbf{k}'}$ ，得到

$$\bar{a}_{\mathbf{k}'} |0, 1\rangle = 0$$

以  $\bar{a}_{\mathbf{k}}^+$  左乘此式，再以  $\bar{a}_{\mathbf{k}'}$  左乘式 (3.2.29b)，然后将所得结果相加，又得到

$$(\bar{a}_{\mathbf{k}'} \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ + \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ \bar{a}_{\mathbf{k}'}) |0, 1_{\mathbf{k}}\rangle = 0, \quad \mathbf{k}' \neq \mathbf{k} \quad (3.2.32b)$$

态矢量  $|0, 1_{\mathbf{k}}\rangle$  和  $|0\rangle$  同样是算符  $\bar{a}_{\mathbf{k}'} \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ + \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ \bar{a}_{\mathbf{k}'}$  的两个仅可能的本征右矢，其相应本征值都是零，因而有

$$\bar{a}_{\mathbf{k}'} \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ + \bar{a}_{\mathbf{k}}^+ \bar{a}_{\mathbf{k}'} = 0, \quad \mathbf{k}' \neq \mathbf{k} \quad (3.2.33)$$

式 (3.2.31) 和式 (3.2.33) 可合写为下式：

$$\{\bar{a}_{\mathbf{k}'}, \bar{a}_{\mathbf{k}}^+\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (3.2.34a)$$

用类似的方法来考虑量子场的这样一种状态，这时量子场具有一个  $(\mathbf{k}, E_{\mathbf{k}})$  粒子和一个  $(\mathbf{k}', E_{\mathbf{k}'})$  粒子，其余粒子数均为零。描写这一状态的态矢量为

$$\bar{a}_{\mathbf{k}}^+ \bar{a}_{\mathbf{k}'}^+ |0\rangle$$

按照 Fermi 统计, 该态矢量对交换上述两个粒子是反对称的。因此有

$$\{\bar{a}_k^+, \bar{a}_{k'}^+\} = 0 \quad (3.2.34b)$$

此式取厄米共轭又得到

$$\{\bar{a}_k, \bar{a}_{k'}\} = 0$$

式 (3.2.34) 便是 Fermi 场的粒子产生、湮灭算符所满足的对易关系, 这些对易关系是由反对易括号  $\{A, B\} = AB + BA$  给出的, 所以又称为反对易关系。

现在, 利用式 (3.2.34) 来导出场算符所满足的正则等时反对易关系。

$$\{\psi(t, \mathbf{x}), \psi^+(t, \mathbf{y})\} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \{\bar{a}_{\mathbf{k}}, \bar{a}_{\mathbf{k}'}^+\} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})(t - t) - i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{y})} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{y})} \quad (3.2.35)$$

为了计算此式右边对间断动量的求和, 需要把它化为对连续动量的积分。由于引入归化体积  $V = l^3$  ( $l$  是立方体的边长), 因而动量只能取以下分立值

$$k_i = \frac{2\pi}{l} n_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2.36)$$

在动量空间的第  $j$  个坐标轴上的任意一段间隔  $dk_j$  内, 容纳有  $dn_j$  个  $k_j$  的许可值, 且

$$dn_j = \frac{dk_j}{\frac{2\pi}{l}} \quad (3.2.37)$$

现在, 让  $dk_i \rightarrow 0$  (因而  $dn_j$  也趋向零), 并进行如下的积分:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_j(x_j - y_j)} dk_j &= \int_0^{+\infty} e^{-ik_j(x_j - y_j)} dk_j + \int_0^{+\infty} e^{ik_j(x_j - y_j)} dk_j \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-ik_j(x_j - y_j)} \frac{2\pi}{l} dn_j + \int_0^{+\infty} e^{ik_j(x_j - y_j)} \frac{2\pi}{l} dn_j \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

上式最后一个等号右边变数  $n_j$  的取值范围是在整个  $k_j$  轴正半轴上所容纳的  $k_j$  的全部许可值的数目。由于  $k_j$  的许可值是一些间断值, 故上式右边对  $n_j$  的积分事实上等同于对  $k_j$  轴正半轴上全部间断的  $k_j$  值求和。

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-ik_j(x_j - y_j)} dk_j &= \int_0^{+\infty} e^{-ik_j(x_j - y_j)} \frac{2\pi}{l} dn_j = \frac{2\pi}{l} \sum_{k_j \in \mathbb{R}^+} e^{-ik_j(x_j - y_j)} = \frac{2\pi}{l} \sum_{k_j=0} e^{ik_j(x_j - y_j)} \\ \int_0^{+\infty} e^{ik_j(x_j - y_j)} dk_j &= \frac{2\pi}{l} \int_0^{+\infty} e^{ik_j(x_j - y_j)} dn_j = \frac{2\pi}{l} \sum_{k_j \in \mathbb{R}^+} e^{ik_j(x_j - y_j)} \end{aligned}$$

将以上两式代入式 (3.2.38) 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_j(x_j - y_j)} dk_j = \frac{2\pi}{l} \sum_{k_j} e^{ik_j(x_j - y_j)} \quad (3.2.39)$$

因此, 得到求和与积分的转换公式如下:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} d^3 \mathbf{k} = \frac{2\pi}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{\pm i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \quad (3.2.40)$$

这里,  $d^3 k = dk_1 dk_2 dk_3$ 。把式 (3.2.40) 代入式 (3.2.35) 得

$$\{\psi(t, \mathbf{x}), \psi^+(t, \mathbf{y})\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} d^3 \mathbf{k} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.2.41a)$$

同样可得

$$\{\psi(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y})\} = \{\psi^+(t, \mathbf{x}), \psi^+(t, \mathbf{y})\} = 0 \quad (3.2.41b)$$

式 (3.2.41) 就是 Fermi 场算符所满足的正则等时反对易关系, 即是 Fermi 场的量子化条件。这些条件与量子场运动方程一起构成量子化 Fermi 场的基本方程式。从这些方程式出发便可讨论量子化 Fermi 场的运动规律。

## 3.3 实标量场

### 3.3.1 正则量子化

为了以后方便。讲述电子、光子的结构, 更好地从数学和物理学图像两方面理解电子和光子, 这里先回顾一下最简单的量子场, 即实标量场 (如图 3.3.1 所示)。实标量场和电子不同, 没有自旋, 不是旋量场; 与光子不同, 不是矢量场, 没有指向。标量场只有强弱。标量场分为实标量场、赝标量场和复标量场。实标量场只有一种, 赝标量场由正反两种标量场构成。

最简单的量子场是实标量场, 只有 5 个自由度 (四动量和质量自由度)。标量场由标量粒子构成。一个实标量粒子具有静质量  $m_0$ ; 自旋为 0; 无电荷。运动的标量粒子有动量和动能。粒子满足相对论的能量动量关系:  $E = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4}$ 。假定存在如下的算符对应关系

$$E \rightarrow \hat{E} = i\hbar I \partial_t, \quad \vec{p} \rightarrow i\hbar \vec{\gamma} \nabla, \quad \hat{m} \rightarrow i\hbar \gamma_0 \partial_4$$

$$E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \quad (c=1)$$

$$i\partial_t \phi(t(\xi), \bar{x}(\xi)) = \sqrt{-\nabla^2 + m^2} \phi(t(\xi), \bar{x}(\xi))$$



图 3.3.1 实标量场示意图

对上式两边的算符均重复作用一次, 得到

$$(\nabla^2 - \partial_t^2 - m^2) \phi(t(\xi), \bar{x}(\xi)) = 0$$

记  $\square = \partial_t^2 - \nabla^2$ , 可以得到人们熟知的 Klein-Gordon 方程:

$$(\square + m^2) \phi(x(\xi)) = 0 \quad (3.3.1)$$

自由粒子对应于自由量子场, 简称自由场。最简单的自由场是只有一个场变量的场, 场变量只有一个时空分量。标量场  $\phi(x)$  是最简单的场, 它描述自旋为 0 的中性粒子 (荷电荷的标量介子用复标量场描述<sup>①</sup>)。若  $\phi(x)$  在洛伦兹变换下不变, 则称  $\phi(x)$  是零自旋场。若在空间反射下不变号, 则称它是标量场; 否则, 为赝标量场<sup>②,③</sup>。实验证明, 量子赝标场确实能够反映  $\pi$  介子、K 介子等一类微观粒子的性质和运动规律<sup>④</sup>。

从真空场的角度来看, 标量场是拉伸量子场和压缩量子场的耦合体 (标量场的内禀结构见第 10 章), 理解为一个有质量的点在标量场内禀自由度空间中的无穷小移动  $\varepsilon$  便构成了

① H.H.波戈留波夫 д.В.希尔科夫. 量子场论导引. 科学出版社, 1966, p16.

② 李政道. 粒子物理和场论简引. 科学出版社, 1984, p17.

③ 何宝鹏, 熊钰庆. 量子场论导论. 华南理工大学出版社, 1990, p19.

④ 邹国兴. 量子场论导论. 科学出版社, 1980, p11.

实标量场。

描述标量场的场方程为 K-G 方程，把质量换成算符形式  $\hat{m} = \partial_m$ ，将场方程乘以振幅在  $x$  处的无穷小变分：

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) \quad (3.3.2)$$

得

$$0 = \delta J = \int_{\Omega} d^4x (\square + \hat{m}^2) \phi \delta\phi = \int_{\Omega} d^4x (\partial_{\mu} \partial^{\mu} \phi + \hat{m}^2 \phi) \delta\phi = \int_{\Omega} d^4x \underbrace{(\partial_{\mu} \partial^{\mu} \phi \delta\phi)}_{(b)} + \underbrace{\hat{m}^2 \phi \delta\phi}_{(a)}$$

$$\begin{aligned} (a) \quad \hat{m}^2 \phi \delta\phi &= \hat{m}^2 \phi \delta\phi + \hat{m}^2 \delta\phi \phi - \hat{m}^2 \delta\phi \phi \\ &= \hat{m}^2 \delta[\phi \cdot \phi] - \hat{m}^2 \delta\phi \phi \Rightarrow \hat{m}^2 \phi \delta\phi = \frac{1}{2} \hat{m}^2 \delta[\phi\phi] \end{aligned}$$

$$(b) \quad \partial_{\mu} (\partial^{\mu} \phi) \delta\phi = \partial_{\mu} [(\partial^{\mu} \phi) \delta\phi] - \partial_{\mu} \phi \delta(\partial^{\mu} \phi)$$

$$\downarrow \text{边界条件: } \partial_{\mu} [(\partial^{\mu} \phi) \delta\phi] = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\mu} (\partial^{\mu} \phi) \delta\phi &= -\partial_{\mu} \phi \delta(\partial^{\mu} \phi) \\ \delta[(\partial_{\mu} \phi)(\partial^{\mu} \phi)] &= [\delta(\partial_{\mu} \phi)] \partial^{\mu} \phi + \partial_{\mu} \phi \delta(\partial^{\mu} \phi) = 2\partial_{\mu} \phi \delta(\partial^{\mu} \phi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\partial_{\mu} (\partial^{\mu} \phi) \delta\phi = -\partial_{\mu} \phi \delta(\partial^{\mu} \phi) = -\frac{1}{2} \delta[(\partial_{\mu} \phi)(\partial^{\mu} \phi)]$$

代入 (a) 和 (b) 的结果，可得

$$0 = \delta J = \int_{\Omega} d^4x (\partial_{\mu} \partial^{\mu} \phi \delta\phi - \hat{m}^2 \phi \delta\phi) = \int_{\Omega} d^4x \frac{1}{2} \delta[-(\partial_{\mu} \phi)(\partial^{\mu} \phi) - \hat{m}^2 (\phi\phi)]$$

$$\delta \int_{\Omega} d^4x \frac{1}{2} [-(\partial_{\mu} \phi)(\partial^{\mu} \phi) + \hat{m}^2 (\phi\phi)] = 0 \Rightarrow \delta \int_{\Omega} d^4x [\mathcal{L}] = 0 \Rightarrow$$

得到实标量场  $\phi(x)$  的拉氏量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \hat{m}^2 \phi^2) \quad (3.3.3)$$

可以看出实标量场的拉氏量等于四动量间隔。实标量场  $\phi(x)$  满足

$$\phi^+(x) = \phi(x), \quad \pi^+(x) = \pi(x) \quad (3.3.4)$$

按照场的等时对易关系式，场的量子化条件为

$$\left\{ \begin{aligned} [\varphi(t, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{y})] &= [\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = 0 \\ [\varphi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \right. \quad (3.3.5)$$

量子场正则运动方程式为

$$\dot{\phi}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{i} [\phi(t, \mathbf{x}), H(t)], \quad \dot{\pi}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{i} [\pi(t, \mathbf{x}), H(t)] \quad (3.3.6)$$

把  $\mathcal{L}$  的表达式 (3.3.3) 代入式 (3.2.24) 得到场的正则共轲动量为

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x) \quad (3.3.7)$$

按照正则量子化方法，把  $\varphi(x)$  和  $\pi(x)$  作为算符，满足等时对易关系式 (3.3.5)，就得到

了实标量场。

容易看出拉氏量密度在时空平移和洛伦兹变换下是不变的，故由奈特定理知其能量、动量和角动量都是守恒量。量子化后，它们都是算符。把式 (3.3.5) 和式 (3.3.6) 代入下式

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \frac{1}{2} \int_V d^3x \left[ \dot{\phi}^2(t, \mathbf{x}) + [\nabla \phi(t, \mathbf{x})]^2 + \hat{m}^2 \phi^2(t, \mathbf{x}) \right] \\
 &\quad \downarrow \\
 \dot{\pi}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{i} [\pi(t, \mathbf{x}), H(t)] \text{ 代入量子场正则运动方程式} \\
 &\quad \downarrow \\
 \dot{\pi}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{i} \left[ \pi(t, \mathbf{x}), \frac{1}{2} \int_V d^3x \left[ \dot{\phi}^2(t, \mathbf{x}) + [\nabla \phi(t, \mathbf{x})]^2 + m^2 \phi^2(t, \mathbf{x}) \right] \right] \\
 &= \frac{1}{2i} \int_V d^3x \left( \underbrace{[\pi(t, \mathbf{x}), \pi^2(t, \mathbf{x})]}_{(a)} + \underbrace{[\pi(t, \mathbf{x}), (\nabla \phi(t, \mathbf{x}))^2]}_{(b)} + \underbrace{[\pi(t, \mathbf{x}), m^2 \phi^2(t, \mathbf{x})]}_{(c)} \right) \\
 &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 [\pi(t, \mathbf{x}), \pi^2(t, \mathbf{x})] &= 0 \\
 &\qquad \qquad \qquad [\pi(t, \mathbf{x}), (\nabla \phi(t, \mathbf{x}))^2] \\
 &\qquad \qquad \qquad \updownarrow
 \end{aligned}$$

首先：  $\nabla(\nabla \phi \phi) = \nabla \phi \nabla \phi + (\nabla^2 \phi) \phi \Rightarrow \nabla \phi \nabla \phi = \nabla(\nabla \phi \phi) - (\nabla^2 \phi) \phi$

$\frac{1}{2i} \int_V d^3x \nabla(\nabla \phi \phi) = \int_S (\nabla \phi \phi) dS = 0$  (由于  $S$  为盒的外壁，所有的法线相反，积分为零)

$$\begin{aligned}
 -[\pi(t, \mathbf{x}), (\nabla \phi(t, \mathbf{x}))^2] &= -[\pi(t, \mathbf{x}), (\nabla^2 \phi(t, \mathbf{y})) \phi(t, \mathbf{y})] \\
 &= -\nabla^2 \phi(t, \mathbf{y}) [\pi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] - [\pi(t, \mathbf{x}), \nabla^2 \phi(t, \mathbf{y})] \phi(t, \mathbf{y}) \\
 &= +\nabla^2 \phi(t, \mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \nabla_y^2 [\pi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] \phi(t, \mathbf{y}) \quad (\text{由量子化条件式 (3.3.5)}) \\
 &= +i \nabla^2 \phi(t, \mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + i \nabla^2 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(t, \mathbf{y}) \\
 &= i 2 \nabla^2 \phi(t, \mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad [\pi(t, \mathbf{x}), \hat{m}^2 \phi^2(t, \mathbf{x})] &= \hat{m}^2 [\pi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t, \mathbf{x})] \\
 &= \hat{m}^2 [\pi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x})] \phi(t, \mathbf{x}) + \hat{m}^2 \phi(t, \mathbf{x}) [\pi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x})] \\
 &= -\hat{m}^2 \phi(t, \mathbf{x}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})
 \end{aligned}$$

$$(a) + (b) + (c) = i 2 \nabla^2 \phi(t, \mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \hat{m}^2 \phi(t, \mathbf{x}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

$$\text{积分: } \int d^3y (2i) (\nabla_y^2 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \phi(t, \mathbf{y}) = 2i(-1)^2 \nabla^2 \phi(t, \mathbf{y})$$

$$\int d^3y (-2i) (\phi(t, \mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \hat{m}^2 = -2i(-1)^2 \phi(t, \mathbf{y}) \hat{m}^2$$

上式推导利用公式：  $\int dx f(x) \frac{d^n}{dx^n} \delta(x - a) = (-1)^n f^{(n)}(a)$

把积分所得的公式代入式 (3.3.7)：

$$\dot{\pi}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2i} \left[ 2i\nabla^2 \phi(t, \mathbf{y}) - 2i\phi(t, \mathbf{y})\hat{m}^2 \right] = (\nabla^2 - \hat{m}^2) \phi(t, \mathbf{x})$$

$$\dot{\pi}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \mathbf{x})$$

由上两式得

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - \hat{m}^2 \right) \phi(t, \mathbf{x}) = 0$$

即到量子化方程

$$(\square + \hat{m}^2) \phi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (3.3.8)$$

量子化方程和经典场方程在形式上完全一致，但本质上已发生了改变。式 (3.3.8) 是量子化实标量的基本方程式。

### 3.3.2 动量表象

为了显示实标量场的粒子性，有必要把对易关系式 (3.3.2) 和场物理量算符的表示式转到动量空间。这里要从坐标表象过渡到动量表象。为此，对  $\phi(x)$  进行傅里叶展开，

$$\phi(x) = \sum_k [a(k)f_k(x) + a^+(k)f_k^*(x)] \quad (3.3.9)$$

其中  $a(k)$ 、 $a^+(k)$  为互为厄米共轭的算符。

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-ikx + imx_m}, \quad V = (2\pi)^3, \quad \omega_k = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (3.3.10)$$

将  $f_k(x)$  代入式 (3.3.8)，可直接验证  $f_k(x)$  满足 K-G 方程。

对于二次量子化而言，标志性的特征是引入生灭算符。现在来求湮灭算符  $a(k)$  和产生  $a^+(k)$  的具体表达式，用  $\int_V f_{k'}^* d^3x$  左乘式 (3.3.9)，得

$$\begin{aligned} \int_V f_{k'}^* \phi(x) d^3x &= \int d^3x \sum_k [a(k)f_k(x) + a^+(k)f_k^*(x)] \\ &= \int d^3x \sum_k \frac{1}{\sqrt{V}\sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}} [a(k)e^{i(k-k')x} e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} + a^+(k)e^{-i(k-k')x} e^{i(\omega_k + \omega_{k'})t}] \\ &= \frac{1}{V} \frac{a(k)}{2\omega_{kk'}} V \delta(k - k') e^0 + \frac{1}{V} \frac{a^+(k)}{2\omega_k} V \delta(k + k') e^{2i\omega_k t} \\ \int_V f_{k'}^* \phi(x) d^3x &= \frac{1}{2\omega_k} (a(k) + a^+(-k) e^{2i\omega_k t}) \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

对上式求导得

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V f_{k'}^* \phi(x) d^3x = \frac{1}{2\omega_k} \frac{\partial}{\partial t} (a(k) + a^+(-k) e^{2i\omega_k t})$$

右边为

$$\frac{a^+(-k)}{2\omega_k} \cdot 2\omega_k e^{2i\omega_k t} = i a^+(-k) e^{2i\omega_k t}$$

左边为  $\int_V f_{k'}^* \dot{\phi}(x) d^3x + \int_V \dot{f}_{k'}^* \phi(x) d^3x$

$$\begin{aligned} &\int_V \dot{f}_{k'}^* \phi(x) d^3x = i\omega_k \int_V f_{k'}^* \phi(x) d^3x = i\omega_k \frac{1}{2\omega_k} (a(k) - a^+(-k) e^{2i\omega_k t}) \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{2} (a(k) - a^+(-k) e^{2i\omega_k t}) \quad (a)$$

$$\text{由 } \int_V f_k^* \dot{\phi}(x) d^3x + \int_V \dot{f}_k^* \phi(x) d^3x = i a^+(-k) e^{2i\omega_k t} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int_V f_k^* \dot{\phi}(t, \mathbf{x}) d^3x &= i a^+(-k) e^{2i\omega_k t} - \int_V \dot{f}_k^* \phi(t, \mathbf{x}) d^3x \\ &= i a^+(-k) e^{2i\omega_k t} - \frac{i}{2} (a(k) + a^+(-k) e^{2i\omega_k t}) \\ &= -\frac{i}{2} (a(k) - a^+(-k) e^{2i\omega_k t}) \end{aligned} \quad (b)$$

由 (a) 和 (b) 可得  $-i a(k) = \int_V (\dot{f}_k^* \phi(t, x) - f_k^* \dot{\phi}(t, x)) d^3x$ , 利用  $\bar{\partial}$  的定义式, 得

$$a(k) = i \int_V (f_k^* \bar{\partial}_t \phi(t, x)) d^3x \quad (3.3.12a)$$

由  $a^+(k) = (i)^* \int_V (f_k^* \bar{\partial}_t \phi(t, x))^* d^3x$  得

$$a^+(k) = -i \int_V f_k \bar{\partial}_t \phi(t, x) d^3x \quad (3.3.12b)$$

可以证明  $a(k)$  和  $a^+(k)$  是与时间无关的。由式 (3.3.12a) 可得

$$\begin{aligned} \dot{a}(k) &= i \int d^3x (f_k^* \ddot{\phi} - \ddot{f}_k^* \phi) \\ &= i \int d^3x [f_k^* (\nabla^2 \phi) - (\nabla^2 f_k^*) \phi] \text{ 利用 K-G 方程 (3.3.5) 和式 (3.3.8)} \\ &= i \int d^3x \nabla [f_k^* \nabla \phi - (\nabla f_k^*) \phi] \\ &= i \int d\sigma \nabla [f_k^* \nabla \phi - (\nabla f_k^*) \phi] \quad \text{考虑到在无穷远边界上场为 0} \\ \dot{a}(k) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

利用  $a(k)$  与  $a^+(k)$  的时间无关性及式 (3.3.12) 和式 (3.3.2), 即可求得对易关系:

$$[a(k), a^+(k')] = \int_V d^3x d^3x' [f_k^*(t, x) \bar{\partial}_0 \phi(t, x), f_{k'}(t, x') \bar{\partial}_0 \phi(t, x')] \text{ 把式 (3.3.12) 代入对易关系}$$

$$= \int_V d^3x d^3x' [f_k^*(t, x) \pi(t, x) - \dot{f}_k^*(t, x) \phi(t, x), f_{k'}(t, x') \pi(t, x') - \dot{f}_{k'}(t, x') \phi(t, x')]$$

利用  $\bar{\partial}$  定义

$$\begin{aligned} &= \int_V d^3x d^3x' \left\{ (\dot{f}_{k'}(t, x') f_k^*(t, x)) [\phi(t, x'), \pi(t, x)] + (f_{k'}(t, x') \dot{f}_k^*(t, x)) [\pi(t, x'), \phi(t, x)] \right\} \\ &= i \int_V d^3x d^3x' (\dot{f}_{k'}(t, x') f_k^*(t, x) - f_{k'}(t, x') \dot{f}_k^*(t, x)) \delta(x - x') \\ &= i \int_V d^3x d^3x' f_{k'}(t, x') \bar{\partial}_0 f_k^*(t, x) \delta(x - x') = i \int_V d^3x f_{k'}(t, x) \bar{\partial}_0 f_k^*(t, x) \\ &= i \int_V d^3x (\dot{f}_{k'}(t, x) f_k^*(t, x) - f_{k'}(t, x) \dot{f}_k^*(t, x)) \\ &= i \int_V d^3x \frac{1}{V} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{-i\omega_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(k-k')x} \cdot e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} - i \int_V d^3x \frac{1}{V} \frac{i\omega_k}{2\omega_k} e^{i(k'-k)x} \cdot e^{i(\omega_{k'} - \omega_k)t} \\ &= i \frac{-i}{2} \frac{1}{V} \delta_{kk} e^0 + i \frac{-i}{2} \frac{1}{V} \delta_{kk} e^0 \end{aligned}$$

$$[a(k), a^+(k')] = \delta(k - k') \quad (3.3.14a)$$

类似地可得

$$[a(k), a(k')] = [a^+(k), a^+(k')] = 0 \quad (3.3.14b)$$

下面, 还需要把场物理量算符转到动量空间, 由式 (3.3.9) 易得

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) = \frac{-i}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (a(k)e^{-ikx} - a^+(k)e^{ikx}) \quad (3.3.15a)$$

$$\nabla \phi(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{k}{\sqrt{2\omega_k}} (a(k)e^{-ikx} - a^+(k)e^{ikx}) \quad (3.3.15b)$$

将式 (3.3.9) 和式 (3.3.15) 代入式 (3.3.4) 得

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{2} \int_V d^3x \left\{ \underbrace{\left[ \frac{-i}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (a(k)e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega_k t+imx_m} - a^+(k)e^{-i\vec{k}\vec{x}+i\omega_k t-imx_m}) \right]^2}_{(a)} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\left[ \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{k}{\sqrt{2\omega_k}} (a(k)e^{-ikx} - a^+(k)e^{ikx}) \right]^2}_{(b)} + m^2 \underbrace{\left[ \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a(k)e^{-ikx} - a^+(k)e^{ikx}) \right]^2}_{(c)} \right\} \\ (a) + (b) &= \left( \frac{-1}{V} \frac{\omega_k}{2} + \frac{-1}{V} \frac{k^2}{2\omega_k} \right) (a(k)e^{ikx-i\omega_k t-imx_m} - a^+(k)e^{-ikx+i\omega_k t+imx_m})^2 \\ &= \frac{-(\omega_k^2 + k^2)}{2\omega_k} (a(k)e^{ikx-i\omega_k t-imx_m} - a^+(k)e^{-ikx+i\omega_k t+imx_m})^2 \\ (c) &= \frac{1}{V} \frac{m^2}{2\omega_k} (a(k)e^{ikx-i\omega_k t-imx_m} - a^+(k)e^{-ikx+i\omega_k t+imx_m})^2 \\ &= \frac{m^2}{2\omega_k V} (a(k)^2 e^{2i(kx-i\omega_k t-imx_m)} + a^+(k)^2 e^{2(-ikx+i\omega_k t+imx_m)} - a(k)a^+(k)e^{ikx-ik'x} - a^+(k)a(k)e^{-ik'x+ikx}) \\ (a) + (b) + (c) &= \frac{-\omega_k^2 - k^2 + m^2}{2\omega_k V} (a(k)^2 e^{2i(kx-i\omega_k t-imx_m)} + a^+(k)^2 e^{-2i(kx-i\omega_k t-imx_m)}) \\ &\quad + \frac{\omega_k^2 + k^2 + m^2}{2\omega_k V} (a(k)a^+(k)e^{ikx-ik'x} + a^+(k)a(k)e^{ikx-ik'x}) \end{aligned}$$

利用式 (3.3.10), 并把上式代入式 (3.3.4), 注意  $\omega_k^2 = m^2 + |\mathbf{k}|^2$ 。

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{2} \int_V \sum d^3x \frac{-k^2}{V\omega_k} \left[ (a(k)^2 e^{2i(kx-i\omega_k t-imx_m)} + a^+(k)^2 e^{-2i(kx-i\omega_k t-imx_m)}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\omega_k^2}{2V\omega_k} (a(k)a^+(k)e^{ikx-ik'x} + a^+(k)a(k)e^{ikx-ik'x}) \right] \end{aligned}$$

利用公式  $\int_V e^{\pm i(k-k')x} d^3x = V\delta_{k',k}$ , 得到

$$H(t) = \sum_k (a^+(k)a(k) + a(k)a^+(k)) \frac{\omega_k}{2}$$

由式 (3.3.14a) 知  $a(k)a^+(k) = 1 + a^+(k)a(k)$ , 代入上式, 得

$$H = \sum_k \left( a^+(k)a(k) + \frac{1}{2} \right) \omega_k \quad (3.3.16)$$



$$\text{即 } H = \sum_k \left( N_k + \frac{1}{2} \right) \omega_k.$$

将  $\phi(x) = \sum_k [a(k)f_k(x) + a^+(k)f_k^*(x)]$  代入  $P = -\int \pi \nabla \phi(x) d^3x$  中, 得

$$\begin{aligned} P &= -\int_V d^3x \left[ \frac{-i}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left( a(k)e^{ikx-i\omega_k t-imx_m} - a^+(k)e^{-ikx+i\omega_k t+imx_m} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{k}{\sqrt{2\omega_k}} \left( a(k')e^{ik'x-i\omega_{k'} t-imx_m} - a^+(k')e^{-ik'x+i\omega_{k'} t+imx_m} \right) \right] \\ &= -\int_V d^3x \sum_k \frac{k}{2V} \left( a(k)a(k')e^{i(k+k')x-2i\omega_k t-2imx_m} - a^+(k)a(k')e^{i(k-k')x} \right. \\ &\quad \left. - a(k)a^+(k')e^{i(k-k')x} + a^+(k)a^+(k')e^{-i(k+k')x+2i\omega_k t+2imx_m} \right) \text{利用式 (3.3.10)} \\ &= -\sum_k \frac{k}{2V} \left( a(k)a(k')V\delta(k+k')e^{-2i\omega_k t-2imx_m} - a^+(k)a(k')V\delta(k-k') \right. \\ &\quad \left. - a(k)a^+(k')V\delta(k'-k) + a^+(k)a^+(k')V\delta(k+k')e^{2i\omega_k t+2imx_m} \right) \end{aligned}$$

注意  $k = k'$  时,  $\delta(k+k') = 1$ ,  $\delta(k-k') = 0$ , 得

$$\begin{aligned} P &= \sum_k \left( \frac{k}{2} a^+(k)a(k) + \frac{k}{2} a(k)a^+(k) \right) \\ P &= \sum_k \left( a^+(k)a(k) + \frac{1}{2} \right) k \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

即  $P = \sum_k \left( N_k + \frac{1}{2} \right) k$ 。这里  $N_k$  是动量为  $k$  的实标量粒子的数量。该式直观地表达了实标量的动量决定于粒子的数量, 是量子化的场。

### 3.3.3 粒子数算符和粒子解释

从式 (3.3.17) 可以看到能量和动量都由算符

$$N(k) \equiv a^+(k)a(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.3.18)$$

确定, 且  $N(k)$  与  $N(k')$  对易

$$\begin{aligned} [N(k), N(k')] &= a^+(k)[a(k), a^+(k')]a(k') + a^+(k')[a^+(k), a(k')]a(k) \\ &= (a^+(k)a(k') - a^+(k')a(k))\delta(k-k') \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

故  $N(k)$  与  $H$  和  $P$  都对易, 它们有共同的本征态, 用  $|n(k)\rangle$  标记, 相应的本征值记为  $n(k)$ , 即有

$$N(k) |n(k)\rangle = n(k) |n(k)\rangle \quad (3.3.20)$$

注意到在对  $k$  积分的意义上, 有

$$\begin{aligned}
 [N(k), a^+(k)] &= [a^+(k)a(k), a^+(k)] = a^+(k) \underbrace{[a(k), a^+(k)]}_{=1} + \underbrace{[a^+(k), a^+(k)]}_{=0} a(k) \\
 &= a^+(k)
 \end{aligned} \tag{3.3.21a}$$

$$\begin{aligned}
 [N(k), a(k)] &= [a^+(k)a(k), a(k)] = a^+(k) \underbrace{[a(k), a(k)]}_{=0} + \underbrace{[a^+(k), a(k)]}_{=-1} a(k) \\
 &= -a(k)
 \end{aligned} \tag{3.3.21b}$$

由此推得

$$N(k)a^+(k)|n(k)\rangle = (n(k)+1)a^+(k)|n(k)\rangle \tag{3.3.22a}$$

$$N(k)a(k)|n(k)\rangle = (n(k)-1)a(k)|n(k)\rangle \tag{3.3.22b}$$

这表明：如果 $|n(k)\rangle$ 有本征值 $n(k)$ ，则 $a^+(k)|n(k)\rangle$ 和 $a(k)|n(k)\rangle$ 分别是 $N(k)$ 的本征值为 $n(k)+1$ 和 $n(k)-1$ 的本征态。这与能量、动量的表示式(3.3.5)和式(3.3.9)一起强烈提示： $N(k)$ 是能量为 $\omega_k$ ，动量为 $k$ 的粒子的产生和湮灭算符。当然，这还有如下要求。

(1)  $n(k)$ 是非负的，这由下式很容易看出。

$$(a(k)|n(k)\rangle)^\dagger (a(k)|n(k)\rangle) = \langle n(k)|a^+(k)a(k)|n(k)\rangle = n(k)\langle n(k)|n(k)\rangle > 0 \tag{3.3.23}$$

由于模方 $\langle n(k)|n(k)\rangle$ 非负，故 $n(k)$ 非负。

(2)  $n(k)$ 必须是整数。由式(3.3.22b)知 $a(k)$ 作用于 $|n(k)\rangle$ ，使 $n(k)$ 减少1，连续作用，将不断减少。唯一避免 $n(k)$ 成为负数的出路在于存在一个基态（真空） $|0\rangle$ ，使得

$$a(k)|0\rangle = 0 \tag{3.3.24}$$

所以，

$$N(k)|0\rangle = a^+(k)a(k)|0\rangle = 0 \tag{3.3.25}$$

这可解释为基态没有粒子。现在，再用 $a^+(k)$ 作用于 $|0\rangle$ 上，每作用一次，就增加1，故 $n(k)$ 必是整数。

这样，把 $N(k)$ 当做粒子数（密度）算符是完全合理的。量子场因此有了粒子解释，量子场论就可以用来描述既有粒子产生又有粒子湮灭的相互作用过程。

### 3.3.4 零点能与生灭算符

#### 1. 零点能

由于 $n(k)$ 是非负的，场的能量

$$H = \int d^3k \omega_k \left( N(k) + \frac{1}{2} \right)$$

是正定的。基态尽管没有粒子，但其能量为

$$E_0 = \langle 0|H|0\rangle = \int d^3k \frac{1}{2} k^0 \rightarrow \infty \tag{3.3.26}$$

这称为零点能。零点能并不参与任何物理过程，可简单地通过平移将它减除，即重新定义能量动量为

$$p'^\mu = p^\mu - \langle 0|p^\mu|0\rangle \tag{3.3.27}$$

## 2. 正规乘积

这里规定产生算符在所有的湮灭算符之前（左边）。算符的这种特定排列次序叫做正规乘积，用 $::$ 或 $N$ 表示。

## 3. 产生算符和湮灭算符

$$a^+(k)|n(k)\rangle = c|n(k)+1\rangle \quad (3.3.28)$$

或者更一般地写为

$$a^+(k_i)|n(k_1), \dots, n(k_i), \dots\rangle = c|n(k_1), \dots, n(k_i)+1, \dots\rangle \quad (3.3.29)$$

$c$  可由态的归一化条件确定如下：

$$\begin{aligned} c^2 \langle n(k)+1|n(k)+1\rangle &= \langle n(k)|a(k)a^+(k)|n(k)\rangle = \langle n(k)|a^+(k)a(k)+1|n(k)\rangle \\ &= (n(k)+1)\langle n(k)|n(k)\rangle \end{aligned}$$

因而

$$c^2 = n(k)+1$$

或精确到一个相因子，有

$$a^+(k)|n(k)\rangle = \sqrt{n(k)+1}|n(k)+1\rangle \quad (3.3.30a)$$

或更一般地写为

$$a^+(k_i)|n(k_1), \dots, n(k_i), \dots\rangle = \sqrt{n(k_i)+1}|n(k_1), \dots, n(k_i)+1, \dots\rangle \quad (3.3.30b)$$

类似地，可得

$$a(k)|u(k)\rangle = \sqrt{n(k)}|u(k)-1\rangle \quad (3.3.31a)$$

$$a(k_i)|n(k_1), \dots, n(k_i), \dots\rangle = \sqrt{n(k_i)}|n(k_1), \dots, n(k_i)-1, \dots\rangle \quad (3.3.31b)$$

一般地，任何动量的粒子都没有的真空态可记为

$$|0\rangle \equiv |0, 0, \dots, 0, \dots\rangle \quad (3.3.32)$$

而具有动量为 $k_1$ 的粒子 $n(k_1)$ 个，动量为 $k_2$ 的粒子 $n(k_2)$ 个，……，一般归一化的态可写为

$$|n(k_1), \dots, n(k_i), \dots\rangle = (n(k_1)!n(k_2)! \dots)^{-1/2} (a(k_1))^{n(k_1)} (a(k_2))^{n(k_2)} \dots |0\rangle \quad (3.3.33)$$

这些就是粒子数表象的态矢量。显然，对 $n(k)$ 的值并没有限制，即在一个态中具有相同动量 $k$ 的粒子数目不受限制。这正是 Bose 子的统计性质。追本溯源，这个性质来自场的对易关系。从图像化的角度来理解，Bose 子没有改变真空场的结构，这种波动是可以重叠的。Fermi 子的中心点的场形变达到应变，是不可重叠的，因此，如果要描述 Fermi 子，并使它服从费密狄拉克统计，就必须修正相应场的对易关系。那时，场的对易关系将被修改为反对易关系。

### 3.3.5 协变对易关系与微观因果性

用来量子化的等时对易关系不是协变的。以后经常要用的是对易子 $[\phi(x), \phi(y)]$ 的值。利用式 (3.3.6)、式 (3.3.7) 和式 (3.3.13) 可得

$$[\phi(x), \phi^+(y)] = \int d^3 k d^3 k' \left( [a(k), a^+(k')] f_k(x) f_{k'}^*(y) + [a^+(k), a(k')] f_k^*(x) f_k(y) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega_k} \left( e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \right) \\
&\equiv i\Delta(x-y)
\end{aligned} \tag{3.3.34}$$

其中,

$$\Delta(x-y) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega_k} \left( e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \right) \tag{3.3.35}$$

可写为

$$\begin{aligned}
i\Delta(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega_k} \left( e^{ik \cdot x} - e^{-ik \cdot x} \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\omega_k} e^{ik \cdot x} \left( e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t} \right)
\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

在得出上式最后一步时, 使用了积分的如下对称关系:

$$\int d^3 k e^{-ik \cdot x} = \int d^3 k e^{ik \cdot x} \tag{3.3.37}$$

把式 (3.3.36) 中的  $e^{\pm i\omega_k t}$  表示为如下的积分:

$$e^{-i\omega_k t} = \int \epsilon(k_0) e^{-ik_0 t} \delta(k_0 - \omega_k) dk_0 \tag{3.3.38a}$$

$$-e^{i\omega_k t} = \int \epsilon(k_0) e^{-ik_0 t} \delta(k_0 + \omega_k) dk_0 \tag{3.3.38b}$$

积分变数  $k_0$  沿动量空间的整个时间轴变化,  $\epsilon(k_0)$  是一个阶跃函数, 它的定义如下:

$$\epsilon(k_0) = \frac{k_0}{|k_0|} = \begin{cases} +1, & \text{当 } k_0 > 0 \text{ 时} \\ -1, & \text{当 } k_0 < 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{3.3.39}$$

把式 (3.3.38) 代入式 (3.3.36) 得到

$$i\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 k \frac{1}{2\omega_k} e^{ik \cdot x} \epsilon(k_0) [\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)] \tag{3.3.40}$$

其中,  $d^4 k = d^3 k dk_0$ 。

利用公式

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x+a) + \delta(x-a)] \tag{3.3.41}$$

是相对论协变的, 通过

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta(k_0^2 - \omega_k^2) = \frac{1}{2\omega_k} [\delta(k_0 - \omega_k) - \delta(k_0 + \omega_k)]$$

将式 (3.3.40) 化为

$$i\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 k \epsilon(k_0) \delta(k^2 + m^2) e^{ik \cdot x} \tag{3.3.42}$$

上式右边的积分区域是整个四维动量空间;  $e^{ik \cdot x}$  是一个 Lorentz 不变的相位因子; 由于  $\delta(k^2 + m^2)$  要求  $k_0 = \pm \omega_k$ , 而且在正 Lorentz 变换下, 未来时间性矢量与过去时间性矢量不会互相转换, 因此,  $\epsilon(k_0)$  在任何一个参考系里或者恒取值+1, 或者恒取值-1。综上所述, 这证明了  $\Delta(x)$  的确是一个 Lorentz 标量函数。

类似地可以证明:

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi^+(x), \phi^+(y)] = 0 \quad (3.3.43)$$

对于厄米标量场，用同样的方法可以得到

$$[\phi(x), \phi^+(y)] = i\Delta(x-y) \quad (3.3.44)$$

从理论的自治性考虑，场的不变对易关系在等时情形下应能导致正则等时对易关系。

### 3.3.6 Feynman传播函数

#### 1. 标量场传播函数

传播函数又称传播子。它和场算符一样，也是描写量子场运动规律的函数。现在来讨论最简单的标量场传播函数。首先回忆一下量子力学里的传播函数。假设  $t$  时刻，在空间某点  $\bar{x}$  处，几率波的振幅为  $\psi(t, x)$ 。按照惠更斯原理，每一空间点  $x$  又是一个点波源，向外发射球面子波。再假定  $t$  时刻，来自  $x$  点的波有一部分到达  $x'$  点，并在该点引起振幅为  $\psi_{t, \bar{x}}(t', x')$  的振动，则  $\psi_{t, \bar{x}}(t', x')$  应与  $\psi(t, x)$  成比例。设比例系数为  $iG(t', x'; t, x)$ ，则

$$\psi_{t, \bar{x}}(t', x') = iG(t', x'; t, x) \psi(t, x), \quad t' > t \quad (3.3.45)$$

$t'$  时刻  $x'$  点的几率波振动是来自较早时刻的所有时空点的振动的总和。因此，

$$\theta(t' - t) \psi_{t, \bar{x}}(t', x') = i \int d^3x G(t', x'; t, x) \psi(t, x) \quad (3.3.46)$$

式中， $G(x', x)$  是两个时空点的坐标差  $x' - x$  的函数，称为传播函数。它是  $t$  时刻  $x$  点的几率波振动于  $t'$  时刻传播到  $x'$  点的几率幅。显然， $G(x', x)$  应满足以下边界条件：

$$G(x', x) \neq 0, \quad \text{当 } t' > t \text{ 时} \quad (3.3.47a)$$

$$G(x', x) = 0, \quad \text{当 } t' < t \text{ 时} \quad (3.3.47b)$$

根据这一条件，当  $t' > t$  时，传播函数  $G(x', x)$  把  $t'$  时刻的波函数  $\psi_{t, x}(t', x')$  与某个初始时刻的波函数  $\psi(t, x)$  联系起来。只要知道了传播函数，就可由任意给定的初始时刻的波函数确定以后各个时刻的波函数。因此量子力学里的传播函数方法与求解 Schrödinger 方程等效。

可以证明，传播函数  $G(x', x)$  是 Schrödinger 方程的 Green 函数。把算符  $i\frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(x')$  作用于式 (3.3.45)。

$$\begin{aligned} \text{左边: } & \left( i\frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(x') \right) \theta(t' - t) \psi(x') \\ &= \left( i\frac{\partial}{\partial t'} \theta(t' - t) \right) \psi(x') + \theta(t' - t) \underbrace{\left( i\frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(x') \right) \psi(x')}_{\text{满足 Schrödinger 方程为0}} \\ &= i\delta(t' - t) \psi(x') = i\delta(t' - t) \int d^3x \delta^3(x' - x) \psi(x) \end{aligned}$$

$$\text{右边: } i \int d^3x \left( i\frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(x') \right) G(x', x) \psi(x)$$

左右相等，得到

$$i\delta(t' - t) \int d^3x \delta^3(x' - x) \psi(x) = i \int d^3x \left( i\frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(x') \right) G(x', x) \psi(x)$$

$$\delta(t'-t)\delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) = \left( i \frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(\mathbf{x}') \right) G(\mathbf{x}', x)$$

$$[i\partial_{t'} - \hat{H}(\mathbf{x}')]G(\mathbf{x}', x) = \delta^4(\mathbf{x}' - x) \quad (3.3.48)$$

可见,  $G(\mathbf{x}', x)$  是 Schrödinger 方程的 Green 函数。因为它满足边界条件式 (3.3.47), 故称为推迟 Green 函数。

现在, 类比于上述非相对论量子力学的情况, 将标量场传播函数  $\Delta_F(\mathbf{x}', x)$  定义为 K-G 方程的 Green 函数。

$$(\square' - m^2)\Delta_F(\mathbf{x}', x) = i(\hbar)\delta^4(\mathbf{x}' - x) \quad (3.3.49a)$$

$$\partial_n^2 \Delta_F(\mathbf{x}', x) = i\hbar\delta^4(\mathbf{x}' - x) \quad (3.3.49b)$$

从式 (3.3.49b) 来理解传播函数, 假设  $t$  时刻, 在空间某点  $\mathbf{x}$  处, 几率波的振幅为  $\psi(t, \mathbf{x})$ 。满足惠更斯原理, 每一空间点  $\mathbf{x}$  又是一个点波源, 向外发射球面子波, 如图 3.3.2 所示。传播函数就是一个球面子波发射源, 这一发射源是几率扩散波。找到粒子时, 该粒子在传播方向上的四维时空的形变量为  $\hbar$ 。由量子场的传播性质可知, 时空的形变为  $\hbar$  才具有传播效应。换言之,  $\Delta_F(\mathbf{x}', x)$  几率波源的波函数为

$$\partial_n [\partial_n \Delta_F(\mathbf{x}', x)] = i\hbar\delta^4(\mathbf{x}' - x) \quad (3.3.50)$$

$$\partial_n \phi(p_n)_{x=x'} = i\hbar\delta^4(\mathbf{x}' - x)$$

$$\partial_n [p_0 - p_1 - \cdots - p_n]_{x=x'} = i\hbar\delta^4(\mathbf{x}' - x)$$

梯度不为 0, 说明是有源场。量子场的密度量在真空场理论中有明确的物理意义, 就是单粒子的量。量子场源时空形变的密度为  $\hbar$ , 说明单粒子的时空应变为  $\hbar$ 。

事实上, 对于自由量子场来说,  $(\square - m^2)\phi(x) = 0$ , 即  $\partial_n [\partial_n \phi(x)] = 0$ 。对比传播函数:

$$\partial_n [\partial_n \Delta_F(\mathbf{x}', x)] = i\hbar\delta^4(\mathbf{x}' - x)$$

自由标量场对于时空而言, 是无源场, 时空形变守恒, 标量场粒子中心具有稳定的球对称结构。当把传播函数视为场函数时, 传播函数中心点处的真空场存在由基本单元场构成的时空泡沫, 中心点极小的区域不再具有球对称结构, 时空形变不再守恒。对于实验而言, 没有可观测性, 所以称之为虚空间。如果仍然用描述点的数学来描述具有时空泡沫结构的中心点, 这样的数学表示无法描述, 将会出现无穷大的结果。

$\Delta_F(\mathbf{x}', x)$  描述由  $x$  点向  $x'$  点的传播过程, 当  $t' > t$  时的解。量子场论里的 Green 函数可表示为场算符时序乘积的真空期望值。 $\Delta_F(\mathbf{x}', x)$  是一个两点 Green 函数, 考虑到条件  $t' > t$ , 可设

$$\Delta_F(\mathbf{x}', x) = \langle 0 | T \phi(x') \phi^+(x) | 0 \rangle, \text{ 对非厄米标量场} \quad (3.3.51)$$

$$\Delta_F(\mathbf{x}', x) = \langle 0 | T \phi(x') \phi(x) | 0 \rangle, \text{ 对厄米标量场} \quad (3.3.52)$$

其中,  $T$  是时序算符, 它由下式定义:

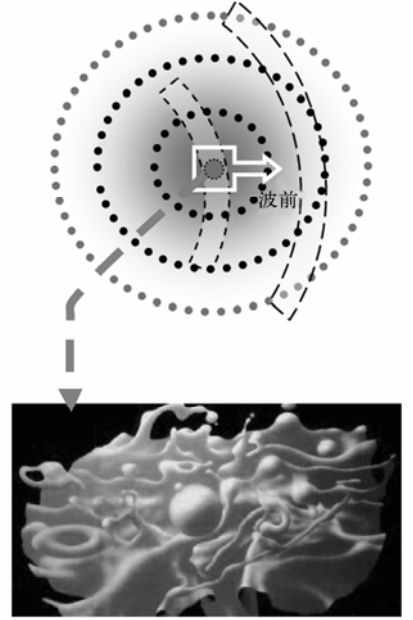


图 3.3.2 发射源中心  $\delta^4(\mathbf{x}' - x)$  处的量子场波动示意图

$$TA(x')B(x) = \begin{cases} A(x')B(x), & \text{当 } t' > t \text{ 时} \\ A(x)B(x'), & \text{当 } t > t' \text{ 时} \end{cases} \quad (3.3.53)$$

$A(x)$  和  $B(x)$  是两个任意的 Bose 场算符。式 (3.3.53) 的符乘积称为时序乘积或编时乘积。

容易证明, 式 (3.3.51) 和式 (3.3.52) 确实满足式 (3.3.49)。为此, 将式 (3.3.51) 代入式 (3.3.49), 并注意, 在  $t' > t$  和  $t' < t$  的两种情形下,  $\Delta_F(x', x)$  分别变为如下两种形式。

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x') \phi^+(x) | 0 \rangle &= \langle 0 | \phi^{(+)}(x') \phi^{+(-)}(x) | 0 \rangle = \langle 0 | [\phi^{(+)}(x'), \phi^{+(-)}(x)] | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{2\omega_k} \langle 0 | [a_k, a_k^+(x)] | 0 \rangle e^{ik \cdot (x' - x)} \end{aligned} \quad (3.3.54a)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi^+(x) \phi(x') | 0 \rangle &= \langle 0 | [\phi^{+(-)}(x), \phi^{(-)}(x')] | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{2\omega_k} \langle 0 | [b_k, b_k^+(x)] | 0 \rangle e^{-ik \cdot (x' - x)} \end{aligned} \quad (3.3.54b)$$

## 2. 传播函数的积分表示

传播函数的积分表示式对于实际计算很有用, 以厄米标量场为例。为了方便, 令  $x = 0$ , 并把  $x'$  改记为  $x$ , 由式 (3.3.54) 可得

$$\begin{aligned} \Delta_F(x) &= \theta(t) \langle 0 | \phi(x') \phi^+(x) | 0 \rangle + \theta(-t) \langle 0 | [\phi^+(x'), \phi(x)] | 0 \rangle \\ &= \theta(t) \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{2\omega_k} e^{ik \cdot x} + \theta(-t) \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{2\omega_k} e^{-ik \cdot x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} [\theta(t) e^{ik \cdot x} + \theta(-t) e^{-ik \cdot x}] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{ik \cdot x} [\theta(t) e^{-i\omega_k \cdot x} + \theta(-t) e^{i\omega_k \cdot x}] \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

现在,  $\frac{1}{\omega_k} e^{\pm i\omega_k \cdot x}$  表示为复  $k_0$  平面上的围道积分。具体做法是: 当  $t > 0$  时, 选择闭合积分围道为  $c_F$  (即实轴, 不包括  $k_0 = \pm\omega_k$ ) 和下半平面内的无限半圆, 并计算沿此反向闭合围道的积分。

$$-\int_{c_F + \text{下无限半圆}} \frac{e^{-ik_0 t}}{k^2 + m^2} dk_0 = -\oint_{\text{顺时针}} \frac{e^{-ik_0 t}}{-(k_0^2 + \omega_k^2)} dk_0 = \oint_{\text{逆时针}} \frac{e^{-ik_0 t}}{-(k_0^2 + \omega_k^2)} dk$$

注意到积分围道包围被积函数的极点  $k_0 = \omega_k$ , 则利用 Cauchy 残数定理极易得到上述的积分结果为  $-\pi i \frac{e^{-i\omega_k \cdot x}}{\omega_k}$ , 因此, 可得

$$\frac{1}{\omega_k} e^{-i\omega_k \cdot x} = \frac{1}{\pi i} \int_{c_F} \frac{e^{-ik_0 t}}{k^2 + m^2} dk_0 \quad (3.3.56)$$

同样, 当  $t < 0$  时, 在上半平面内加一无限半圆, 与  $c_F$  一起, 构成一个正向闭合围道, 它包围函数  $\frac{e^{-ik_0 t}}{k^2 + m^2}$  的极点  $k_0 = -\omega_k$ 。利用残数定理计算沿此闭合围道的积分

$$\int_{c_F + \text{上无限半圆}} \frac{e^{-ik_0 t}}{k^2 + m^2} dk_0$$

便得到

$$\frac{1}{\omega_k} e^{-i\omega_k t} = \frac{1}{\pi i} \int_{c_F} \frac{e^{-ik_0 t}}{k^2 + m^2} dk_0 \quad (3.3.57)$$

对于  $t > 0$  的情况将式 (3.3.56) 代入式 (3.3.55)，而对于  $t < 0$  的情况将式 (3.3.57) 代入式 (3.3.55)，在这两种情况下均得到下式：

$$\Delta_F(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{c_F} dk_0 \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 + m^2} \quad (3.3.58)$$

还可把积分围道稍作变化，使  $c_F$  与  $k_0$  实轴重合。这只要如图 3.3.3 所示，把复  $k_0$  平面上的坐标架转动一个无穷小角度，使被积函数的极点  $k_0 = \pm\omega_k$  分别移动到实轴的下方和上方，成为  $k_0 = \pm\omega_k \mp i\varepsilon$  ( $\varepsilon$  是一个无限小的正数)。在进行了这种变化之后，式 (3.3.58) 变为

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \Delta_F(k) e^{ik \cdot x} \quad (3.3.59a)$$

此式便是标量场传播函数  $\Delta_F(x)$  的坐标空间表示式。

它是一个四维傅里叶积分展式。其傅里叶分量

$$\Delta_F(x) = \frac{-i}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (3.3.59b)$$

便是传播函数的动量空间表示式。其中，无穷小的虚数  $-i\varepsilon$  规定了积分围道，从而确定了  $\Delta_F(x)$  的时序。

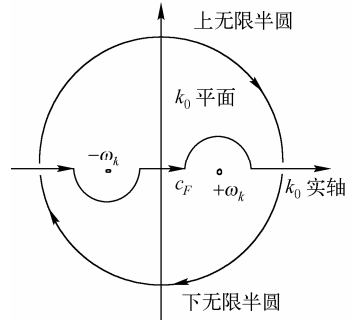


图 3.3.3 传播子  $\Delta_F(x', x)$  的积分围道

### 3. 传播函数的物理意义<sup>①</sup>

现在要讨论量子场的传播，以非厄米标量场为例，来看一个正粒子场态，这样一个单粒子场态可以用如下态矢量来描写：

$$\phi^+(x)|0\rangle = \phi^{+(-)}(x)|0\rangle = \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} a_k^+ |0\rangle e^{-ik \cdot x} \quad (3.3.60)$$

上式右边是许多具有确定能量、动量的一粒子态的组合，因而左边是一个能量、动量无定值的一粒子态。对于任何给定的坐标值  $x_2$ ， $\phi^+(x_2)|0\rangle$  确定场在时空点  $x_2$  的运动状态，这里称它为  $t_2$  时刻， $x_2$  点的场态。显然， $x_2$  点的场振动向着较晚时刻的时空点传播。此振动于  $t_1$  时刻传播到  $x_2$  点的几率幅，或者说，在  $t_2$  时刻  $x_2$  点的场态中找到  $t_1$  时刻  $x_1$  点的场态的几率幅是  $\langle 0 | \phi(x_1) \phi^+(x_2) | 0 \rangle$ 。

$$\langle 0 | \phi(x_1) \phi^+(x_2) | 0 \rangle = \Delta_F(x_1 - x_2), \text{ 当 } t_1 > t_2 \text{ 时} \quad (3.3.61)$$

对于一个反粒子场态，

$$\phi(x)|0\rangle = \phi^{(-)}(x)|0\rangle = \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} b_k^+ |0\rangle e^{-ik \cdot x} \quad (3.3.62)$$

假定  $t_2 > t_1$ ，则  $t_1$  刻  $x_1$  点的场振动于  $t_2$  时刻传播到  $x_2$  点的几率幅是  $\langle 0 | \phi^+(x_2) \phi(x_1) | 0 \rangle$ 。

$$\langle 0 | \phi^+(x_2) \phi(x_1) | 0 \rangle = \Delta_F(x_1 - x_2), \text{ 当 } t_2 > t_1 \text{ 时} \quad (3.3.63)$$

传播函数  $\Delta_F(x_1 - x_2)$  对于场在任意两个时空点之间的传播过程给出统计性的预言。场振动的激发、传播和退激的过程与粒子的产生运动和湮灭的过程，是量子场运动过程的两个方面。当  $t_1 > t_2$  时， $\Delta_F(x_1 - x_2)$  同时又是  $t_2$  时刻在  $x_2$  点产生一个粒子（能量、动量无定

① 李淮江. 量子场论导引. 云南科技出版社, 1989, p156.



值), 这个粒子于  $t_1$  时刻传播到  $x_1$  点并在该点湮灭的几率幅。而当  $t_2 > t_1$  时,  $\Delta_F(x_1 - x_2)$  又是在  $t_1$  时刻在  $x_1$  点产生一个反粒子 (能量、动量无定值), 这个反粒子于  $t_2$  时刻传播到  $x_2$  点并在该点湮灭的几率幅。综上所述, 传播函数对量子场运动过程给出统计性的预言。

另一方面, 传播函数的表示式 (3.3.59) 还显示了量子场运动的一个重要特征。式 (3.3.59) 在物理粒子的质壳处, 即  $k^2 = -m^2$  处有一极点。这就表明, 传播函数所描写的过程并不是在迄今为止人们所能观测到的物理世界中发生的。恰恰相反, 对于量子场的上述传播过程而言, 可观察的物理粒子反映为一个数学意义上的极点。由于  $k^2 \neq -m^2$ , 所以按照  $|\Delta_F|^2$  的几率伴随场振动的激发、传播、退激而不断产生、传播、湮灭的粒子是一些所谓的“虚粒子”。而传播函数  $\Delta_F$  所描写的上述过程也是一些所谓的“虚过程”。这些“虚过程”在实验上是观测不到的, 被封闭在粒子内禀空间中。

如上所述, “虚粒子”、“虚过程”这些概念, 都是从量子场论的理论体系里自然地产生出来的。既然量子场论还只是一个带有过渡性质的微观物理学理论, 所以这些概念对于人们进一步探索微观世界的本质也只具有暗示和启发的意义。理论上预言: 在自然界存在着实验上观测不到的“虚粒子”和“虚过程”。这意味着, 在已知的物理世界之外还存在着一个广阔的未知世界, 这就是真空。真空是量子场的一种运动状态, 即量子场基态。反过来, 可以把量子场的激发态看成是真空的“激发态”。场振动的激发、传播、退激以及与之相应的“虚粒子”产生、传播、湮灭, 这些都与真空物质的运动有关。自然, 还应当提出如下的问题。例如, 由态矢量式 (3.3.60) 或式 (3.3.62) 所描写的量子场激发态是可以用实验方法观测到的, 而由传播函数所描写的过程又是不可观测的, 那么, 这两者有什么联系呢? 论上又应当如何反映这种联系呢? 对于这个问题, 人们用费曼图和数学的语言把物理粒子和上述的“虚过程”联系起来。但这种形式的回答完全是唯象的。它并未回答真空物质是什么, 真空与非真空的物理联系是什么。显然, 这些问题远远不是量子场论所能回答的。

上述的全部讨论是在自由场理论的范围内进行的。应当指出, 本章所给出的传播函数只是量子场的所谓“全传播子”的零次近似。

## 第4章 引力场

相对论的真空是空无的，量子场理论的真空却不空，真空是量子场的基态。如何从真空不空的角度来重新理解相对论是本章的基本内容。

### 4.1 概述

对于引力的传递，现代的观点是<sup>①</sup>，“引力如电磁力和其他所有基本相互作用一样通过局域场而作用：一个质点产生一个场，这个场对它接触到的任何物质产生作用。”换言之，物质间通过交换“引力子”来传递相互间的引力。真空场论认为引力源自于存在大范围的真空背景场形变，这种形变力图恢复平直态，这样便产生了万有引力。匀速静态的引力没有必要通过交换“引力子”来传递相互间的引力；动态的质量则可通过交换引力子来实现引力相互作用，和电磁相互作用类似，两种作用形式都存在。

对于上述结论的理解，有必要先简要地从真空场的角度对时空性质及相对论做一个简短的概述。粒子内部场形变会对周围的场产生极其微小的形变。粒子越“硬”，对周围的背景场影响越大；而粒子越“软”，对周围的背景场影响越小。这种粒子内部场形变对周围的场造成的大范围的微小的整体形变的真空场定义为引力场，对周围真空场影响的大小定义为引力质量。宏观表现为存在引力，质量构成引力的源。

#### 4.1.1 狭义相对论时空

##### ● 狭义相对论建立的两个基本原理

(1) 光速不变原理：自由空间中，光传播速度具相同的数值，与惯性系的运动速度无关，与光源速度无关。（四维闵可夫斯基空间—对称群—洛伦兹群）

(2) 狭义相对性原理：物理学定律在所有惯性系中具有不变的形式，即惯性参照系的完全等价。（物理量的协变性——物理量（张量）满足协（逆）变变换，这一性质要求采用张量进行描述）

洛伦兹变换：通俗地讲就是光速不变性导致当我们以接近光的速度运动时，就会发生尺缩钟慢的效应。例如，沿  $x$  方向运动，洛伦兹变换为

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

洛伦兹变换说明时间与空间通过因子  $u/c$  关联。高速运动产生效应归纳为：

$$(1) \text{ 长度收缩 } l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}; \quad (2) \text{ 时间延缓 } \tau = \tau_0 / \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}};$$

<sup>①</sup> [美] H.C.瓦尼安, [意] R.鲁菲尼 著. 向守平, 冯珑珑 译. 引力与时空. 科学出版社, 2006, p2.

$$(3) \text{ 相对质量 } M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; (4) \text{ 多普勒效应 } \nu = \frac{\nu_0 \left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

● 时空间隔:  $ds^2 = (ct)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ , 间隔不随参照系变换而改变。

四维时空分为三个区域:

(1)  $ds^2 = 0$ , 事件在光锥面; (2)  $ds^2 > 0$ , 事件在光锥内; (3)  $ds^2 < 0$ , 事件在光锥外。时空是四维, 事件对应四维时空中一个点—世界点, 时空的三个区域—光锥的面、内、外区域中的事件各自相关, 区域之间无关联。

最初学习狭义相对论时, 常常会产生这样的困惑: 为什么光速不变? 惯性参照系为什么会等价? 这一困惑源自于真空是空无的, 其实这一切强烈的显示出时空是一体的, 不是空无的, 只有弄清时空结构性质, 才能明白狭义相对论的两个基本原理。

### 4.1.2 广义相对论时空

广义相对论的理论框架

(1)  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , 线元, 当  $\mu = \nu$ , 为时空间隔;

(2)  $\nabla_\mu \phi^\nu = \partial_\mu \phi^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \phi^\lambda$ , 协变微商, 引力和相互作用;

(3)  $\frac{d^2 x^\mu}{d^2 \tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu dx^\alpha dx^\beta = 0$ , 粒子短程线方程;

(4)  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ , 引力场方程。

广义相对论的主要结论是: 引力是空间的弯曲。时空发生弯曲—黎曼几何学—引力和引力作用由联络描述。产生长度收缩、时间延缓、粒子走短程线效应。

对于广义相对论, 当引入真空背景场后, 理论会变得更加完美。

### 4.1.3 测量协变与协变场

#### 1. 平直真空概念

如图 4.1.1, 当真空场没有任何形变时, 换言之, 基本单元真空场的应变

$$\varepsilon_{ij} \equiv 0 \quad (4.1.1)$$

由这种有限多的基本单元真空场紧密地“黏合”起来, 构成一个完整的三维平直场  $\Omega_0$ , 这种场就是平直真空场。这种场所表现出的特性无任何可观测效应, 容易形成一种错误的概念, 即认为真空是空无的, 所以要特别注意无任何可观测效应并不意味着真空是空无的, 真空充满了三维平直真空场这种物质, 从时空的角度来看也可称为平直时空  $\Omega_0$ 。

当基本单元真空场处于平直状态时, 光线传播的路径为直线。而发生微小形变的基本单元真空场构成的场为整体形变的真空场, 如图 4.1.2 所示的  $\Omega$ , 此时光线传播的路径为曲线。

$A'$  为发生微小形变的基本单元真空场, 其应变为

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{ij} \neq 0 \\ \varepsilon_{ij,k} \neq 0 \end{array} \right\} \quad (4.1.2)$$

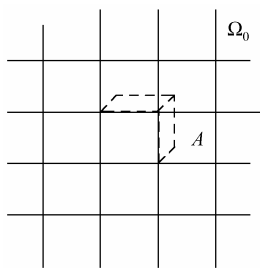


图 4.1.1 平直真空场

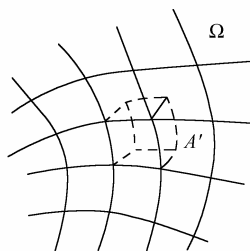


图 4.1.2 弯曲空间

这类场应变不为 0 的真空场基本单元“黏合”起来且是连续的，这样便构成了整体形变真空场  $\Omega$ ， $\Omega$  真空场称为协变场，于是这里做出如下定义：由基本单元真空场紧密、无间隙地构成的整体真空场称为协变场。

协变场可分为平直协变场  $\Omega_0$  和弯曲协变场  $\Omega$ （彼此是相对的）。对于“平直”和“弯曲”的判定要视具体的参照系而定。

对于弯曲协变场中的任一基本单元真空场， $\varepsilon_{ij} \neq 0$  且  $\partial \varepsilon_{ij} / \partial x \neq 0$ ，也就是说应变是非均匀的，那么在和真空场参照与相对处于非自由状态的参照中存在可观效应，这种可观效应表现为力场，在大范围场中，最为熟知的是引力场。

这里的“弯曲”并不是真空场整体几何意义上的弯曲，特指真空场形变（“硬化”）所造成的时空弯曲效应，表现为光的传播速度不均匀导致的传播路径弯曲所构成的时空弯曲。相对于量子场而言，时空弯曲是背景空间弯曲，因而这种弯曲效应也存在于任何物质中，因为任何物质都是由量子场构成的，量子场具有传播特性。

尽管爱因斯坦本人当时并不承认真空存在物质，但是他所采用的黎曼几何（对弯曲时空进行描述的数学工具）也是最适合表述协变场的，存在应变的整体场正是弯曲时空，虽然在这里真空充满了真空场，但所表现出的时空弯曲效应和爱因斯坦所构想的弯曲时空在表述上是完全一致的。真空场的测度是以物质为基础的。

## 2. 引力场所要满足的条件（应变协调方程）

变形协调方程保证了所研究的真空场不致发生断裂，仍然保持三维性质。应变协调方程给出了场应变的边界条件。

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (4.1.3)$$

这就是存在单值连续位移场的充分必要条件。上式在推导的过程中，用了连续函数的求导顺序无关性，本质是满足形变连续条件，也就是应变协调方程。此式是各应变分量二阶偏导数间的恒等式，也称圣维南（Saint-Venant）恒等式。

式（4.1.3）决定了量子场和引力场的区别，应变协调方程不满足时，说明真空场破裂，这种破裂的真空场构成量子场最重要特征。应变协调方程被满足时，真空场满足形变连续条件，真空场没有发生破裂，这种没有破裂的真空场形变构成引力场。在真空场理论中，该方程的满足与否可以作为判别量子场和引力场的一个重要判据。

## 4.2 测量协变性

实验毫无疑问证明了光是一种波。但是，如果光是一种波的话，那就需要一些使它发生振动的“媒质”。声波需要空气，水波需要水，而在真空中却没有可以使光波振动的东西，人们对此深感疑惑。没有使光波振动的媒质，它怎能成为波呢？于是物理学家们就捏造出所谓的以太物质，这种物质作为光的媒质充满真个真空的空间。然而，实验却无可辩驳地证明了“以太”并不存在（令人惊异的是，直到如今，物理学家对这一难题仍然没有做出真正的回答，但数十年来，人们却对这样的思想习以为常：即使没有什么媒质，光照样可以在真空中传播）。

——加来道雄<sup>①</sup>

相对论和量子力学是现代物理学的两大基石。相对论的真空是空无的，量子场理论的真空却不空，两种理论存在共同的出发点吗？现在来考虑这一基本问题。狭义相对论的两条基本假设归结如下：

（1）物理学定律在所有惯性系中具有不变的形式；

（2）自由空间中，光传播速度具有相同的数值，与惯性系的运动速度无关，与光源速度无关。

在广义相对论中，上述两条基本假设中的惯性系被推广至任意参照系，一切参照系都是平权的，并且把第一条基本假设称为广义协变原理。

爱因斯坦在晚年时一再强调“真空不空”的观点<sup>②</sup>。两高能粒子相撞产生更多的粒子使我们意识到物质不能凭空产生，真空不空已是一个不争的事实。在量子场论中，所有的粒子都是基态场的激发态，而真空则是量子场的基态。我们把基态量子场及其激发态统称为量子场，因而把时空视为由量子场构成是一种对“真空不空”无法回避的自然的推论。本书暂把真空的性质限制在量子场的范畴。

### 4.2.1 测量协变原理

高斯考虑过下述问题<sup>③</sup>：假想有一个二维曲面，上面居住着有理智的两维动物，它们能够确定它们的空间是弯曲的吗？仅仅借助在曲面内所做的测量，有可能确定各个曲率要素吗？高斯发现这确实是可以办到的，首先依照一种既有规律又相当任意的方式对曲面上的点进行标记，任意两族曲线  $x_1 = \text{常数}$  和  $x_2 = \text{常数}$  构成了坐标系，如图 4.2.1 所示。直接测量点  $a$  和  $b$  间的长度，得  $g_{22}$  同样，测量  $ac$  和  $cd$  的长度，得  $g_{12}$  和  $g_{11}$ ，得出了一组公式，使曲率可以用度规及其导数表示。

曲率是一种内在的属性，任何一给定点上的曲率在各坐标

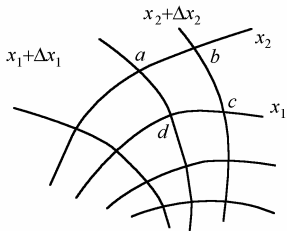


图 4.2.1 二维弯曲空间

① 加来道雄. 超越时空. 上海科技教育出版社, p9.

② 倪光炯, 李洪芳. 近代物理. 上海科学技术出版社, 1979, p31.

③ [美] J. 韦伯. 广义相对论与引力波. 陈凤至, 张大卫 译. 北京: 科学出版社, 1979.

中均有相同的值。爱因斯坦的引力理论将空间的曲率同应力和能量的分布联系起来。在这里，当尺子从一点到另一点时，尺子的长度不发生改变，尺子和曲面是独立的，互不影响。

像高斯的“书虫”一样，黎曼曾提出过一种物理学绘景，描绘了一个生活在一张纸上的二维动物。把这些书虫放在一张弄皱的纸上，这些书虫们将会把它们的世界想像成什么呢？黎曼认为，它们仍会推断它们的世界是完全平坦的，因为它们的身体也将被弄皱，这些书虫们从没注意到它们的世界被扭曲了。然而，黎曼指出，如果这些书虫企图在这张皱纸上运动，它们将觉得有一种神秘的看不见的“力”在阻止它们沿直线运动。每当它们的身体越过纸上的一道皱纹，它们会被推得左右晃动。这里已引入了力场，力场是由皱纹的存在造成的。二维虫和纸受到相同的力，但如果距离不同，二维虫和纸的效应不同，这才使得虫子在越过纸的皱纹时会晃动。

如果这种二维书虫是嵌入在这张弄皱的纸面上的，如果这一张嵌有二维书虫的纸处于自由下落状态，那么这些书虫在这张皱纸上运动时，将没有任何感觉，这一效应就是测量协变。

现在来考虑我们所生存的四维时空情况。从量子场的角度来看，量子场基态构成了时空。由于所有的物质都由费米子构成，是真空基态场的激发态。因而尺子本身也由费米子构成，为基态场的激发态。尺子以及人类自身都是场的激发态。换言之，人类的理智和测量工具都“浸没”于量子场基态中，不能离开场（时空）而独立存在，物质和真空是场的不同形态。现在来建立“测量协变”的概念。

图 4.2.2 (a) 为平直真空场的示意图。可以建立一个最简单的直角坐标系。我们和尺子都浸没于基态场中。当整个真空场大范围发生形变时，我们能够感知吗？此时原来的坐标架由  $x, y, z, t$  变为  $x', y', z', t'$ ，这时我们能够测出坐标变化吗？高斯的方法是否可行？得到的结果十分惊人，答案是否定的。

现在具体来看一个例子。平直空间无引力存在，度规张量  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ，如图 4.2.2 所示。设角尺为  $L(L_x, L_y)$ 。当真空场发生弯曲时，在弯曲空间中，度规  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  存在引力场。以地球为参照系，考虑一种最简单的情况：在自由下落的箱体中，角尺在弯曲空间  $A$  处的初速度为  $V_A = 0$ ，时间为  $t$ ，浸没于基态场中的尺子和时钟随时空的弯曲也发生相应的弯曲，当  $L$  自由下落至弯曲空间  $B$  处时，瞬态速度  $V_B = v \neq 0$ ，尺子也随空间改变而改变，考虑沿  $y$  运动方向，尺子由静止时的长度  $L_y$  收缩为  $L'_y$ ；时间由  $t$  变为  $t'$  而发生膨胀，满足

$$L'_y = L_y \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad t' = t / \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (4.2.1)$$

这里，由低速态  $A$  变为高速态  $B$  对应空间收缩，时钟变慢。不同速度对应不同的时空收缩态。每一种不同形式的时空态都对应一个参照系。但随尺子运动的我们在  $A$  处和  $B$  处测量到的结果却完全相同。不仅如此，连理智也随着场的弯曲而发生相应的弯曲（这里的真空场无破裂）。于是智者用尺子精确测量出来的结果没有任何变化。对于在真空场中运动的光波，显然随着场的弯曲，其传播的轨迹也发生弯曲。那么我们这些智者便无法感知空间的形态。于是人类自己不可避免地要发生测量协变。换言之，在自由下落的箱体中，我们没有任何感觉。由于感知和观测一起随空间改变而改变，最终导致无法感知空间的形态变化。我们把这种效应定义为测量协变。具有测量协变效应的参照系为惯性参照系。由于背景真空场的形态变形是任意的，因而这里所指的空间的惯性参照系可以推广至任意参照系。

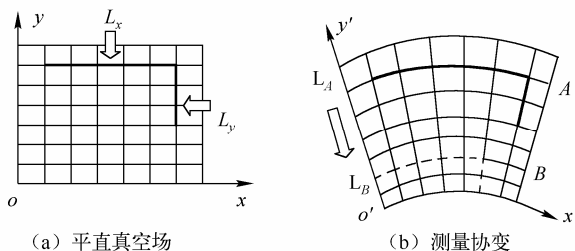


图 4.2.2 时空的测量

由此可见，高斯所谈及的尺子、曲面和理智都是相互独立的，满足这样的条件才能感知出二维曲面的形态，并建立相应的几何学。测量协变效应使平直空间和弯曲空间失去了判别的标准。由于存在测量协变，因而对弯曲空间我们无法感知，所有的一切在我们看来和平直空间完全一样，所有的运动规律和运动形式也没有任何变化，换言之，物理学定律  $F$  在平直场变为某一形变场时变成为  $F'$ ，没有变化。即

$$F \equiv F', \quad \partial F / \partial F' \equiv 1 \quad (4.2.2)$$

这表明物理学定律在任何参照系中都应有相同的形式，而且参照系并无优劣之分。这正是广义协变原理。例如在弯曲空间中，存在引力场。当处于自由下落的状态时，我们失去了对空间的判断能力，于是我们认定空间是平直的，即

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (4.2.3)$$

为测量协变效应。这正是真空中的爱因斯坦场方程。

## 4.2.2 参照系间的相对性

真空不空的引入，会产生这样的疑问：真空物质本身会构成一个自然的参照系，这样真空不空就意味着存在一个绝对参照系，因而便会破坏参照系间的相对性。情况是否如此呢？其实测量协变效应的存在使得参照系间的关系满足相对论。

现在来具体考虑两个参照系  $S$  和  $S'$ 。在  $S$  参照系中建立一个“平直”坐标系  $x^\mu (x^0, x^1, x^2, x^3)$ 。这里要特别注意的是由于测量协变效应的存在，参照系内所有的费米子和玻色子都随背景真空的弯曲而弯曲，时空的弯曲与否是以光的路径和直尺为基础的，因而我们对自身参照系的时空弯曲一无所知，平直空间和弯曲空间失去了判别的标准。

时空不存在绝对平直，“平直”本身失去了意义。对于另一个参照系  $S'$  来说，在  $S'$  参照系内同样可以建立一个“平直”坐标系  $x'^\mu (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ 。处于  $S'$  参照系内用直尺和光线对坐标系进行“校准”，同样认为坐标系  $x'^\mu$  是“平直”的。从  $S'$  参照系观测  $S$  参照系，则认为  $S$  参照系内的坐标系  $x^\mu$  是弯曲的；反之，从  $S$  参照系来观测  $S'$  参照系，则认为  $S'$  参照系内的坐标系  $x'^\mu$  是弯曲的。两个坐标系间存在如下关系：

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (4.2.4)$$

设想把  $S$  参照系内的测量工具  $dx^\nu$  如直尺、激光源和钟搬运到  $S'$  参照系内来“校准” $S'$  参照系内的坐标系  $x'^\mu$  是否平直，当  $S$  参照系内的测量工具进入  $S'$  参照系内之后，这些工具也随  $S'$  参照系弯曲而弯曲，使得  $dx^\nu = dx'^\mu$ 。这样由这批外来工具所测量到的坐标系  $x'^\mu$  仍然是平直的。

当两个参照系相互分离,彼此独立时,对时空进行大范围的测量,而不是在局域时空内进行测量,能摆脱测量协变,而测出时空的弯曲。于是由  $S$  参照系可以观测到  $S'$  参照系是弯曲的;而  $S'$  参照系则同样可以观测到参照系  $S$  是弯曲的。值得注意的是测量协变效应发生在局域时空。这里“弯曲”是相对的,是由所在参照系的位置决定的。参照系的位置不同,观测到的结果也不同,参照系是平衡的,参照系不存在优劣之分。这正是相对性原理。

### 4.2.3 光速不变原理

粒子为真空场的激发态,现在来考虑真空场发生形变的情况,如图 4.2.3 所示。参照系  $S$  中  $\gamma$  为光子,光子的传播速度为  $c$ ,即为光速,  $i, j$  分别为两个不同质量、不同运动速度的费米子场,  $i$  的速度为  $v_i$ ,  $j$  的速度为  $v_j$ 。

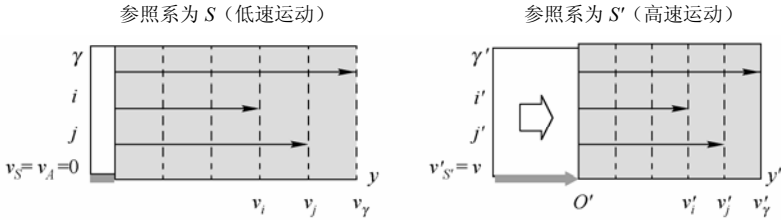


图 4.2.3 光速不变原理

在引力场中处于自由状态的参照系  $S$  (如图 4.2.2 所示) 沿  $y$  由  $A$  处自由下落至  $B$  处的速度为  $v$ ,  $S$  由低速态变为高速态  $S'$ , 基态场  $S$  被压缩为  $S'$ ,  $S$  参照系空间被压缩后, 光子  $\gamma'$  的传播速度为  $c'$ ,  $i', j'$  的运动速度为  $v'_i, v'_j$ 。时空(基态场)的形变使得

$$c : v_i : v_j = c' : v'_i : v'_j \quad (4.2.5)$$

即比例关系不变。这样便明显地发生测量协变, 测量协变与方向无关。在  $S'$  中时空在  $y$  方向被压缩, 以光子的运动作为基准尺度和基准时钟。基准时钟和基准尺度一起被压缩, 因而所测量的结果没有任何变化, 在  $i'$  看来  $\gamma'$  的传播速度仍为  $c$ ,  $j'$  的速度也没有变化。

对于做匀速运动的两个参照系, 设想两个完全相同的体系分别处于低速态(匀速)  $S$  和高速态(匀速)  $S'$ , 以低速态  $S$  为参照系, 则  $S'$  基态场沿运动方向被均匀压缩, 同样存在  $c : v_i : v_j = c' : v'_i : v'_j$ , 即光速不变。反之, 若以  $S'$  为低速态参照系观测  $S$ , 则  $S$  时空为压缩态, 彼此是相对的。因而光速不变原理的本质源自于测量协变。

对于光速来说, 每一个参照系都对应一种真空场的形态。设想在宇宙飞船中, 假设我们现在正处于掉进黑洞的自由落体过程中, 强大的引力使得我们所处的参照系的真空场发生形变, 这样光子的传播速率就会降低, 相应的费米子传播速率也会降低, 所有基本粒子的运动都以波的形式传播。它们之间的相对比例关系不变。我们在飞船中对光速进行测量, 飞船中的基准时钟和基准尺度也是由费米子构成的, 它们一起被形变, 因而所测量的结果没有任何变化, 这样便明显地发生测量协变, 因而在任何具有测量协变效应的参照系中, 光速没有任何变化, 这便是光速不变原理。测量协变效应的产生源于真空不空, 与真空的结构无关。

真空不空会导致测量协变效应的产生, 由测量协变效应能得出自洽的相对论两条基本假设。相对论的真空是不空, 这一结果对相对论没有影响。相对论和量子理论真空都是不空



的, 存在物质。

## 4.2.4 潮汐力

### 1. 潮汐力的形成<sup>①</sup>

前面讨论了测量协变原理, 根据这一原理, 假设有一艘在环绕地球轨道上的宇宙飞船, 如图 4.2.4 (a) 所示。该飞船在自由下落, 宇航员认为自己处于  $g=0$  的环境中, 处于失重状态, 感觉不到引力。然而我们现在要问: 地球的引力作用会完全被自由落体抵消吗? 宇航员能否通过某种局域实验发现他们是在引力场中下落? 如果宇航员找到一种实验方法发现他们正处于引力场中的自由下落状态, 那么测量协变原理将遭到破坏。事实上, 回答是肯定的。宇航员可以通过引力场产生的潮汐力作用而发现引力场。宇航员在他们的飞船中心放置一个液滴, 表面的张力使液体呈现球形 (无引力情况下)。在自由下落态时, 他们将发现液滴不是精确的球体, 而是变为像一个鸡蛋, 具有两个凸起。一个凸起指向地球, 另一个则相反。这种偏离表面有引力场存在, 液滴靠近地球的一端被引力拉得过多, 而另一端则拉得不够。

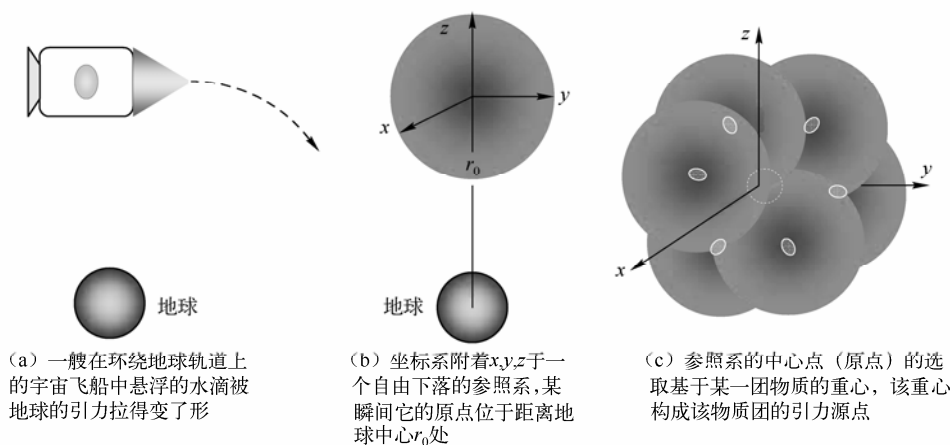


图 4.2.4 潮汐力的示意图

造成凸起的称为潮汐力。可以对潮汐力进行计算。考虑一个自由下落的参考点, 取代该点作为自由下落的参考系的原点, 并使参考系的  $z$  轴平行于半径线, 如图 4.2.4 (b) 所示。一个在此参考系中位于  $(0, 0, z)$  的粒子经受的引力加速度为

$$-\frac{GM}{(r_0 + z)^2} \quad (4.2.6)$$

其中,  $r_0$  是从地球中心到坐标系原点的距离,  $M$  是地球的质量。由于原点具有加速度  $-GM/r_0^2$ , 该粒子相对于原点的加速度在  $z$  很小的情况下是

$$-\frac{GM}{(r_0 + z)^2} + \frac{GM}{r_0^2} \approx 2z \frac{GM}{r_0^3} \quad (4.2.7)$$

<sup>①</sup> [美]H.C.瓦尼安, [意]R.鲁菲尼 著. 向守平, 冯珑珑 译. 引力与时空. 科学出版社, 2006, p29.

因此，相对于原点，该粒子的运动好像是受到一个力：

$$f_z = 2z \frac{GM}{r_0^3} \quad (4.2.8)$$

这就是潮汐力。它正比于粒子到原点的距离，并且是斥力。

对于一个位于  $(0, y, 0)$  的粒子，潮汐力指向  $-y$  方向并且为

$$f_y = -y \frac{GM}{r_0^3}$$

这是一种潮汐恢复力，朝向原点。对于一个位于  $(x, 0, 0)$  的粒子，潮汐力指向  $-x$  方向，并且为

$$f_x = -x \frac{GM}{r_0^3}$$

这也是一种潮汐恢复力，朝向原点。粒子在上述三个力的同时作用下，具有  $x, y$  和  $z$  的位移。这种效应使得一个由许多粒子构成的液滴将在径向上被拉长，而在横向上被压缩。值得注意的是这些潮汐力的表达式只有当位移  $x, y, z$  与  $r_0$  相比很小才适用。

## 2. 潮汐力对测量协变的破坏

根据测量协变原理，整个飞船和宇航员都会随背景空间的弯曲而弯曲，这样在飞船中就无法通过局域实验得知引力场的存在。事实上，由于潮汐力的存在，使得飞船内可以通过观测悬浮液滴的形状得知引力场的存在，这就破坏了测量协变原理。考虑如下两个方面的因素。

(1) 如果整个飞船和宇航员都是由同样的液体物质构成的，那么测量协变就会严格成立。物质的材质不同，分子间的电磁力不同，这意味着有其他力（原子内电磁力）的参与。由于电磁力和引力是相互独立的两种力，在引力背景改变的情况下，背景空间对物质团的改变会存在差异，这样测量协变原理就会被破坏。如钢球和水球在相同的非均匀引力场背景中，钢球的形变接近于 0，而水球则会发生小的变形。这种破坏是微小的，如同惯性原理一样，测量协变原理只存在于理想状态。对于实际物质世界，很难找到符合理想状态的惯性原理和测量协变原理，该原理只能近似成立。

(2) 潮汐力破坏测量协变的另一原因是由于每一个量子场都是一个独立的引力源。虽然处于相同的背景场中，在相同的非均匀引力背景条件下，但由于量子场的引力源（质量）不同，因而产生的引力效应有所不同，这种不同就破坏了测量协变效应。测量协变效应隐含了一种纯几何空间的性质。对于一团物质而言，构成物质的每一基本粒子都是一个微小的引力源（不考虑黑洞），引力的大小决定于该基本粒子的质量。从这种意义上来说，引力无法凭空产生，引力是一份一份的，即引力具有量子化的性质。引力可以线形叠加，对于一团物质而言，重心处的引力场强度最大，如图 4.2.4 (c) 所示。前面提到的自由下落参照系的原点对于局域实验而言，应选在悬浮液滴的重心处。飞船在自由下落的过程中，虽然通过局域实验能测量出存在引力场，但是在下落的过程中，我们自身没有感觉到引力的存在；另外背景空间越靠近地球，引力就越强。引力场越强，表明背景空间越硬（如图 4.2.5 所示），构成飞船的所有基本粒子的内部运动都会变慢，时钟会随背景空间的变硬而变慢，我们自身也没有感觉时钟变慢了，可见测量协变原理虽然不能严格成立，但可以近似成立。

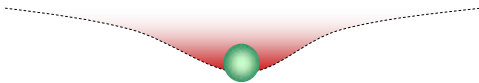


图 4.2.5 越靠近引力源，背景空间越硬

引力场是由无数基本粒子对背景空间产生的应变的总的叠加构成的，不是几何弯曲，虽然这种叠加效应类似于几何弯曲，但是存在差异。离散的基本粒子在相同背景场中具有相同的效应，严格讲这一条件很难被满足。好在单一粒子的质量极小，形成的引力源极小，对背景引力场的影响近似为 0，这样测量协变就可以成立。一旦形成物质团后，对背景引力场的影响不为 0，这样测量协变就会被破坏。在我们观测实验条件下，所形成的物质团（如飞船、直尺、时钟等）对背景引力场的影响极小，可认为测量协变原理近似成立。

对于极强的引力而言，如在黑洞的表面，测量协变被完全破坏。强大的潮汐力足以撕碎宇宙飞船和宇航员。

### 4.3 时空坐标架

时间为运动自由度，表征了物质运动的特性。时间的快慢对应测量物质运动的快慢，时间没有三维空间那样直观的几何特性。

#### 4.3.1 时间的原始概念

时间就是物质以运动形式存在的效果的表述，简单地说，所有的粒子都以波的形式存在，例如光子以电磁波的形式存在，静态轻子以三维超球面波的形式存在。更直观地讲，球面波具有“源”或“汇”的结构，而“源”或“汇”结构的稳定依赖于自旋波。换言之，物质是以运动的形式存在的，要表述运动的效果，相互之间需要有一种比较才能得出结论，这就是时间。

为了进一步阐述这一观念，来考虑时间的起源。设想有一个原始的部落，这里的人举行赛跑，有三个赛跑运动员  $A, B, C$  进行比赛。为了测量谁跑得快，谁跑得慢，选定一个赛跑的人  $A$  作为标准进行比较，如图 4.3.1 所示。

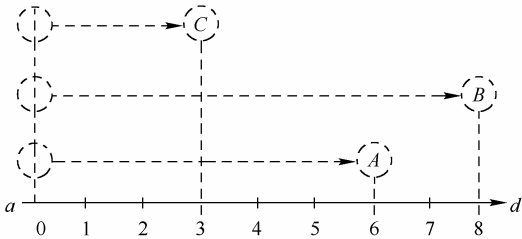


图 4.3.1 动态测量构成时间

如果全部由  $a$  点出发，运动到  $d$  点，则会出现有的先到  $d$ ，有的则后到  $d$ 。这样便出现了快和慢的概念。那么如何定量表述呢？我们便选择了  $A$  作为运动标准，把  $B, C$  的运动都和  $A$  比较，于是便有了比较结果： $B$  运动到  $d$  点时， $A$  的运动量为 6，而  $A$  运动到  $d$  点时， $A$  本身运动的距离量为 8，当  $C$  运动到  $d$  点时，则  $A$  的运动量已为 16。进一步把  $A$  的运动的空间量抽象为一种量值，并赋予  $A$  的运动量以时间的概念，于是便可以说： $B$  运动到  $d$  点

花的时间为 6，而  $C$  运动到  $d$  所花的时间则为 16。 $A$  这个人就是最原始的时钟。

显然，把做直线运动的物体作为基准是很不方便的，而由匀速直线运动变为圆周匀角速度运动，并以圆周上的某一点作为起始点，这样又把空间意义上的起始点抽象为圆周上的某一点为起始点来对任何运动形式加以比较。找到了做周期运动的物体来做比较的基准，这就非常方便了。

这种把某一做等角速度圆周运动的物体作为基准来比较其他物体的运动效果的系统称为时钟。时钟的运动量称为时间。

如图 4.3.2 所示，当  $A$  由  $a$  点出发到  $b$  点时（ $a$ 、 $b$  重合），连接  $A$  和圆心的半径转过了一周，把等角速度转过一周的运动量用转过了  $360^\circ$  角度的量来表示，这样便可以把时钟做成任意大小的形状。现在时间给出了一种特别的量纲，时针转一周为 12 小时，分针转一周为 1 小时，而秒针转一周则为 1 分钟。显然这是一种人为规定。匀角速度圆周运动的优点是转动的角度与圆的大小无关，这样就可以制作大小随意的时钟。原始的部落里的人找到了做圆周运动的水车来作为比较标准。在某一个空间区域中用一种公认的运动和另外一种运动进行相对运动效果的比较，比较的结果定义为测量时间。

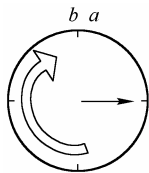


图 4.3.2 时钟

有了时间的定义，接下来酋长想建立时空之间的联系。如图 4.3.3 所示，这个原始的部落为了使测量时间和空间更为方便，酋长决定用射出的箭来作为一种测量标准，水车转一圈，箭飞行的长度称为一单位，箭飞行的径迹为部落里的“直线”，这样部落找到了时空转换的标准（这仅仅是一种类比，并不严格）。

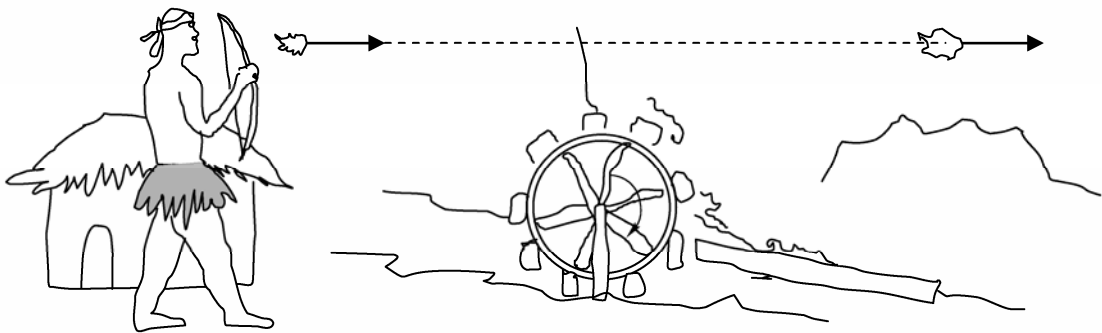


图 4.3.3 时空的原始关系

今天我们不用箭而是选择光子的运动作为时空标准。把光子作为时空测量标准，所有物质的运动都在和光子运动相比较，在现实世界中，光子是运动最快的，这样有一个好处，所有的测量结果都有相同的符号。光子变慢，时钟也相应变慢，光子传播的路径弯曲，那么空间也弯曲。光子成为最佳的时空测量标尺。光的路径为直线，这样时间和空间存在一个转换系数  $c$ ，由  $r = ct$ ，构成光锥面。这里光子和箭的功能是一样的。

人类建立物理学，首要任务就描述物体的运动形式并找出运动规律。要表述运动的效果，首先要有一种比较才能得出结论。显然，把做直线运动的物体作为时间基准是很不方便的，于是我们找到了做周期运动的物体来作为比较的基准，就非常方便了。从时间原始概念来看，时间是由运动的空间效果比较而得出的，所以时间最初也是一种空间量，因而时间和空间是密不可分的，是同一本质的不同表现形式。某一区域中一切物体处于静止状态，则该

区域时间消失。

### 1. 时间的单向性

实际的情况是物质总是处于不断的运动之中，小到基本粒子，大到宇宙都处于运动中。对于某一区域而言，该区域总存在多个运动物体，多个运动物体构成一个运动体系，这个运动体系的运动效应构成了该区域存在时间维度。如果该区域的时间倒流，那么该区域的运动体系就必须满足如下条件：所有运动的独立体必须从原路径返回，这种返回必须丝毫不差；体系之间返回时的相互关系必须保持不变。这样苛刻的条件就是在一个极小的区域都很难实现，更何况在一个大的区域。因为不可能同时存在一种镜像力场，让整个体系的（至少是一个区域）所有物质按原路径返回，所以不存在反向时间。时间之箭的单向性是由体系运动的不可重复性所决定的。时间反向要由该区域所有运动物质沿原来的路径返回，这样的运动形式不可能存在。

### 2. 时间的快慢

时间的快慢是由背景场决定的，某一区域物质构成的运动体系如果背景场变“硬”，那么会导致该区域整个物质运动体系的运动（传播）速率变慢，于是该区域的时钟变慢，反之，则变快。如果该区域整个物质运动体系进入黑洞中心，运动（传播）速率趋近于零，那么时间将被冻结。但是没有一种背景场能够让所有物质按原路径返回。

### 3. 时间反演

在现在的很多很严谨的科学论著中，常能看到时空中存在一种称为“虫洞”的时空结构，能实现时间反演，如果能实现的话，就必须将一个大范围运动体系至少是一个城市放到虫洞中，然后虫洞必须把构成整个城市的每一个基本粒子的运动轨迹都按原路精确返回。且不说这是否会违反因果律，对虫洞而言，需要的不仅是巨大的能量，更重要的是虫洞必须具有使所有运动物质按原路返回的这种精巧的加工手段，这显然不可能实现。

## 4.3.2 时空间隔

我们知道真空场空间具有三维的特性，空间的概念源自于场。当一个光子由  $A$  点传播至  $B$  点，那么在  $\Delta T$  内由  $A$  点至  $B$  点光子扫过的真空场的量就是空间的量。在真空场理论中，光是时空测量的唯一合法的标尺。这个标尺给出的是物理上的时空。

对我们的测量而言，由于所有的物质都是真空背景场的激发态，测量工具（包括光线）都随背景空间的弯曲而弯曲，测量协变是不可避免的，因而我们时间的测量标架是弯曲的。如果我们处于自由落体状态，即“瞬时随动局部惯性系”，没有任何外力，这样的坐标系就可以认为是物理上的“平直”坐标系。由此参照系观测其他参照系，其他参照系时空就是“弯曲”的。

一般而言，考虑到时空是一体的，我们得到物理学空间的 4 个坐标  $x, y, z, t$ 。采用光作为时空间的标尺，令

$$ct = x^0, \quad x = x^1, \quad y = x^2, \quad z = x^3$$

于是这 4 个坐标可写成  $x^\mu$ ， $\mu$  取 0, 1, 2, 3。四维时空微分间隔

$$(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = ds^2 \quad (4.3.1)$$

为不变量。

在坐标变换下按与  $dx^\mu$  同样方式变换的 4 个量  $A^\mu$  组成的任意集合构成一个逆变矢量，可以把不变量

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = (A, A) \quad (4.3.2)$$

叫矢量长度平方，设有另一逆变质量  $B^\mu$ ，则有标积不变量

$$A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 = (A, B) \quad (4.3.3)$$

为了得到这些不变量的一种方便写法，引进降低附标的方法，这里

$$A_0 = A^0, A_1 = -A^1, A_2 = -A^2, A_3 = -A^3 \quad (4.3.4)$$

那么式 (4.3.2) 左边可以写作  $A_\mu A^\mu$ ，这里应该理解为对  $\mu$  的所有 4 个值求和，这样式 (4.3.3) 可写为  $A_\mu B^\mu$  或  $A^\mu B_\mu$ 。

式 (4.3.4) 引进的 4 个量  $A_\mu$  也可看作一个矢量的 4 个分量。把  $A_\mu$  矢量叫做协变矢量。由两个逆变矢量  $A^\mu$  和  $B^\nu$ ，可以构成 16 个量  $A^\mu B^\nu$ ，附标  $\mu, \nu$  取 0, 1, 2, 3，这 16 个量构成一个二秩张量的 16 个分量，有时也称做矢量  $A^\mu$  和  $B^\nu$  的外积，以区别称之为内积的标量  $A_\mu B^\mu$ 。

把用这种方法构成的几个张量加起来，得到一般的二秩张量，例如：

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu + A'^\mu B'^\nu + A''^\mu B''^\nu + \cdots \quad (4.3.5)$$

一般张量的主要性质是：在坐标变换下，其分量变换的方式和量  $A^\mu B^\nu$  的相同。

采用对式 (4.3.5) 右边的每一项降低附标的方法来降低  $T^{\mu\nu}$  中的一个附标，这样就可以构成  $T_\mu^\nu$  或  $T_\nu^\mu$ 。

在  $T^{\mu\nu}$  中，可以令  $\nu = \mu$  而得  $T_\mu^\mu$ 。这里要对  $\mu$  的所有 4 个值求和。一个附标在某项中出现两次，一个为上指标，一个为指标，则意味着对此附标求和，称为爱因斯坦求和约定。于是  $T_\mu^\mu$  是一个标量。对于式 (4.3.1) 可用求和约定写成如下形式：

$$-ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.3.6)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

$g_{\mu\nu}$  称为度规张量。表达式 (4.3.7) 在洛伦兹变换下形式保持不变，称为洛伦兹度规。

在曲线坐标系中，度规张量取不同的形式，但可以通过坐标变换将它在整个空间中化为式 (4.3.7) 的形式，只要欧几里得几何在该空间中成立。

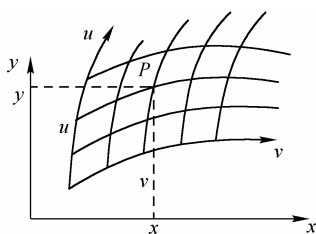
弯曲空间的度规张量。考虑在二维曲面中建立一个标架：

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.8)$$

它们也具有光滑的逆函数

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.9)$$

在该二维曲面中任意点  $P$  决定一对坐标  $(x, y)$ ，相应地也决定了一对数  $(u, v)$ ，如图 4.3.4 所示。由式 (4.3.8) 知，此坐标系下的坐标轴是下面两条曲线：



曲线族

$$0 = u(x, y)$$

$$0 = v(x, y)$$

$$u(x, y) = c_1$$

$$v(x, y) = c_2$$

构成曲线坐标的坐标网线。

图 4.3.4 二维曲面坐标架

平面上长度元为  $dl$ ，在  $(x, y)$  坐标中表示为

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 \quad (4.3.10)$$

由式 (4.3.9) 有

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \quad (4.3.11)$$

代入式 (4.3.10) 得

$$dl^2 = \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 \right] du^2 + 2 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) du dv \right] + \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial v} \right)^2 \right] dv^2$$

可以简写为

$$dl^2 = g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2 \quad (4.3.12)$$

这就是二维空间间隔。

在真空场中，由于测量协变原理的存在，坐标空间的弯曲是相对的。

### 4.3.3 张量的变换定律

首先假定有  $M$  个变量  $x^1, x^2, \dots, x^M$ 。这些变量的一组特定的值被视为维数为  $M$  的空间中的一点。将这些点标记为  $x'^1, x'^2, x'^3, \dots, x'^M$ ，使得<sup>①</sup>

$$x'^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^M) \quad (4.3.13)$$

假定导数存在，并写出

$$dx'^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta \quad (4.3.14)$$

坐标微分  $dx^\alpha$  为逆变矢量的分量。对于一组量  $F^\alpha$ ，如果遵从变换定律

$$F'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} F^\beta \quad (4.3.15)$$

为逆变矢量。现在考虑  $\partial \varphi / \partial x^\beta$  遵从与式 (4.3.10) 不同的变换定律，而任一组按

$$K'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} K_\beta \quad (4.3.16)$$

① [美]J. 韦伯 (J. Weber) 著，广义相对论与引力波，科学出版社，1979，p16.

变换的量构成协变矢量。对于变矢量和逆变矢量的定义要求在场上有导数，而不要求有度规存在。这里遵守如下约定：用下标指示协变矢量，用上标指示逆变矢量。

两个逆变矢量  $A^\alpha$  和  $B^\beta$  的积满足如下变换定律：

$$A'^\alpha B'^\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x'^\delta} A^\nu B^\delta \quad (4.3.17)$$

遵从变换定律式 (4.3.17) 的一组量  $T^{\mu\nu}$  构成二秩逆变张量。类似地，遵从变换定律

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta} \quad (4.3.18)$$

的一组量是二秩变张量。

设有函数  $S$ ，变换后为  $S'$ ，若对于所有的坐标系  $S = S'$  在每一点上均成立，则称  $S$  为不变量或标量。

一个量一经给定，其形式便提供了获得它在其他坐标系中的值的方法。于是，若  $T_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$ ，则在另一坐标系中  $T'_{\mu\nu} = A'_\mu B'_\nu$ 。

一协变矢量和一逆变矢量之积  $A_\lambda B^\lambda$  按如下方式变换：

$$A'_\lambda B'^\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\nu} A_\mu B^\nu = \delta^\mu_\nu A_\mu B^\nu = A_\nu B^\nu \quad (4.3.19)$$

所以积是标量。由此还可以得出高秩张量的内积（对上下标求和）也是标量。这些性质可用于张量特性的检验。如果  $A_\mu B^\mu$  是不变量，则可以证明  $A_\mu$  是张量，因为

$$A_\mu B^\mu = A'_\mu B'^\mu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \quad (4.3.20)$$

$\alpha, \mu$  为哑指标，可以用任意的字母表示，上式可写成

$$\left( A_\mu - A'_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right) B^\mu = 0 \quad (4.3.21)$$

由式 (4.3.21) 得出， $A_\mu$  按  $A_\mu = A'_\nu \partial x'^\nu / \partial x^\mu$  变换，故称协变矢量。

克罗内克尔 (Kronecker Delta)  $\delta$  记号  $\delta^\nu_\mu$  是一个当  $\mu = \nu$  时为 1，当  $\mu \neq \nu$  时为 0 的量。

$$\delta^\nu_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \delta^\beta_\alpha \quad (4.3.22)$$

$\delta^\nu_\mu$  是混合张量。

若张量  $S^{\mu\nu\alpha} = S^{\nu\mu\alpha}$ ，即换两个指标不变号，则称张量  $S^{\mu\nu\alpha}$  关于指标  $\mu$  和  $\nu$  是对称的。若  $A^{\alpha\beta\gamma} = -A^{\beta\alpha\gamma}$ ，则称张量关于指标  $\alpha$  和  $\beta$  是反对称的（或斜对称）。由变换定律即可看到，若一对指标同为上标或下标，张量的对称性在坐标变换下保持不变。一般来说，如果一指标是下标，另一指标是上标，则对称性不能保持。因此，对称性仅对同类指标才有意义。

由变换定律指出，一给定张量的所有分量，若在一坐标中为零，则在一切坐标系中均为零。这一事实在理论物理学中具有重大的意义。如果一个定律写成张量形式，譬如说，二张量相等的形式，那么二张量之差在一切坐标系中均为零，可见定律的有效性与选用的坐标系无关。类似地，如果在一个特殊坐标系中建立了张量方程，那么它在任何坐标系中均成立。

用张量来表述物理学定律，不再拘泥于某种特定的描述空间，不论用何种手段、何种



工具来描述都不会改变所描述的物理规律。这一特征正是广义协变原理所需要的。要注意的是描述工具的不同并不改变所描述的真空场结构。

标量的导数构成协变矢量，但是，协变矢量的导数却满足张量所要求的变换定律。因为

$$\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left( \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} A'_\alpha \right) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} + A'_\alpha \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \quad (4.3.23)$$

需要一种新的导数协变导数，允许我们由张量的微分得到一个新张量。为了说明怎样才能得到，必须考虑矢量平行位移的概念。

## 4.4 协变导数与引力规范场 $\Gamma_{ij}^k$

### 4.4.1 矢量的勒维—奇维塔平移

勒维—奇维塔引入了一个广义的“平移”概念。设嵌入三维欧氏空间的二维曲面上，有一个起始点在  $M$  的向量  $\vec{A}$ 。若要将  $\vec{A}$  经过无限小距离平移到  $M$  的无限小邻域内某一  $M'$  上，按勒维—奇维塔的定义：先将  $\vec{A}$  按普通平移至  $M'$ ，然后曲面在  $M'$  的切平面上投影得向量  $\vec{A}'$ 。这个向量  $\vec{A}'$  就称为由点  $M$  的向量  $\vec{A}$  “平移”而来，或者  $\vec{A}' \parallel \vec{A}$ 。将这种平移称为勒维—奇维塔平移。

设三维欧氏空间  $E_3$  中的二维黎曼空间  $R_2$  的坐标系为  $\{\xi^i\} (i=1,2)$ ， $R_2$  中有曲线  $C$ ，其参数方程为

$$\xi^i = \xi^i(t)$$

当  $t$  由  $t$  变至  $t+dt$  时，曲线上的点由  $M(\xi^i)$  变至  $M'(\xi^i + d\xi^i)$ 。这时点  $M'$  在点  $M$  的无限小邻域内。

设在  $E_3$  中， $R_2$  在点  $M$  和  $M'$  的切空间（切平面）分别记为  $T_M$ ， $T_{M'}$ ；再记  $R_2$  中的向径为  $\vec{r} = \vec{r}(\xi^i)$ 。显然，曲线  $C$  上各点切标架虽然分别在各自的切空间内，但并非彼此无关。设点  $M$  处的切标架向量为

$$\mathbf{E}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} \Big|_M = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} \Big|_M \bar{e}_\alpha$$

其中， $\bar{e}_\alpha$  ( $\alpha=1,2,3$ ) 为  $E_3$  中选取某个固定架（直线坐标系）的标向量， $x^\alpha = x^\alpha(\xi^i)$  为  $\vec{r}$  在  $\{0-\bar{e}_\alpha\}$  中的标架，于是点  $M'$  处的切标架向量为<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_i &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} \Big|_{M'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} \Big|_{M'} \mathbf{e}_\alpha = \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^i \partial \xi^j} d\xi^j \right) \Big|_{M'} \mathbf{e}_\alpha \\ &= \mathbf{E}_i + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \Big|_M d\xi^j \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \Big|_M$  仍是点  $M$  的量，但一般只在  $E_3$  中，不在  $T_M$  中。设过点  $M$  作  $T_M$  的向量  $\bar{n}$ ，于是

① 周季生 编，张量初步，高等教育出版社，1985，p70.

向量  $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \xi^i \partial \xi^j}$  可表示为

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{E}_k + \Omega_{ij} \vec{n} \quad (4.4.2)$$

其中,  $\Gamma_{ij}^k$  为  $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \xi^i \partial \xi^j}$  在  $T_M$  中的投影向量关于  $M$  点切标架  $\{\vec{E}_i\}$  的分量,  $\Omega_{ij}$  为其法向量分量。将式 (4.4.2) 代入式 (4.4.1) 得

$$\vec{E}'_i = \vec{E}_i + \Gamma_{ij}^k d\xi^j \vec{E}_k + \Omega_{ij} d\xi^j \vec{n} = (\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k d\xi^j) \vec{E}_k + \Omega_{ij} d\xi^j \vec{n}$$

上式表明, 从  $\vec{E}_3$  来看 (如图 4.4.1 所示),  $M'$  处的切标架向量  $\vec{E}'_i$  经普通平移至点  $M$  后, 为  $T_M$  中的向量  $(\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k d\xi^j) \vec{E}_k$  和法线上的向量  $\Omega_{ij} d\xi^j \vec{n}$  之和。由于  $\vec{n} \perp T_M$ , 故向量  $\vec{E}'_i - \Omega_{ij} d\xi^j \vec{n}$  就是  $\vec{E}'_i$  在  $T_M$  中的投影向量, 即  $(\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k d\xi^j) \vec{E}_k$ 。

根据勒维—奇维塔平移的定义, 上述向量正好是向量  $\vec{E}'_i$  从点  $M'$  按勒维—奇维塔平移至点  $M$  的结果。因此有  $(\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k d\xi^j) \vec{E}_k \parallel \vec{E}'_i$ 。

现设点  $M'$  处有向量  $\vec{A}'$ , 按勒维—奇维塔平移至点  $M$ 。现在来求该向量平移前后坐标的关系。

设  $\vec{A}' = A'^i \vec{E}_i$ , 则有

$$A'^i (\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k d\xi^j) \vec{E}_k \parallel A'^i \vec{E}'_i$$

记  $\vec{A}'$  平移至点  $M$  后的向量为  $\vec{A} = A^i \vec{E}_i$ , 即

$$A^i \vec{E}_i = A'^i (\delta_i^k + \Gamma_{ij}^k d\xi^j) \vec{E}_k = (A'^k + \Gamma_{ij}^k A'^i d\xi^j) \vec{E}_k$$

改换上式右端的哑指标, 比较  $\vec{E}_i$  的系数得

$$A^i = A'^i + \Gamma_{jk}^i A'^j d\xi^k \quad (4.4.3)$$

$$\delta A^i = A'^i - A^i = -\Gamma_{jk}^i A'^j d\xi^k = -\Gamma_{jk}^i (A^j + \delta A^j) d\xi^k \quad (4.4.4)$$

略去二阶无穷小量, 得到

$$\delta A^i = A'^i - A^i = -\Gamma_{jk}^i A^j d\xi^k \quad (4.4.5)$$

$$A'^i = A^i - \Gamma_{jk}^i A^j d\xi^k \quad (4.4.6)$$

这就是所求的向量平移后坐标的关系。可以证明, 在  $R_2$  平移阶变张量  $A_i$  时有

$$\delta A_i = \Gamma_{jk}^i A_j d\xi^k \quad (4.4.7)$$

以及

$$A'_i = A_i + \Gamma_{jk}^i A_j d\xi^k \quad (4.4.8)$$

欧氏空间采用统一直线标。两个不同点上的向量只要分量相同, 就认为它们是相同的, 或者说两个向平行, 或者说一个是由另一个平移而来的。这种平移称为普通平移。然而在黎曼空间中, 普通平移是没有意义的。因为不同点有不同的切标架, 不同点的向量就是有相同的分量也不能认为它们是相等的。

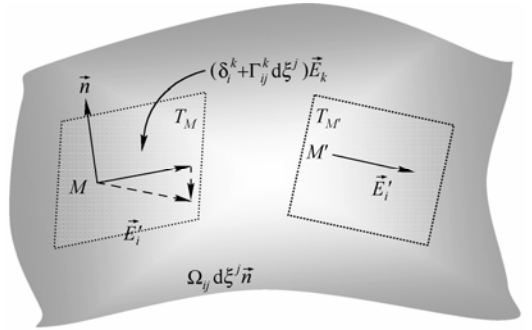


图 4.4.1 勒维—奇维 “平移”

#### 4.4.2 协变微分

现在回到用微分构成新张量的问题上来，由前面可知矢量的偏导数不是张量。但按下述方法可以构成一种新的导数。在一给定点的矢量为  $A^\mu$ ，某邻点上的矢量为  $A^\mu + dA^\mu$ 。将矢量  $A^\mu$  平移至该邻点而得的矢量为  $A^\mu + \delta A^\mu$ 。将以上两个量相减，得

$$dA^\mu - \delta A^\mu = \left( \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} A^\alpha \right) dx^\sigma \quad (4.4.9)$$

由于是同一点的二矢量之差，所以上式必为一矢量，因而量

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} A^\alpha$$

为混合张量，称为  $A^\mu$  的协变导数，并写成

$$A^\mu_{;\sigma} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} A^\alpha \quad (4.4.10)$$

类似于推导上面两式所用的方法，可以得到  $A_\mu$  的协变导数：

$$A_{\mu;\sigma} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} A_\alpha \quad (4.4.11)$$

协变微分是一个很重要的概念，我们可以找到协变微分的几何解释。将向量  $A(p)$  的普通微分记为

$$dA = A^0 - A(p) \quad (4.4.12a)$$

协变微分记为

$$DA = \tilde{A} - A(p) \quad (4.4.12b)$$

其中  $A^0$ ， $\tilde{A}$  为点  $p'$  处的场向量  $A(p')$  分别按  $E_3$  中普通平移与  $R_2$  上勒维—奇维塔平移至点  $p$  的向量，如图 4.4.2 所示。

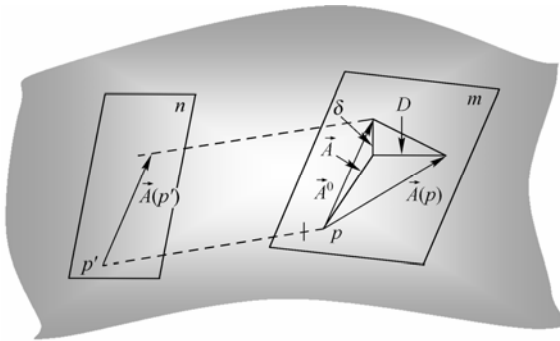


图 4.4.2 协变微分

$$\begin{aligned} dA &= d(A^i E_i) = (dA^i) E_i + A^i dE_i \\ &= (dA^i) E_i + A^i E_{ik} du^k \\ &= (dA^i) E_i + A^i (\Gamma^j_{ik} E_j + \Omega_{ik} \bar{n}) du^k \\ &= (dA^i + \Gamma^i_{jk} A^j du^k) E_i + A^i \Omega_{ik} du^k \bar{n} \\ &= DA + \delta \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

$A(p)$  与  $A(p')$  分别为向量场在点  $p$  与  $p'$  的场向量（分别在两个切空间内）。 $\delta \perp m$ ，向

量  $\mathbf{A}$  在点  $p$  的协变微分  $\mathbf{D}\mathbf{A}$  为其普通微分  $\mathbf{d}\mathbf{A}$  在点  $p$  切空间内的投影。

有了协变微分的几何解释，再来理解协变微分的物理意义。要理解协变微分的物理意义首先来看一下普通微分  $\mathbf{d}\mathbf{A}$  的物理意义。从图 4.4.2 中可以看出若  $\mathbf{d}\mathbf{A} = 0$ ，则表明真空场是平直的，或者处于测量协变的状态下，但这种测量协变对于观测者是完全不自觉的。而若  $\mathbf{D}\mathbf{A} = 0$ ，说明被描述的真空场对比我们所认为的“平直”比照系是非平直的，但可以重新理解我们所描述的真空场：认为描述的真空场本身就是“平直”的，但和比照系之间存在差异。这个差异项就是式 (4.4.18) 中的  $\Gamma_{jk}^i \mathbf{A}^j \mathbf{d}u^k \mathbf{E}_i$ 。当然对于被描述的真空场虽然我们认为是“平直”的，但这种理解是建立在和比照系存在差异的基础之上的，而非无知觉的。另外，我们也可以这样认为：虽然被描述的真空场相对于比照系是弯曲的，但可以引入一个修正项（或更确切地说是抵消项）使得弯曲真空场被“矫正”为“平直”场。对于我们生存于其中的实际的物理世界来说，理想的直尺就是光线，当身边的光线弯曲时，我们的意识也随之弯曲。然而存在固定参照系时，真空场的形变所引起的力场就表现出来，于是修正项有了很明确的物理意义，该项  $\Gamma_{jk}^i \mathbf{A}^j \mathbf{d}u^k \mathbf{E}_i$  就对应于真空场的形变所引起的力场。对于地球引力场来说，由实物粒子构成的地球体和地面以上的真空场是相对独立的两类真空场，因而站在地面这个固定参照系时，我们能够感知到引力的存在，而引力的本质就是由于空间真空场形变造成的。

#### 4.4.3 $\Gamma_{jk}^i$ 与 $g_{ik}$ 的关系

考虑了平移的两种情况，现在通过下列变换重新回到局部笛卡儿坐标系上来：

$$x^\alpha = f^\alpha(x'^1, x'^2, \dots), \quad x'^\alpha = \varphi^\alpha(x^1, x^2, \dots) \quad (4.4.14)$$

这里带撇的坐标是局部笛卡儿坐标，于是

$$\mathbf{d}x^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x'^\beta} \mathbf{d}x'^\beta \quad (4.4.15)$$

由平行位移的定义得出  $\delta(\mathbf{d}x'^\beta) = 0$ ，于是由式 (4.4.15) 可写出

$$\delta(\mathbf{d}x^\nu) = \frac{\partial^2 f^\nu}{\partial x'^\delta \partial x'^\gamma} \mathbf{d}x'^\delta \mathbf{d}x'^\gamma = \frac{\partial^2 f^\nu}{\partial x'^\delta \partial x'^\gamma} \frac{\partial \varphi^\delta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^\beta} \mathbf{d}x^\alpha \mathbf{d}x^\beta \quad (4.4.16)$$

由式 (4.4.5) 更换附标，得

$$\delta \mathbf{A}^\nu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\nu \mathbf{A}^\alpha \mathbf{d}x^\beta \quad (4.4.17)$$

令  $\mathbf{A}^\nu$  代表坐标微分  $\mathbf{d}x^\nu$ ，则有

$$\delta(\mathbf{d}x^\nu) = -\Gamma_{\alpha\beta}^\nu \mathbf{d}x^\alpha \mathbf{d}x^\beta \quad (4.4.18)$$

式 (4.4.16) 和式 (4.4.18) 比较，得

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\nu = -\frac{\partial^2 f^\nu}{\partial x'^\delta \partial x'^\gamma} \frac{\partial \varphi^\delta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^\beta} \quad (4.4.19)$$

式 (4.4.19) 并不遵从张量的变换定律，因而要找到用度规张量来表达的  $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$  的公式。

先回忆一下度规张量的定义和度规的两个公式。

$$-ds^2 = g_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\mu \mathbf{d}x^\nu \quad (4.4.20)$$

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha \quad (4.4.21)$$

$$A^\alpha = g^{\nu\alpha} A_\nu \quad (4.4.22)$$

现在来推导用度规张量表达  $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$  的公式。由平行位移的定义得

$$\delta(A_\mu A^\mu) = \underbrace{g_{\mu\nu} [A^\nu + \delta A^\nu] [A^\mu + \delta A^\mu]}_{\text{第二点}} - \underbrace{g_{\mu\nu} A^\nu A^\mu}_{\text{第一点}} = 0 \quad (4.4.23)$$

$$\delta(g_{\mu\nu} A^\nu A^\mu) = \delta g_{\mu\nu} \cdot A^\mu A^\nu + g_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu + g_{\mu\nu} A^\nu \delta A^\mu = 0$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \cdot A^\mu A^\nu dx^\alpha + g_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu + g_{\mu\nu} A^\nu \delta A^\mu = 0 \quad (4.4.24)$$

利用式 (4.4.17) 消去  $\delta A^\nu$  和  $\delta A^\mu$ ，得

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - g_{\mu\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - g_{\nu\beta} \Gamma_{\mu\alpha}^\beta = 0 \quad (4.4.25)$$

$\Gamma_{\nu\alpha}^\beta$  对于下标对称，故可将指标  $\nu$  和  $\alpha$  互换，于是得

$$\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - g_{\mu\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = 0 \quad (4.4.26)$$

类似地，可以写出

$$\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - g_{\nu\beta} \Gamma_{\mu\alpha}^\beta - g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = 0 \quad (4.4.27)$$

对式 (4.4.25)，式 (4.4.26) 和式 (4.4.27) 求解，并利用式 (4.4.21)，得

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} \left[ \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} \right] \quad (4.4.28)$$

这称为第二类克里斯托菲 (Christoffel) 符号，往往写作  $\left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ \mu\alpha \end{smallmatrix} \right\}$ 。

三指标量

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} \right] = \Gamma_{\nu,\mu\alpha} \quad (4.4.29)$$

称为第一类克里斯托菲符号，可写作  $[\mu\alpha, \nu]$ 。

#### 4.4.4 引力场和量子场间的关系

对于组成我们这个可感知的物质世界的物质来说，物质的存在会对周围的真空场产生一个极小的影响，造成背景真空场的微小应变，真空场的应变表现为时空弯曲。我们知道物

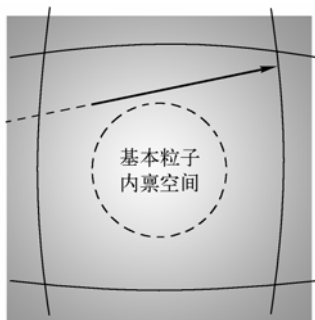


图 4.4.3 粒子背景空间的弯曲

质世界的基本粒子是轻子和夸克。轻子场内禀空间以内的真空场就是我们所熟知的静态弱力真空场，构成质量场，称为质量荷，是形变量很大的真空场。这种大的应变  $\varepsilon$  被封闭在内禀空间以内，如图 4.4.3 所示。这种应变对背景真空场会产生一个小的影响，使得背景场应变  $\varepsilon' \neq 0$ 。背景场应变的大小严格正比于量子场应变的大小，即  $\varepsilon' \propto \varepsilon$ 。

量子场的应变变量就是量子场的能量，于是自然有这样的结论：量子场的能量大小直接决定了量子场背景场时空的弯曲程度（时空弯曲程度更为精确的理解是真空背景场的“硬化”程度）。轻子场对内禀空间以外的真空场所造成的影响

极小，这种影响小到当我们只考虑微观真空场时可以完全忽略。

真空场的形变越小，力场就越弱。换个角度，极弱的力场说明真空场的形变曲率极小，极小的曲率就说明形变真空场弯曲的半径极大，于是这种力场存在的区域就极大。换言之，这种力场为长程力场。从场应变的角度来看，由应变非零的基本单元真空场“黏合”起来便构成了整体形变真空场 $\Psi$ ，即协变场。由于是由基本单元真空场紧密、无间隙地构成的整体真空场，作为整体真空场则某点的场应变会对整体都产生影响，协变场存在于整个宇宙，所以这种应变力场会延伸至无穷远。协变场弱应变力场所表现出来的这种极弱的长程力场就是我们所熟知的引力场。大量的轻子场通过非引力场（如电磁相互作用）作用而构成可见的物体，当物体足够大时，大量轻子场的引力叠加之后，就有了可观测的万有引力。具体考虑一个单费米子情况可使问题简化。

背景空间是引力场空间，引力场用 $\Psi_{\text{graviton}}$ 表示。引力场是所有其他量子场的背景空间，在这里引力场就是弯曲的四维时空。

量子场引力所有的变化都可以归结为真空背景场形变，而所有的形变都具有质量效应，对于一个孤立的体系而言，场形变总量不变，因而考虑一个量子场体系的质量就能使问题得到简化。如果考虑一个非独立量子场，就会带来令人头痛的麻烦：量子场自身的性质会对其背景空间产生影响，而背景空间的形变也会对量子场产生影响，且相互作用永远存在（万有引力性质），糟糕的是相互作用的本身也会对背景空间产生影响。

### 1. 实现引力场量子化要解决的问题

- ① 量子场 $\varphi$ 和引力场耦合，改变量子场内禀时空。
- ② 质量荷波函数可以表述为闭弦波函数的形式，质量荷会产生引力波。
- ③ 四维空间矢量平移产生引力规范项。

$$DA^i = \partial_\mu A^i + \Gamma_{ij}^k A^j$$

$\Gamma_{jk}^i$ 为引力规范项。

### 2. 引力的叠加性

先来解决问题③。理想平直的背景空间是永远不存在的，而“平直”是相对的。为了方便，我们仍然把弯曲时空的量子场函数写为 $\psi(x) = \exp[-ik_\mu x^i(\xi)]$ 。当把参照系的中心选择与粒子重合时，由于存在测量协变，可认为 $x^i$ 参照系是“平直”的。

在没有粒子背景真空场中，设某一点 $M$ 的矢量场为 $A$ ，设粒子存在时的背景空间场中同样在 $M$ 点处的矢量为 $A'$ 。当 $A' \rightarrow A$ ，矢量场发生形变。如果 $\delta A^i \neq 0$ ，则说明 $A$ 发生了位移，形变量为 $\delta A^i$ ，场 $A$ 的背景空间因粒子的存在而弯曲。

在真空量子场论中，我们把 $\delta A^i$ 视为量子场的内禀自由度。这一差异源自于存在质量，类比于电磁场的情况 $D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) - ieA\psi(x)$ 。空间矢量的协变微分可以给出引力规范项： $A^i_{;k} = \partial_k A^i + \Gamma_{jk}^i A^j$ 。引力规范项 $\Gamma_{jk}^i$ 对应 $ieA_\mu(x)$ 。

考虑粒子空间中，粒子空间坐标架 $x^\mu(\xi^\mu)$ 是一个空间四维矢量。设在理想的真空平直场中存在一矢量场 $A^i(x)$ ，该矢量移入到粒子的内禀空间中，移入的结果使得矢量场 $A^i(x)$ 某一点 $x$ 改变了 $\delta x$ ，则有

$$\begin{aligned}
 A^i(x_0 + \delta x) &= A^i(x_0) + \delta x \left( \frac{dA^i}{dx} \right)_{x_0} + \frac{1}{2!} \delta x^2 \left( \frac{d^2 A^i}{dx^2} \right)_{x_0} + \dots \\
 &= \left( 1 + \delta x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2!} \delta x^2 \frac{d^2}{dx^2} + \dots \right) A^i \Big|_{x_0} = \exp\left[\delta x \frac{d}{dx}\right] A^i \Big|_{x_0}
 \end{aligned}$$

由  $\bar{Y} = \frac{d}{dx}$  得

$$A^i(x_0 + \delta x) = \exp[\delta x \bar{Y}] \cdot A^i(x_0)$$

这里取  $x_0 = 0$ ,  $A^i(\delta x) = \exp[\delta x \bar{Y}] \cdot A^i(0)$ , 代入  $\delta x^i = -\Gamma_{jk}^i x^j d\xi^k$ , 得

$$A^i(\delta x) = \exp\left[-\Gamma_{jk}^i d\xi^k x^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right] \cdot A^i(0) = \exp[-\Gamma_{jk}^i d\xi^k x^j e^j] \cdot A^i(0) \quad (4.4.30)$$

上式中,  $e^j$  是  $x^j$  的坐标基矢。 $\delta x^i$  表征了内禀质量空间和粒子空间之间的差异。粒子质量越大, 则矢量的改变量越大。 $A^i(\delta x)$  表明粒子空间的改变源自于内禀空间的微小形变, 粒子内禀时空弯曲给出该粒子的引力场, 这个引力场就是单粒子的引力场。 $A^i(\delta x)$  不具有波动性, 换言之, 没有周期性。

这里, 有必要特别指出的是量子场的位移函数  $u(\xi) = \hbar \exp i k_\mu x^\mu$  和场  $x^i(0)$  在某一点  $\xi_0$  产生形变后的函数  $A^i(\delta x) = \exp[-\Gamma_{jk}^i d\xi^k x^j e^j] \cdot A^i(0)$  的指数函数相差一个虚数  $i$ , 这是由于量子场具有波动性, 用  $\cos kx$  描述。根据公式  $\cos kx + i \sin kx = \exp i kx$ , 量子场可写为  $\exp i kx$  的形式。这一形式  $\exp i kx$  被理解为场沿  $x$  方向移动  $ik$ 。量子场中, 我们熟知的形变是光子的场形变 (即位移函数), 它具有波动性:  $u(\xi) = \hbar \exp i k_\mu x^\mu$ 。场  $x^i(0)$  在  $0$  点产生形变后的函数分两种情况考虑。

$$A^i(\delta x) = \exp[-\Gamma_{jk}^i d\xi^k x^j e^j] \cdot A^i(0)$$

无波动性, 描述引力场形变量; (可设  $A(0)$  为单位矢量  $I$ ) 按前面的约定, 引力场场函数没有振幅。

$$A^i(\delta x) = \exp[-\Gamma_{jk}^i d\xi^k x^j e^j] \quad (4.4.31)$$

这就是含有引力自由度的场函数。考虑两个轻子存在引力相互作用, 则

$$\begin{aligned}
 A^i(\delta x) B^i(\delta x) &= \exp[-\Gamma_{jk}^i d\xi^k x^j e^j - \Gamma_{ji}^k d\xi^j x^i e^j] \\
 A^i(\delta x) B^i(\delta x) &= \exp[-(\Gamma_{jk}^i d\xi^k + \Gamma_{ji}^k d\xi^j) x^j e^j] \quad (4.4.32)
 \end{aligned}$$

引力是长程力, 两粒子间的距离  $l$  和力程  $L$  相比是一个很小的量, 即  $l \ll L$ , 那么就可以认为引力场强是相互叠加的。例如对于几十公里范围内的粒子而言, 叠加是可靠的。考虑在一个满足  $l \ll L$  条件的范围内,  $n$  个粒子总的引力场满足现行叠加原理:

$$\Gamma = {}^1\Gamma + \dots + {}^n\Gamma \quad (4.4.33)$$

### 3. 弯曲时空中的量子场函数

接下来解决问题①。为了使引力场和量子场在形式上可以统一, 把引力场规范项  $\Gamma_{jk}^i$  视为量子场内禀空间中的一个自由度。为此, 可以在四维时空中建立一个理想的矢量, 该矢量不会对背景场造成任何影响。考虑现在内禀空间中存在一个理想的矢量, 该矢量由坐标基构

成, 为  $\mathbf{x}'$ 。现在该矢量从内禀空间中被移出, 移到背景空间中, 矢量变为  $\mathbf{x}$  (分量用  $x^i$  表示, 可理解为一种矢量场)。那么向量平移后的改变量为

$$\delta x^i = x'^i - x^i = -\Gamma_{jk}^i x^j d\xi^k \quad (4.4.34)$$

$$x'^i = x^i - \Gamma_{jk}^i x^j d\xi^k \quad (4.4.35)$$

考虑量子场  $\psi(x) = \exp[-ik_\mu x^i(\xi)]$  的背景时空由平直变为弯曲,  $x^i \rightarrow x'^i$  整个背景空间都弯曲。在弯曲背景空间中, 存在测量协变效应。量子场场量变为  $\psi^i(x') = \exp[ik_\mu x'^i(\xi)]$ 。在弯曲背景中, 我们在粒子内部空间中建立标架来观测粒子, 会发现粒子并不存在引力。

设想我们可以变得足够地小, 能进入粒子内部空间, 在进入粒子内部的过程中, 因测量协变, 我们对此一无所知。在该参照系中, 引力规范项隐含在弯曲坐标架中  $x'^i = x^i - \Gamma_{jk}^i x^j d\xi^k$ , 这一基本思想是符合背景时空性质的。弯曲时空中的 (含有引力) 量子场函数为

$$\psi(x') = \exp\left[-ik_\mu \left(x^i - \Gamma_{jk}^i x^j d\xi^k\right)\right] \quad (4.4.36a)$$

这样的场函数给出了量子场和引力场之间的关系。对于背景时空弯曲的描述, 爱因斯坦的广义相对论给出了极其优美的描述。

真空背景场弯曲: 考虑某一点粒子, 点粒子的质量导致时空弯曲, 时空弯曲的能量为  $E_G$ , 满足

$$E_G \cdot \Omega = h_G$$

$m \cdot \mathbf{G} = \mathbf{E}_G = U(x)$ , 为引力势, 就是由平直空间变为弯曲空间所需要的能量。上式是引力场量子化的基本条件。

第1章谈到多自由度量量子场的统一的场方程为  $D_\mu \varphi(x) D_\nu \varphi(x) g^{\mu\nu} = 0$ ,  $g^{\mu\nu}$  为粒子内禀自由度空间度规。每一独立自由度空间弯曲用协变微分描述。考虑背景时空后, 统一场方程为

$$D_\mu \varphi(x^i - \Gamma_{jk}^i x^j d\xi^k) D_\nu \varphi(x^i - \Gamma_{jk}^i x^j d\xi^k) g^{\mu\nu} = 0 \quad (4.4.36b)$$

上式就是包含引力场的统一场方程的基本表述形式。

为了突显引力自由度, 有两种方案来实现。

(1) 加入一个虚四维空标架, 把波函数改写为

$$\psi(x') = \exp[ix'^i - ik_\mu x'^\mu] = \exp[i(x^i - \Gamma_{jk}^i x^j d\xi^k) - ik_\mu x'^\mu] = \exp[i(\delta_j^1 - \Gamma_{jk}^1 d\xi^k)x^j - ik_\mu x'^\mu]$$

弯曲是相对的, 在粒子内禀空间中, 测量协变使得我们无法得知粒子空间是弯曲的, 将  $x'$  换成  $x$ , 得到

$$\psi(x) = \exp[i(\delta_j^1 - \Gamma_{jk}^1 d\xi^k)x^j - ik_\mu x^\mu] \quad (4.4.37)$$

规定  $-k_G = \delta_j^1 - \Gamma_{jk}^1 d\xi^k = -k_6$ ,  $x'^j = x^G = x^6$ , 指标  $G$  表示引力项, 即把引力项定义为第6自由度。上式为

$$\psi(x) = \exp[-ik_G x^G - ik_\mu x^\mu] \quad (4.4.38)$$

这样量子场场函数的空间被扩张,  $\mu = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 。前四维  $\mu = 0, 1, 2, 3$  是四动量自由度, 第五维  $\mu = 4$  是质量自由度, 第六维  $\mu = 5$  是自旋自由度, 第七维  $\mu = 6$  是引力自由度, 这样量子场场量始终可以写为  $\psi(x) = \exp[-ik_\mu x^\mu]$  的形式。



(2) 因度规反映了时空的形态, 可直接把度规视为时空弯曲的自由度, 那么

$$\psi(x') = \exp \left[ \mathbf{i} g_{\mu\nu} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} - \mathbf{i} k_{\mu} x'^{\mu} \right] = \exp \left[ \mathbf{i} g_{\mu\nu} x_G - \mathbf{i} k_{\mu} x'^{\mu} \right] \quad (4.4.39)$$

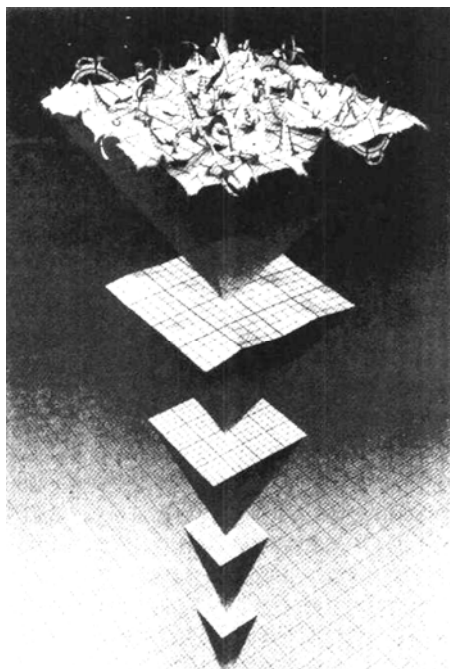
规定  $x^G = x^6$ , 就是四维时空坐标架。

相对于背景时空弯曲, 量子场的形变是强烈的。量子场存在断裂, 不满足应变协调方程, 而背景时空弯曲满足应变协调方程。

解决问题②, 目前条件还不成熟。质量荷可以简化为一个封闭弦, 但是该闭弦的形式和弦理论的形式有很大差异, 借助于弦理论目前还存在困难。

#### 4. 广义相对论与量子力学的空间

广义相对论适用于巨大的天文学尺度, 如图 4.4.4 所示<sup>①</sup>。在那样的距离, 爱因斯坦的理论说明, 没有物质意味着空间是平坦的。



逐级放大空间区域, 近距离观察发现存在量子涨落

图 4.4.4 逐级放大空间区域, 显露出其超微观特性

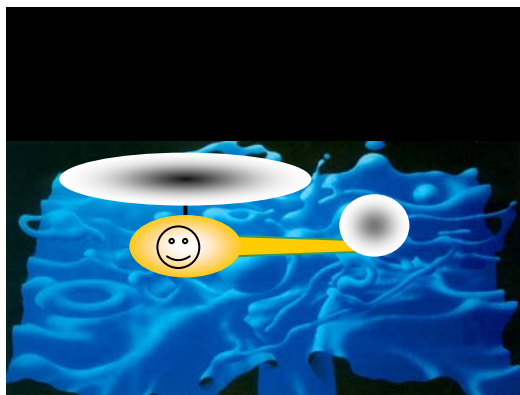
从纯经典的立场看, 这样平直稳定的空间图景会一直保持到任意的距离尺度。但量子力学完全改变了这种看法。万物都摆脱不了不确定性原理所规定的量子涨落——引力场也不例外。虽然经典理论认为虚空间没有引力场, 但量子力学证明, 引力场尽管在平均意义上为零, 它实际上却在因量子涨落而波荡起伏。另外, 不确定性原理还告诉我们, 关注的空间越小, 看到的引力场起伏越大。量子力学展现了一个没有绝望的世界, 越是狭窄的地方, 越是浪花飞溅。

以上就是目前理论对空间的认识, 这样的认识使得广义相对论在进入到量子场领域时就失效了。量子场和广义相对论之间存在了一条难以逾越的鸿沟。

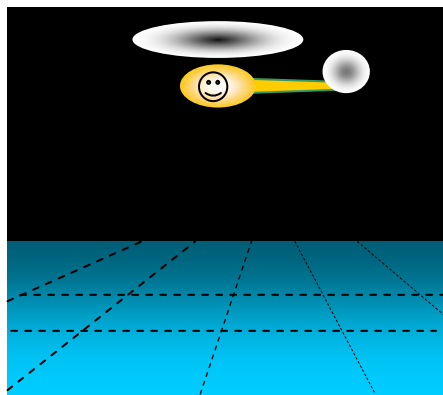
真空场的观点和现在的理论完全不同, 非扰动真空场本身是平直的, 没有受到任何扰动的时空总是平直的, 这样平直稳定的空间图景会一直保持到任意的距离尺度, 这就是真空场的时空图景, 这样, 广义相对论在任何范围的空间都不会失效, 前提条件是真空场不发生破裂。但对于实验观测而言, 观测工具就是基本粒子, 不确定性原理源自于测量。观测的空间越小, 相应的观测距离越短。由于观测工具的本身就是扰动源, 对平直量子场造成量子涨落, 测量距离越短, 对被测空间影响越大。这类似于我们乘坐一架直升机观测一个平静的湖面, 如图 4.4.5 所示。直升机自身的螺旋桨会对湖面造成扰动, 观测距离越远, 湖面越平静; 反之, 观测距离越近, 湖面越是波涛翻滚, 波涛起伏的区

① 图 4.4.4 源自于宇宙的琴弦, [美]B·格林著, 李泳译, 湖南科学技术出版社, 2002, p121.

域在观测区域内。当观测距离小到一定的程度，观测带来的扰动使我们看到波涛起伏的虚粒子海。近距离的观察所导致的量子涨落不再使引力场起伏，因为引力场起伏会导致真空场（背景时空）结构被破坏，不满足应变协调方程，此时近距离观测到的“引力场”不再是引力场，而是量子场。当我们把宏观引力场用观测工具切割成量子场时，引力场已不复存在。量子化的本身就是在破坏引力场。



(a) 近距离观测，导致量子涨落



(b) 远距离观测，无量子涨落

空间本身是平直的，逐级放大空间区域意味着近距离的观测。

图 4.4.5 观测的本身导致时空量子场涨落

在任何尺度时空本身是光滑的，弯曲时空也同样是光滑的，并不存在量子涨落，因而在极小的空间内，场基本单元间满足应变协调方程，即场具有连续性，没有断裂。从这种意义上来说，量子场和相对论研究的对象是不同的。引力相互作用是由于背景空间弯曲造成的。因此从该角度来说，量子理论无法涵盖引力。

如果说引力场是量子化的，那么只能从基本粒子的角度来看：每一个基本粒子的存在都会对其自身背景时空产生影响，基本粒子是量子化的，相应的引力场也是量子化的，引力波也是量子化的。引力波源自于基本粒子点的扰动。

引力场的爱因斯坦公式适用于量子场内禀空间形变而造成的对内禀空间内外区域的背景场的形变。这种形变是连续的，通常是极小的，必须满足场应变协调方程。量子场场量  $\varphi = u \exp i k x$  的存在造成量子场内部空间和外部空间弯曲。平直空间标架为  $x$ ，引入量子场后，空间标架发生弯曲即有引力。量子场和引力场的关系满足式 (4.4.36)。

### 5. 单粒子引力场方程构成引力场的量子化条件

这里所讨论的量子场是指在一个局域空间达到形变极限具有纤维结构的量子场。对于引力场而言，引力场存在于一个大范围的时空中，引力场之间的引力相互作用可以认为是交换引力子来实现的。引力子时空中形变量是  $h_G = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{H}{2} \right)^3$ ，从这种意义上来说，引力场是可以量子化的。事实上引力场的量子化是极其困难的，原因是引力场的时空是连续变化的，时空没有发生破裂。更重要的是引力场所造成的是背景时空的变化，存在测量协变效应，只有通过微弱的潮汐力来观察引力子的存在。对于静态引力场而言，也存在潮汐力，所以引力场的两种作用方式是时空弯曲和交换引力子，这两种情况是无法区分的。背景时空弯曲和量子

场的性质大不相同，这使我们无法直接利用量子场论量子化手段来对引力场进行量子化。

引力场为大范围的时空形变，引力子时空总形变量虽然是一个常数，但独立的个体引力子并不满足  $h = \lambda \cdot \vec{p} = E \cdot t$ （该式描述的是具有破裂特性的量子场）。该式和  $[\hat{x}^i, \hat{p}_i] \equiv \hat{x}^i \hat{p}_i - \hat{p}_i \hat{x}^i = i\hbar$  是等价的，这正是量子化条件，所以对 Bose 场量子化条件而言，引力场是不可量子化的。

在 3.1 节中， $[\hat{x}^i, \hat{p}_i] \equiv \hat{x}^i \hat{p}_i - \hat{p}_i \hat{x}^i = i\hbar$ 。由于量子场的存在，沿  $d/d\lambda_1$  比沿  $d/d\lambda_2$  要多走一段曲线，而这正好就是真空场中 Bose 场的最大时空形变量  $\hbar$ ， $[\hat{x}^i, \hat{p}_i]$  是  $\vec{x}$ ， $\vec{p}$  组成的不完整四边形的开部，采用里括号以后，可以扣除背景场中的场形变部分，于是有这样的表述

$$\text{几何性质} \rightarrow [\hat{x}^i, \hat{p}_i] \varphi \equiv i\hbar \varphi \leftarrow \text{场形变量}$$

对于引力场方程

$$\text{几何性质} \rightarrow \mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathbf{g}_{\mu\nu} \mathbf{R} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \leftarrow \text{场形变量}$$

从上式可看出，存在相似性。对于引力场方程而言，所有的引力源自于质量，具有静质量的最小的质量源是荷电轻子。有必要考虑单粒子的引力场方程。

对量子场而言，能量动量张量为

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi_\alpha - \mathbf{g}^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

设引力场波函数为  $h$ ，引力场的波函数满足量子力学的线性叠加原理：

$$h = c_1 h_1 + c_2 h_2 + \cdots + c_i h_i + \cdots c_N h_N \tag{4.4.40}$$

$h$  是测量值，对应引力场的强弱。 $c_i h_i$  中， $h_i$  为第  $i$  类粒子的引力波函数， $c_i$  为第  $i$  类粒子的数量。考虑单粒子的情况，认为引力场是由单粒子的引力场线性叠加构成的，这就是引力场量子化的基本出发点。

## 4.5 弯曲时空的描述

### 4.5.1 曲率张量

空间弯曲的本质是由于真空场存在场应变，并非几何意义上的真空场弯曲。我们知道量子场的任何形式的应变都会造成背景时空场的微小形变，背景时空场形变的大小严格正比于量子场应变的强弱。背景时空场形变造成真空场“硬化”，换言之，真空场的传播性能降低。真空场的传播性能降低导致了时钟变慢，也导致了空间弯曲。在真空场论中，空间弯曲的本质并非真的存在背景真空场弯曲，而是由真空硬化程度不同造成的。光子（以及其他形式的量子场）传播速度的非均匀性会使光（以及其他形式的量子场）的传播路径发生弯曲，这和光线由空气进入凸透镜会发生折射的道理是一致的。真空场硬化的非均匀性本质上就是背景场的应变大小。而背景场的应变被理解为时空弯曲。

在弯曲空间真空场中，沿闭合路线的平移一般说来并不给出原来的矢量。协变微分  $DA_j$  等于普通微分  $dA_j$  与平移改变量  $\delta A_j$  之差。绕闭合线一周  $dA_j$  积累量为零。平移改变量  $\delta A_j$  的积累量等于协变微分  $DA_j$  的积累量。因此，绕闭合线路一周  $DA_j$  的积累量表征了该处空间的

弯曲程度。

现在来考虑一个矢量沿无穷小闭合路线平行位移时其分量的变化，而这一闭合路线是由双参数曲线族

$$x^\alpha = f^\alpha(u, v) \quad (4.5.1)$$

中的四条曲线确定的。这里考虑的路线是图 4.5.1 中四边形的四条边，其边长当  $v$  为常数时等于  $\Delta u$ ，当  $u$  为常数时等于  $\Delta v$ 。 $n^\mu$  在整个闭合路线中的变化为

$$\delta n^\mu = -\oint \Gamma^\mu_{\alpha\beta} n^\alpha dx^\beta \quad (4.5.2)$$

考虑到“平行四边形”的对边所产生的贡献的代数和，并且保留  $\Delta u$  和  $\Delta v$  的一次项，得

$$\delta n^\mu = \frac{\partial}{\partial v} (\Gamma^\mu_{\alpha\beta} n^\alpha) \Delta v \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \Delta u - \frac{\partial}{\partial u} (\Gamma^\mu_{\alpha\gamma} n^\alpha) \Delta u \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} \Delta v \quad (4.5.3)$$

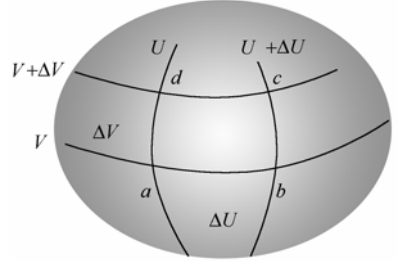


图 4.5.1 曲率张量的物理图像

完成上式的运算，并利用表示  $n^\mu$  在平行位移下的变化的公式，则结果可写成如下形式：

$$\delta n^\mu = - \left[ \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \right] \times n^\alpha \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \Delta u \Delta v \quad (4.5.4)$$

$$\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{\delta n^\mu}{\Delta v \Delta u} = - \left[ \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \right] n^\alpha \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \quad (4.5.5)$$

式 (4.5.5) 的左端是矢量。因  $u$  和  $v$  都是参数，故  $\partial x^\beta / \partial u$  和  $\partial x^\gamma / \partial v$  也是矢量。因此，由下式

$$R^\mu_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \quad (4.5.6)$$

定义的量  $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$  是张量，叫做黎曼—克里斯托菲张量，或者简称为曲率张量。对于一个无穷小闭合路线，则有

$$\delta n^\mu = -R^\mu_{\alpha\beta\gamma} n^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} du dv \quad (4.5.7a)$$

又因  $\delta(n_\mu n^\mu)$  在平行位移下化为零，故有

$$\delta n_\mu = R^\alpha_{\mu\beta\gamma} n_\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial u} \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} du dv \quad (4.5.7b)$$

由式 (4.5.7) 可知，对于任意的有限闭合路线（需要沿此曲线对  $u$  和  $v$  进行积分）， $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$  为零保证任意矢量在平行位移下的不变性。

对于一给定区域中的洛伦兹度规，因  $g_{\mu\nu}$  为常数，曲率张量化为零。对这样的空间进行坐标变换，因  $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$  的张量特性，其分量经变换后仍然为零。由此得出，空间为平坦的必要条件是  $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$  为零。另一方面，如果  $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$  处处化为零，那么洛伦兹度规可以通过一组（闵可夫斯基）轴的平行扩展而产生。因这种操作是单值的，与路线无关。于是，任意矢量的诸

分量在平行位移下处处化为零。度规所有一阶导数也将处处化为零。

由于出发点的度规为洛伦兹度规，显然任何地方的度规均为洛伦兹度规。由此得出：空间真空场为平坦的充分必要条件是  $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$  的所有分量处处为零。

表达式 (4.5.6) 告诉我们， $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$  关于  $\beta$  和  $\gamma$  是反对称的。张量  $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$  由下式给出：

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = g_{\mu\delta} R^\mu_{\alpha\beta\gamma} \\ = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\delta \partial x^\beta} \right) + g_{\mu\nu} (\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \Gamma^\nu_{\delta\gamma} - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} \Gamma^\nu_{\delta\beta}) \quad (4.5.8)$$

由式 (4.5.8) 可看出：

$$R_{\alpha\delta\beta\gamma} = -R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\delta\gamma\beta} = R_{\beta\gamma\alpha\delta} \quad (4.5.9)$$

由式 (4.5.8) 和式 (4.5.9) 可以验证：

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} + R^\alpha_{\delta\beta\gamma} + R^\alpha_{\gamma\delta\beta} = 0 \quad (4.5.10)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 \quad (4.5.11)$$

## 4.5.2 爱因斯坦张量

在某点上取短程线坐标系，则该点的克里斯托菲符号化为零，且  $R^\mu_{\delta\beta\gamma}$  的协变导数变为

$$R^\mu_{\delta\beta\gamma;\nu} = \frac{\partial^2 \Gamma^\mu_{\delta\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \Gamma^\mu_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\nu} \quad (4.5.12)$$

于是由式 (4.5.12) 得

$$R^\mu_{\delta\beta\gamma;\nu} + R^\mu_{\delta\nu\beta;\gamma} + R^\mu_{\delta\gamma\nu;\beta} = 0 \quad (4.5.13)$$

关系式 (4.5.13) 是在特定参照系中得到的结果，因左端是张量，所以在其他一切参照系中均为零。这个关系式称为比安基 (Bianchi) 恒等式。

对二秩或高秩的混合张量的一个上标和一个下标求和，得到一个比原来张量低二秩的张量。这种运算称为降秩 (Contraction)。对  $R^\alpha_{\mu\beta\nu}$  降秩而构成的张量  $R_{\mu\nu}$  称为里奇 (Ricci) 张量。

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\alpha\nu} \quad (4.5.14)$$

可以验证奇张量具有对称性，即  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ 。对  $R_{\mu\nu}$  降秩而构成的标量

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R \quad (4.5.15)$$

称为曲率标量。

用比安基恒等式与  $g^{\delta\beta} \delta_\mu^\gamma$  内乘：

$$g^{\delta\beta} (R^\gamma_{\delta\beta\gamma;\nu} + R^\gamma_{\delta\nu\beta;\gamma} + R^\gamma_{\delta\gamma\nu;\beta}) = 0$$

由  $g^{\delta\beta}$  的协变导数为零，另外  $R^\nu_{\delta\beta\gamma} = -R^\nu_{\delta\gamma\beta}$ ，上式可写为

$$\left( R^\nu_\gamma - \frac{1}{2} \delta^\nu_\gamma R \right)_{;\nu} = G^\nu_{\gamma;\nu} = 0 \quad (4.5.16)$$

张量  $G^\nu_\gamma = R^\nu_\gamma - \frac{1}{2} \delta^\nu_\gamma R$  称为爱因斯坦张量。因此可见爱因斯坦张量的协变导数为零。

### 4.5.3 短程线

现在来考虑这样的问题：由“每一线元均为前一线元平行位移的结果”这一要求所定义的曲线方程是一个什么样的方程？任一曲线方程均为单参数点族。

$$x^\alpha = f^\alpha(s)$$

切矢量为  $dx^\alpha/ds$ ，并且由平行位移而得的新切矢量为

$$T'^\rho = \frac{dx^\rho}{ds} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} dx^\beta \quad (4.5.17)$$

新切矢量  $T'^\rho$  还可由下式给出：

$$T'^\rho = \frac{dx^\rho}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{dx^\rho}{ds} \right) ds \quad (4.5.18)$$

令式 (4.5.19) 和式 (4.5.20) 相等，则得曲线方程如下：

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (4.5.19)$$

该曲线的每一线元均为前一线元平行位移的结果。

## 4.6 引力场方程

### 4.6.1 流守恒律

#### 1. 流守恒

首先考虑在某种物质的流中<sup>①</sup>，单位时间内通过一小面积  $\Delta S$  的该“物质”的流量  $\Delta m/\Delta t$ ，如图 4.6.1 所示。 $\Delta S$  为所考虑的小面积，“取小面积”有两个意思：一是在它的范围内该“流”是均匀的，即密度  $\rho$  和速度  $v$  可视为常数；二是  $\Delta S$  小到可以视为小平面，因而可把  $\Delta S$  看做是一个矢量，以法线方向作为此矢量的方向。

$\Delta t$  时间内流过  $\Delta S$  的“物质”就存在于以  $\Delta S$  为底面、以  $v\Delta t$  为母线的小柱体之内，其质量为

$$\Delta m = \rho \Delta V \quad (4.6.1)$$

这里的  $\Delta V$  为此小柱体的体积，等于  $\Delta S$  与  $v\Delta t$  的标量积，即  $\Delta V = \Delta S \cdot v\Delta t$ ，由此可得质量为

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho (\Delta S \cdot v\Delta t) \quad (4.6.2)$$

单位时间流过的量为通量，通量  $\Delta\Phi$  为

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho v \cdot \Delta S \quad (4.6.3)$$

对于一个小立方体而言，单位时间内从  $dydz$  面流出的量，即通量，如图 4.6.2 所示。

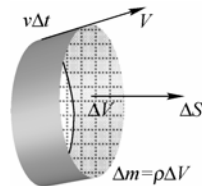


图 4.6.1 物质流示意图

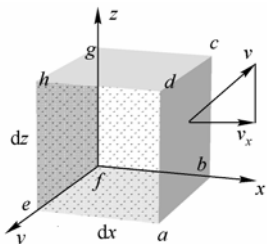


图 4.6.2 小立方体物质流示意图

① 赵展岳，相对论导引，清华大学出版社，2003，171-179.

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho\mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{S} = \rho v_x \cdot \Delta S = \rho v_x \, d y \, d z$$

沿  $\mathbf{x}$  方向, 从  $abcd$  面流出的量减去从  $efgh$  面流入的量为

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\Phi) \cdot d x = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \Delta S \cdot d x = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} d x \, d y \, d z$$

依照上述思路, 得到单位时间内从该小立方体中流出的总量减去流入的总量。

$$\Delta\Phi = \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] d x \, d y \, d z = (\rho v^\alpha)_{,\alpha} \Delta V = \text{div}(\rho\mathbf{v}) \Delta V$$

这里引入符号  $\text{div}\mathbf{A} = (\mathbf{A})_{,\alpha}$  称为矢量  $\mathbf{A}$  的三维散度。

散度  $\text{div}\mathbf{A}$  的定义是: 包围小体积  $\Delta V$  的封闭面上  $\mathbf{A}$  的通量  $\Delta\Phi = \oint \mathbf{A} d\mathbf{S}$  与该小体积  $\Delta V$  之比的极限。

$$\text{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (4.6.4)$$

从定义可看出, 散度与坐标系的选择无关。散度本质上判别了该处是否有源的, 为零则表明无源。  $(\mathbf{A})_{,\alpha}$  描述了该坐标点处的小体积是否有源。另一方面单位时间内小体积内该物质的减少量为  $-\frac{\partial\rho}{\partial t} \Delta V$ , 流出的量必等于减少的量, 即

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} \Delta V = (\rho v^\alpha)_{,\alpha} \Delta V = \text{div}(\rho\mathbf{v}) \Delta V$$

由此得到方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho v^\alpha)_{,\alpha} &= 0 \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{v}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.6.5)$$

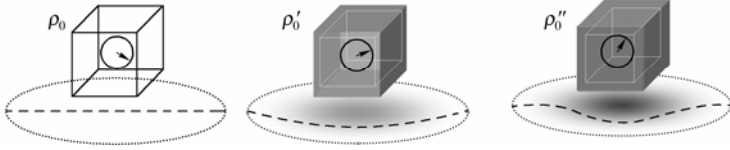
上面两式称为流体的连续性方程。方程表明该流体不能在小体积内产生和消失, 即流守恒。这是微分形式的守恒律。

## 2. 物质密度与测量协变效应

在上述讨论中, 测量小立方体体积  $\Delta V$  和测量时间  $t$  是一个不变量, 密度  $\rho$  与测量体积  $\Delta V$  和测量时间  $t$  无关。我们要问: 上式中测量小立方体体积  $\Delta V$  和测量时间  $t$  是什么条件下的时空?  $\Delta V$  和  $t$  真的是不变的吗? 从真空场的角度来考虑问题时,  $\Delta V$  和  $t$  是理想平直空间条件下的空间和时间。对于实际的测量而言, 找不到这样的理想平直空间, 这样的测量就存在问题。因为任意物质的存在都会对背景空间造成影响 (如图 4.6.3 所示), 使得背景空间产生微小的形变, 这种形变的范围就是引力场的范围。理论上引力场作用的范围是  $\infty$ , 事实上, 引力是背景空间产生微小的形变所产生的效应, 显然背景空间产生的形变是有限的, 因而引力场的作用范围是有限的。

对于测量的小体积而言, 小体积内每一细小的物质颗粒都会对背景空间产生一个微小的形变。随着物质颗粒的增加, 空间微小的形变会不断地进行累加, 使得背景空间不断地变硬。背景空间的形变范围就是引力场的力程, 是一个极其大的范围, 因而测量的小体积  $\Delta V$  和测量时间  $t$  都是背景时空, 这样我们有必要把  $\Delta V$ ,  $t$  和物质密度  $\rho$  联系起来。  $\rho$  越大,

则背景真空场越“硬”， $\Delta V$  内外时间都会变慢，此时， $\Delta V$ ， $t$  是精确的；从一个大范围来考虑，如果背景空间的形变范围和  $\Delta V$  可比拟，那么  $\Delta V$  内时间  $t$  变慢， $\Delta V$  外时间  $t'$  也会变慢。相比两者就会存在差异， $\Delta V$  外时间  $t' < t$ ，也会变慢或几乎不变慢，这种在考虑大范围宇宙情况时是应该考虑的因素。该因素即  $\rho$  的密度的增加会导致  $\Delta V$  内部时间  $t$  变慢。



在图中，测量小立方体的时空为理想平直时空，时空标尺是恒定的。事实上，物质密度越大，对周围的时空影响越大，测量小立方体的时空会发生改变，空间收缩，时间变慢

图 4.6.3 物质对空间（二维空间）的改变示意图

对于测量而言，由于引力场为长程力，测量者及测量工具本身处于背景空间中，因而测量工具会发生测量协变。物理学本身是一门实验科学，因此，选用具有测量协变的时空更为合理。为了有别于平直时空，把  $\Delta V$ ， $t$  写为  $\Delta V'$ ， $t'$ 。

$$\Delta V' = V(x'); \quad t' = t(t') \quad (4.6.6)$$

这里所讨论的是四维时空，有必要把式（4.6.5）写成四维时空的表述形式，先改写式中的  $\rho v^\alpha$ 。

$$\rho v^\alpha = \rho \frac{dx^\alpha}{dt} = \rho c \frac{dx^\alpha / dS}{dx^0 / dS} = \rho c \frac{u^\alpha}{u^0} \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

考虑一个简单的例子，对于一个以速度  $v$  运动的局域空间  $\omega(t, x, y, z)$ ，可以认为背景空间发生改变。

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right\}$$

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\rho' = \frac{m'}{V'} = \frac{m'}{\Delta x' \Delta y' \Delta z'} = \frac{\frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}}}{\frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \Delta y \cdot \Delta z} = \frac{m}{V} = \rho$$

可以看出在这种情况下，质量密度对于局域空间  $\omega$  内的观察者而言，没有变化。

这里引入

$$\rho c = \sigma u^0; \quad \rho v^\alpha = \sigma u^\alpha \quad (4.6.7)$$



可以把式 (4.6.5) 改写为

$$(\sigma u^0)_{,0} + (\sigma u^\alpha)_{,\alpha} = 0$$

$$\text{或者} \quad (\sigma u^i)_{,i} = 0 \quad (i=0, 1, 2, 3) \quad (4.6.8)$$

这就是四维形式的守恒律。

该守恒量的密度  $\rho = \frac{\sigma u^0}{c}$ ，流密度  $\rho v^\alpha = \sigma u^\alpha$ 。常数  $c$  不影响守恒定理。可以说存在一

守恒量，其密度为  $\sigma u^0$ ，流密度为  $c\sigma u^\alpha$ 。若有微分形式的守恒律，

$$(A^i)_{,i} = 0 \quad (4.6.9)$$

其密度为  $A^0$ ，流密度为  $cA^\alpha$ ， $A^i$  可以看做一个守恒的四维流矢量。把上式推广到弯曲时空中，有

$$(A^i)_{;i} = 0 \quad (4.6.10)$$

即  $A^i$  的“协变散度”为 0，则有下列式成立：

$$(A^i \sqrt{-g})_{;i} = 0 \quad (4.6.11)$$

其中  $g$  为  $g_{ik}$  的行列式。上式中，守恒量的密度为  $A^0 \sqrt{-g}$ ，三维流密度为  $cA^\alpha \sqrt{-g}$ （三维流密度是一个三维矢量，其大小等于单位时间内流过垂直于流矢量的单位面积的流量）。

$A$  并不限于一阶逆变张量（矢量）， $A$  还允许有任意多个其他张量指标。如  $A$  为  $T^{ik}$ ，只要下式成立：

$$T^{ik}_{;k} = 0 \quad (4.6.12)$$

必存在这样的守恒律：守恒量的密度为  $T^{i0} \sqrt{-g}$ （即有四个守恒量，分别由  $i=0, 1, 2, 3$  代表），守恒量的三维流密度矢量为  $cT^{i\alpha} \sqrt{-g}$  ( $\alpha=1, 2, 3$ )。所以式 (4.6.12) 代表了四个守恒律，分别由  $i=0, 1, 2, 3$  表示。

假设物质是连续分布的，相邻点的物质运动速度也是连续变化的，且物质元没有相互作用。在此基础上，来考虑“静质量”的守恒问题，由于无相互作用，粒子不能产生也不会湮灭，因而静质量守恒：

$$(\rho_0 u^i)_{;i} = 0 \quad (4.6.13)$$

其中  $\rho_0$  为静质量密度有关的一个四维标量。这时守恒量（静质量）的密度为  $\rho_0 u^0 \sqrt{-g}$ ，流密度为  $c\rho_0 u^\alpha \sqrt{-g}$ 。这里关心的是标量  $\rho_0$  的物理意义。

先选定一个物质元，然后再选择一个“瞬时随动局部惯性系”。由等效原理可知，这样的局部惯性系总是存在的。在这样的局部惯性系中，时空是“平直”的，可选笛卡儿坐标，因而有  $\sqrt{-g}=1$ 。这里该物质元由于随动，在所考虑的瞬间相对该局部惯性系是静止的，有

$$dx^\alpha = 0, \quad dS = dx^0; \quad u^0 = 1, \quad u^\alpha = 0$$

在此参照系中的静质量密度为

$$\rho_0 u^0 \sqrt{-g} = \rho_0 \quad (4.6.14)$$

可见， $\rho_0$  的意义是“瞬时随动局部惯性系”中的静质量密度。也就是随着物质元一起运动的观察者（若认为无相互作用，则物质元是“自由粒子”，本身就是局部惯性系）所测的质量密度。这称为“固有密度”，它是一个不变量。

上述对背景空间的考虑使我们认识到：虽然我们在“瞬时随动局部惯性系”中可测出静质量密度  $\rho_0$ ，但对  $\rho_0$  的测量时空存在测量协变，如果从一个大的范围来考虑，摆脱测量协变后，测量  $\rho_0$  的时空在弯曲时空中就不再是一个不变量。

如果把整个宇宙空间用  $\Omega$  表示，宇宙的总质量为  $M$ ，如图 4.6.4 所示，设宇宙匀速膨胀，膨胀速度为  $v$ ，这时，

$$\Omega = x'y'z' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot y \cdot z \Rightarrow \rho' = \frac{m'}{\Omega'} = \frac{\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot y \cdot z} = \frac{m}{V-vtyz}$$

这是显而易见的，随着宇宙的匀速膨胀，整个宇宙的总密度变小。

## 4.6.2 爱因斯坦引力场方程

### 1. 爱因斯坦场方程的建立

爱因斯坦建立的场方程的基本思想是：物质的分布及其运动决定时空结构。该原理称为爱因斯坦原理。这一原理在真空中就是局域场形变对背景场时空的影响。

爱因斯坦原理归纳为：描述物质运动的基本好量，应与具有同样对称性质的描述时空结构的基本好量成比例。

现在来考虑基本好量。

① 描述时空结构的基本好量应该是能量动量张量  $T^{ik}$ 。

② 描述时空结构的基本张量是度规  $g_{\mu\nu}$  和曲率张量  $R_{klm}^i$ ，以及由  $R_{klm}^i$  导出的  $R^{ik}$  和  $R$ 。

要注意的是虽然  $\Gamma_{kl}^i$  也是描述时空结构的量，但不是张量，因而无法与张量  $T^{ik}$  对应。

用度规张量来描述协变真空场时空。时空弯曲所表现出的力场和加速度需要采用黎曼度规。一个非均的引力场，在每一个小区域内，同一个适当的加速系是等效的。因此可用黎曼度规来描述引力场。形变真空场空间的线元的平方由下式给出：

$$-ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.6.15)$$

把度规张量  $g_{\mu\nu}$  与引力场等同起来，这是真空场的自然结果。

(1) 第一种可能性

$$g_{ik} \propto T_{ik} \quad (4.6.16)$$

但该式不成立。例如在平直真空空间中  $T_{ik} = 0$ ，而  $g_{ik} = \eta_{ik} \neq 0$ 。

(2) 第二种可能性

$$R \propto T \quad (4.6.17)$$

这里  $R = R_i^i$ ， $T = T_i^i$ 。但这只是一个方程，时空结构由  $g_{ik}$  决定，有 10 个不同的函数。即使考虑到采用不同的坐标，统一时空结构可由不同的  $g_{ik}$  来描述，去掉这些坐标变换的自由度，时空结构也需要由 6 个独立的  $g_{ik}$  分量来决定。1 个方程无法决定 6 个函数（ $R$  是  $g_{ik}$  的函数。上式可看成是  $g_{ik}$  的微分方程），这种对应关系不够，不满足场方程的要求。

(3) 第三种可能性

$$R_{klm}^i \propto M_{klm}^i$$

先来讨论  $M_{klm}^i$ 。在狭义相对论的场论中，可由拉格朗日（Lagrange）密度  $L$  获得  $T_{\mu\nu}$ ，

其中  $L$  被假定为场变量  $q^\alpha$  及其一阶导数  $q^\alpha_{,\beta}$  的函数, 即  $L = (q^\alpha, q^\alpha_{,\beta})$ 。作用量函数是  $L/c$  的四维体积分, 而稳定作用量原理断言: 当场变量的变分在边界上为零时, 有

$$\delta \int L d^4x = 0 \quad (4.6.18)$$

这里符号  $\delta$  取通常的意义, 并假定场变量  $q^\alpha$  和  $q^\alpha_{,\beta}$  是某参数的函数。若参数为  $k$ , 则  $\delta = dk(\partial/\partial k)$ , 并且, 在求微分  $\partial/\partial k$  时假定  $x^\mu$  为常数。因此, 对坐标微分和对  $k$  微分的次序是可交换的。式 (4.6.18) 可表示为

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int L d^4x = \int \left( \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q^\alpha_{,\gamma}} \delta q^\alpha_{,\gamma} \right) d^4x \\ &= \int \left( \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial L}{\partial q^\alpha_{,\gamma}} \right) \delta q^\alpha d^4x + \int \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\partial L}{\partial q^\alpha_{,\beta}} \delta q^\alpha \right) d^4x \end{aligned} \quad (4.6.19)$$

式 (4.6.19) 右端的最后一项又可写成面积分的形式, 因假定  $\delta q^\alpha$  在积分域的边界上为零, 故此面积分也为零。由于式 (4.6.19) 对于任意的变分均成立, 于是推出场方程为

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial L}{\partial q^\alpha_{,\gamma}} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (4.6.20)$$

将式 (4.6.20) 乘以  $q^\alpha_{,\beta}$ , 并注意到

$$\frac{\partial L}{\partial x^\beta} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial L}{\partial q^\alpha_{,\rho}} \frac{\partial q^\alpha_{,\rho}}{\partial x^\beta}$$

以及  $q^\alpha_{,\gamma,\beta} = q^\alpha_{,\beta,\gamma}$ , 则结果经整理后为

$$\left[ \delta_{\beta}^{\gamma} L - q^\alpha_{,\beta} \frac{\partial L}{\partial q^\alpha_{,\gamma}} \right]_{,\gamma} = 0 \quad (4.6.21)$$

由式 (4.6.21) 和式 (4.6.19) 得出

$$T_{\beta}^{\gamma} = \delta_{\beta}^{\gamma} L - q^\alpha_{,\beta} \frac{\partial L}{\partial q^\alpha_{,\gamma}} \quad (4.6.22)$$

从经典力学知道  $-T_0^0$  即能量密度, 因为  $q^\alpha_{,0}$  是同速度相对应的。对式 (4.6.21) 和式 (4.6.22) 的研究表明, 定义式 (4.6.22) 不能唯一地确定  $T_{\beta}^{\gamma}$ 。可以将任意的量  $\Phi_{\beta}^{\gamma\alpha}_{,\alpha}$  加到  $T_{\beta}^{\gamma}$  上, 只要  $\Phi_{\beta}^{\gamma\alpha}_{,\alpha}$  关于  $\gamma$  和  $\alpha$  是反对称的。习惯上这样来选取函数  $\Phi$ , 以使得出的张量  $T_{\beta\gamma}$  (二指标均已升高或降低) 是对称的。这样做的理由是希望由

$$M_{\alpha\beta\gamma} = T_{\alpha\beta} x_{\gamma} - T_{\alpha\gamma} x_{\beta} \quad (4.6.23)$$

定义的角动量密度满足守恒定律

$$M_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\alpha} = 0 \quad (4.6.24)$$

$M_{klm}^i$  是某个描述物质运动 (场源) 的张量。这一方案也被否定。 $R_{klm}^i$  有 20 个独立分量, 就应该有 20 个独立方程, 但表述物质运动的基本张量中并不存在具有 20 个独立分量的张量。 $g_{ik}$  只有 10 个不同的分量, 相应的独立方程也应该只有 10 个, 少和多都会产生矛盾。此

外, 在物质源之外  $M_{klm}^i$  皆为零, 而时空可以是弯曲的,  $R_{klm}^i$  可以是弯曲的, 不为零。由此可知, 该设想不成立。

(4) 第四种可能性

$$R_{ik} \propto T_{ik} \quad (4.6.25)$$

$R_{ik}$  是对称张量, 与  $g_{ik}$  一样, 也具有 10 个不同的分量。但存在一个困难, 因为

$$T_{;k}^{ik} = 0 \quad (4.6.26)$$

是守恒定律。对于非相对论性力学中的流体, 质量守恒可表示为连续方程

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i} + c \frac{\partial \rho_M}{\partial x^0} = 0 \quad (4.6.27)$$

这里  $v^i$  是速度, 对  $i$  的求和包括三个空间坐标。上式的狭义相对论推广为

$$\frac{\partial T_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad (4.6.28)$$

这里  $T_{\mu}^{\nu}$  是应力—能量张量。或者记为  $T_{\mu}^{\nu}{}_{, \nu} = 0$ 。对于流体,  $T_{\mu\nu}$  是借助四维速度  $U_{\mu}$  来给定的, 即

$$T_{\mu\nu} = (p + E)U_{\mu}U_{\nu} + \delta_{\mu\nu}p \quad (4.6.29)$$

这里  $p$  是压力,  $E$  是在各点的局部物质静止系中算得的总 (质量) 能量密度。方程式 (4.6.29) 是三维应力张量  $T_{ij}$  的四维推广, 由  $T_{ij}$  确定的作用在面元  $ds^i$  上的力  $dF_i$  为

$$dF_i = T_{ij}ds^j \quad (4.6.30)$$

式 (4.6.29) 只给出了质量的守恒, 而式 (4.6.30) 则既包括总能量的守恒又包括动量的守恒。动量与能量由  $p_{\alpha}$  的空间分量和时间分量确定。

$$p_i = \int T_i^0 dx^0 dx^2 dx^3, \quad p_0 = \int T_0^0 dx^0 dx^2 dx^3$$

在洛伦兹变换下,  $p_{\alpha}$  的变换犹如一个四维矢量。

但在一般情况下, 时空曲率张量

$$R_{;k}^{ik} \neq 0 \quad (4.6.31)$$

因而不能直接用

$$R_{ik} \propto T_{ik}$$

来建立场方程。必须对  $R_{ik}$  进行改进。找出一个张量  $G_{;k}^{ik} = 0$ , 同时又与  $R^{ik}$  比较接近, 这个张量的确存在。

因为  $G_{;k}^{ik} = 0$ , 并且  $G^{ik}$  与  $R^{ik}$  比较接近, 应该能由曲率张量的协变微商等式导出。这个张量就是前面讨论过的爱因斯坦张量, 即式 (4.5.18)。

$$\left( R_{\gamma}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\gamma}^{\nu} R \right)_{; \nu} = G_{\gamma; \nu}^{\nu} = 0 \quad (4.6.32)$$

上式表明在协和坐标条件下, 出现测量协变;  $T_{;k}^{ik} = 0$  表明物质沿短程线运动, 出现测量协变。从一个大的范围来考虑: 当背景空间改变时, 物质沿背景空间短程线运动, 空间按背景空间协和坐标改变。这一效应使得我们某时刻对背景空间改变无法察觉, 或者说该时刻背景空间改变无任何观测效应。但从一个相距较远的时刻来说, 存在一个时空间隔, 那么背景时

空所产生的效应是可以被观测到的。

爱因斯坦认为  $G^{ik}$  与  $T^{ik}$  成正比，即

$$G^{ik} = K T^{ik}$$

这里的  $K$  是一个比例常数。场方程必取如下形式：

$$R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} R - \lambda \delta_{\mu}^{\nu} = K T_{\mu}^{\nu} \quad (4.6.33)$$

这里  $\lambda$  和  $K$  是常数。对于弱场，引力规范项  $\varphi$  的泊松（Poisson）方程描述为

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho_M \quad (4.6.34)$$

这里  $G$  为引力常数， $\rho_M$  为单位体积的质量。至少可将式（4.6.34）的左端修改成洛伦兹不变式，即将其写为

$$\square \varphi = 4\pi G \rho_M \quad (4.6.35)$$

式（4.6.35）类似于电动力学中的四维势方程组。对于某个电荷电力线的数量来说是固定不变的，因总电荷不变，故电荷密度是四维矢量的一个分量。但质量（本质是相对场应变，随参照系不同而不同）密度  $\rho_M$  并非不变量，因而式（4.6.35）的右端不是四维矢量的分量，而是在狭义相对论中已熟知的二秩应力—能量张量的分量。

将式（4.6.33）的常数  $K$  选为  $8\pi G/c^4$ ，即其中  $G$  为引力常数， $G = 6.667 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \cdot \text{g}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

于是场方程变为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (4.6.36)$$

上式左边是真空场弯曲，对应于右边质量观测效应。

## 2. 场方程的真空场物理学图像

从场的角度来看，时空“弯曲”的概念和爱因斯坦所构想的不一致，这里的“弯曲”是以真空存在真空场为基础。这种“弯曲”是由于真空场的整体上存在形变，形变后的场会降低传播能力<sup>①</sup>（形象地说是真空场发生“硬化”），因而光的速度会变慢，发生折射。如光射到水中的折射被理解为：水使光速变慢而致使光线“弯曲”。真空场大范围的场形变表现为时空弯曲，即光传播路径发生弯曲以及存在引力场。对于时空弯曲作如下定义：由于背景真空场存在大范围的非均匀的场形变，使得光子和费米子的传播速度变慢，且具有非均匀性，这样便发生折射效应使得光线弯曲，这种效应称为时空弯曲。

## 3. 爱因斯坦引力方程性质讨论

爱因斯坦引力方程是一个微分方程，这一性质描述了物质四动量形态与背景空间的瞬态关系。由于是瞬态关系，因而必不可避免的会存在测量协变效应。

对于引力场而言，任何物质的存在都会产生万有引力而导致时空弯曲。时空的弯曲的曲率符号一致，因而不存在大范围内时空平均曲率为 0 的情况存在。只要有时空弯曲存在，时空就不是平直的，必然存在引力场，引力场的存在有导致物质沿短程线运动，可以断定宇宙不是稳定的。对于动态的宇宙必须建立一个演化方程。从两方面来考虑

（1）考虑在  $t_0$  时刻的时空为  $\Omega$ ，该时刻的某一系统的场方程为： $G^{ik} = K T^{ik}$ ，在  $\Delta t$  之

① 参见本书第 1 章第 3 节真空场基本假设 IV。

后场方程为  $G^{ik} = K T^{ik}$ ，再过  $\Delta t$  之后，场方程为  $G'^{ik} = K T'^{ik}$ ，…这样一直演化下去，这种演化是无休止的。

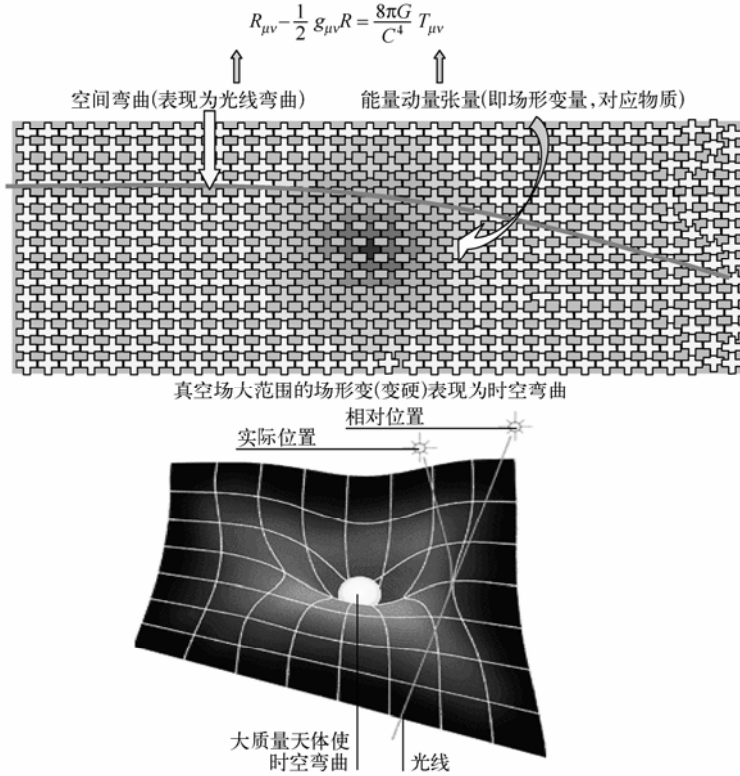


图 4.6.4 时空弯曲

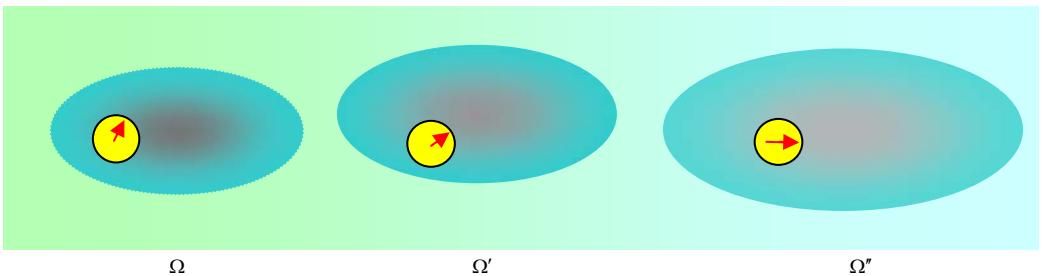


图 4.6.5 背景空间膨胀导致时间变快

$$G'^{ik} - G^{ik} = K T'^{ik} - K T^{ik} \Rightarrow \Delta G^{ik} = K \Delta T^{ik}$$

$$\int dG^{ik} = K \int dT^{ik} \quad (4.6.37)$$

这是演化场方程的积分表达式。

(2) 由于系统外存在物质，某一系统的背景并非严格平直，这样就存在弯曲。该背景空间的坐标系为  $\xi^i$ ，是弯曲坐标架，度规为  $g_{\mu\nu}$ 。时空弯曲用  $\Lambda g_{\mu\nu}$  描述。这里考虑：(1) 如果把整个宇宙作为一个系统来看，宇宙外部是无质量的，因而该项为零；(2) 系统外在物质

会导致整个系统的背景空间发生微小弯曲：

$$\mathbf{G}'^{ij} = \mathbf{G}^{ij} + \Gamma_{pk}^i \mathbf{G}^{pj} d\xi^k + \Gamma_{pk}^j \mathbf{G}^{ip} d\xi^p$$

那么由于测量协变效应的存在导致系统内的  $\mathbf{T}'^{ik}$  处于无知的状态

$$\mathbf{T}'^{ik} = \mathbf{T}^{ik}$$

因而  $\mathbf{G}^{ij} + \Gamma_{pk}^i \mathbf{G}^{pj} d\xi^k + \Gamma_{pk}^j \mathbf{G}^{ip} d\xi^p = \mathbf{T}^{ik}$ ，得到

$$\Delta g_{\mu\nu} = \Gamma_{pk}^i G^{pj} d\xi^k + \Gamma_{pk}^j G^{ip} d\xi^p$$

另外，在上述基础之上，整个系统的存在及运动会自身系统背景的空间产生微小形变  $\mathbf{G}'^{ij}$ ，而自身系统是动态的， $\mathbf{G}'^{ij}$  是一个变量。当自身系统处于运动状态，例如膨胀或收缩，那么空间的收缩或膨胀是可以通过物质的运动状态观测到。对于我们的观测而言，测量的本身是通过电磁波进行测量，时空曲率  $\mathbf{G}'^{ij}$  测量与物质动量张量  $\mathbf{T}'^{ik}$  的测量是同步的，爱因斯坦方程严格成立。

从上述的讨论可知，当存在某种物质改变背景空间时，爱因斯坦场方程多出一项  $\Delta g_{\mu\nu}$ 。此时的场方程为

$$\mathbf{G}^{ij} - \Gamma_{pk}^i \mathbf{G}^{pj} d\xi^k - \Gamma_{pk}^j \mathbf{G}^{ip} d\xi^p = K \mathbf{T}'^{ik} \quad (4.6.38)$$

这里我们在说一下引力耦合常数。

$$\frac{V}{E_g} = \frac{G^2 M^4}{\hbar c} = \alpha_g^2 \quad (4.6.39)$$

$V = \frac{GM}{r^2}$ ， $E_g = Mc^2$ 。引力耦合常数  $\alpha_g$  可以理解为质量  $Mc^2$  对背景引力空间（时空）压弯的程度。后面说到的量子场可以利用基本粒子所具有的纤维特性对耦合常数进行估算。但对于引力耦合常数目前无法估算，甚至无从下手。

### 4.6.3 引力场的万有特性

#### 1. 场应变具有质量效应

任何场应变都表现为质量，而质量的存在必然产生引力。轻子会对时空场产生一个微小的影响，使时空场发生弯曲。对于一个静止的自旋粒子，所有不同形式的能量都包括在它的“静质量”中，如自旋波是有能量的，自旋波和轻子场构成一个整体， $E = mc^2$ 。带自旋的轻子场（即一个基本粒子，如电子）一旦运动，其动能也会产生质量，称为动质量。

对于光子而言，由于光子内禀场是一维移动，光子只有动质量。光子内禀场具有电力线结构，而量子场任何形式的场应变都表现为能量，因而电力线结构对时空场产生影响和其他形式的场应变是一致的，重要的是场应变的大小，而非场应变的结构形式。所有能量都有重量，因而光子也有重量。

这里要注意的是一个物体的能量是与观测者的相对运动有关的，能量是相对的，两物体之间场应变相对差异越大，相对能量越大。以前所谈及的能量（应变）是相对于背景场的。

量子场任何形式的应变所产生的引力效应都是一致的。对于量子场来说，任意的场应变都能产生相同的球对称背景场应变效应，因为量子场的应变造成的背景时空场弯曲是微小的，相对于巨大的弯曲背景场来说，微小的量子场的应变无结构可言，就是一个点。对于万

有引力，无论是正应变还是负应变所产生的引力都是相吸，因而可以得到量子场任何形式的场应变都表现为质量，且引力质量和惯性质量相等的结论。

## 2. 万有引力特性

引力质量是一个棘手的问题：为什么任何粒子（无论正粒子还是反粒子）都表现为引力，而不是斥力，完全不遵从“同性相斥、异性相吸”的原则？

现在来解决这一问题。在真空场理论中，无论是量子波还是轻子场都存在内禀空间真空场，所有的场形变都被封闭在内禀空间以内。我们所要讨论的问题是量子场背景场的场应变，这种应变是非常微小的。但这种微小的应变却构成了万有引力。为什么会具有万有引力？这里有必要弄清下面的问题。

### （1）具有相反真空场特性的引力场相吸

如图 4.6.6 所示，虚线圆以内表示轻子场内禀空间，以外为万有引力空间，即协变真空场空间。引力相互作用分三种情况考虑。

① 外部真空场是几乎平直无任何场形变的场。图 4.6.6 中，（a）表示正轻子场，是由于轻子中心缺损一基本单元真空场而造成的，真空场向轻子中心坍缩，尽管这种拉伸形变被限制在内禀空间以内，但是对外部背景空间场仍然会有一个非常微小的影响，背景场也向轻子中心方向发生极微小的坍缩，内禀空间有微小的收缩，这种收缩使得靠近内禀空间球壳的真空场密度变小，背景时空产生一个微小的正曲率。外部真空场的疏密关系如图中所示。这类类似于水面上的两个气泡，气泡破坏了水的表面张力，使两个气泡相互汇聚，变成一个更大的气泡。

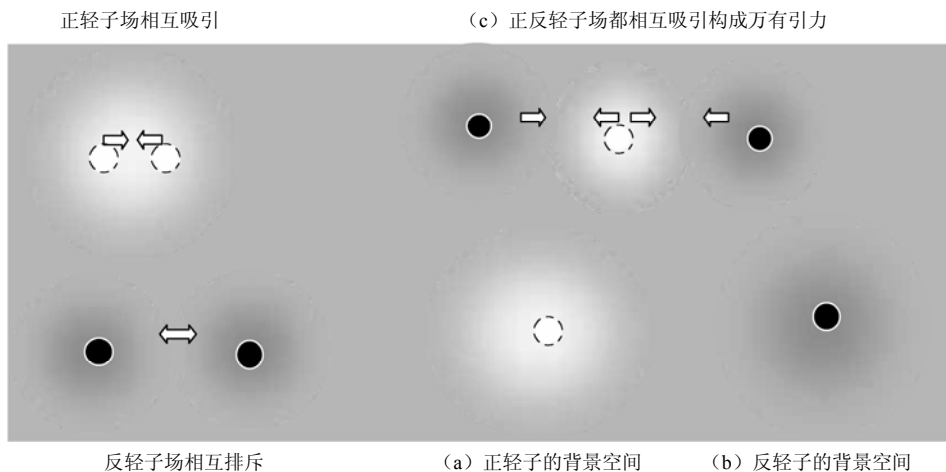


图 4.6.6 引力场的构成

② 由拉伸应变真空场构成的物质就称为正物质。图 4.6.6 中（b）的情况更容易理解，平直真空场中多出一份基本单元真空场而形成反轻子场。反轻子场压缩周围的真空场，同样这种压缩形变被封闭在内禀空间内，但内禀空间内的真空场由于压缩形变而使内禀空间有微小的膨胀，从而对外部背景真空场产生微小的压缩，这种压缩使得靠近内禀空间球壳的真空场密度加大。背景时空产生一个微小的负曲率。外部真空场的疏密关系如图中所示。由压缩应变真空场构成的物质就称为反物质。



③ 拉伸轻子场内禀空间和压缩轻子场内禀空间一样大，但内禀空间以外的真空场密度具有相反的特性。图 4.6.6 为了方便理解显然是夸大了。对于正负应变所产生的背景时空场弯曲表现为相互吸引，因为背景真空场力图恢复平直态，换言之，异性相吸。这一点很容易理解。

对于量子波可以这样理解：量子波由拉伸场形变和压缩场形变两部分构成，两种场形变都被封闭在球形内禀空间内，对外部场所产生的效应是相反的，相对引力场来说，量子波可视为内禀空间内存在两点引力场源。对于量子场来说只有三种形态：量子波态、轻子场态和纯自旋波态（对应中微子）。其他种类的粒子都是轻子场或量子波不同形式的组合。综上所述无论何种形式的粒子对外部空间产生的效应都是相同的，由空间位置不同的点源构成。这种点源无论是何种类型所产生的，引力效应都是直接累加的。

## （2）具有相同真空场特性的力场为什么不排斥而相吸

首先，反物质应该有负曲率，而实际的情况却是无论正反物质都产生正曲率，反物质何以产生正曲率？量子波也同样产生正曲率。为什么任何形式的场应变都会造成时空正曲率弯曲而产生正引力？这的确让我们感到困惑不解。其次，相同的力场应该满足“同性相斥、异性相吸”的原则，可为什么总是相吸而表现出万有引力特性？

先来考虑第一个问题。对于真空场理论来说，这是很容易理解的。在第 1 章中我们知道量子场的任何形式的应变都会造成背景时空场的微小形变，背景时空场形变的大小严格正比于量子场应变的强弱。背景时空场应变造成真空场“硬化”，真空场硬化的非均匀性本质上就是背景场的应变大小。而背景场的应变表现为时空弯曲。这就是为什么任何形式的场应变都会造成时空正曲率弯曲。

量子场为什么总是相吸而表现出万有引力特性？这个问题很困难。重要的是我们所熟悉的外界环境很难找到模拟，物质总要相互吸引，从真空场论来看，万有引力的真空场本质究竟是什么？

对于应变的真空场总有要恢复自然态的趋势。从弹性真空场所具有的性质来看应该具有如下效应：

① 两拉伸应变真空场会拉伸周围的真空场，而彼此相互拉伸。在相互加速靠近的过程中，相互间的背景场会产生相对松弛效应，而使两应变体相互靠近；

② 拉伸应变真空场和压缩应变真空场会相互吸引，企图使应变真空场得以恢复非应变平直态；

③ 对于压缩轻子场来说，相互靠近会使应变加剧，因而应该相互排斥。

综合上述 3 点，我们把拉伸轻子场视为正物质，压缩轻子场视为反物质，物质的引力特性就会得到这样的结论：正物质吸引一切正反物质，而反物质只排斥反物质。

对于万有引力特性来说，对于任何形式的量子场都应该具有相互吸引的性质才能满足万有引力特性的要求，但上面第③点违反了这种要求。对于真空场理论来说这是一个尚待解决的问题。对于这个问题的真空场解释是当拉伸类量子场和压缩类量子场混合构成时，拉伸类量子场作为压缩类量子场中介场时，就把斥力转变为引力，如图 4.6.6 所示，于是构成了万有引力。这就是万有引力的真空场本质。关于这一点，需要更严格的证明，并定量考虑对于正反轻子场不同分布时的影响，以及相互间力场关系如何，大量不同应变形式量子场所构成的大块物质的万有引力应该满足单个量子场引力的累加性。另外，粒子内部场形变会对周围的场产生极其微小的形变。粒子越“硬”，对周围的场影响越大；而粒子越“软”，对周围

的场影响越小。

这种粒子内部场形变对周围的场造成的大范围的微小的整体形变的真空场定义为引力场，对周围真空场影响的大小定义为引力质量。宏观表现为存在引力，并构成引力质量。

综上所述，可以得知物质所具有的本质特性不再是质量，质量只不过是真空场形变之后所表现出来的一种可观测效应。引力质量和惯性质量是费米子场形变从不同角度观测的结果，是同一事物本质不同的表现形式，因而引力质量和惯性质量严格相等。

现在再来看引力质量。由于质量场的存在造成质量场以外的时空形变而产生一个力场，这个力场对另一个质量场产生一个力，这个力称为引力质量。在自由状态产生一个引力的速度  $g$ ，质量  $m$  的大小由所受到的引力大小表现出来，并满足  $F = mg$ 。那么惯性质量是什么呢？一个物体处于静止状态或匀速运动的状态（不考虑引力），此时，并没有表现出质量效应，物体保持原有的状态。当对这个物体施加一个外力，物体为保持原有状态而产生一个抵抗力，并出现改变原有运动状态的效应，满足  $F = m_i a$ ，施加的力越大，产生的加速度也就越大，质量  $m_i$  的大小由改变物体运动状态的难易表现出来。 $m_i$  称为惯性质量。 $m_i$  为引力质量。引力质量和惯性质量是严格相等，这已为实验所证实。以上的质量概念都是经典的质量概念，无论是引力质量还是惯性质量都未触及质量的本质，爱因斯坦的广义相对论使我们对引力有了更深刻的认识。对于为什么引力质量会等于惯性质量，惯性的本质是什么等问题还没有理论解释，这需要建立新的质量理论。

## 4.7 引力波

引力辐射问题一直是广义相对论的重要问题之一，迄今为止还没有人观察到引力波。如今，相对论的研究日臻完善，许多理论问题已获得实验验证。现在许多物理学家深信广义相对论确实预言了引力波的存在。真空场理论也同样认为存在引力波，虽然测量协变使引力波不可测，但引力波具有潮汐力的性质，破坏测量协变原理，因而引力波是可测的。

### 4.7.1 弱场近似

可以对爱因斯坦场方程  $R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$  给出弱场解<sup>①</sup>。假设度规接近于Minkowski度规  $\eta_{ik}$ ，此解是通过假定

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik} \quad (4.7.1)$$

而得到的。 $|h_{ik}| \ll 1$ ， $h_{ik}$  为一级量。Ricci 张量就是

$$R_{ik} \approx \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{il}^l - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{ik}^l + O(h^2) \quad (4.7.2)$$

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} \eta^{im} \left[ \frac{\partial}{\partial x^l} h_{mk} + \frac{\partial}{\partial x^k} h_{ml} - \frac{\partial}{\partial x^m} h_{kl} \right] + O(h^2) \quad (4.7.3)$$

$h$  精确到一级阶，用  $\eta^{\mu\nu}$  来完成升降指标，而不用  $g^{\mu\nu}$ 。例如  $\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\nu} \equiv h^\lambda{}_\nu$ ， $\eta^{\lambda\rho} \frac{\partial}{\partial x^\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$ 。

在线性近似下，

① [美]S.温伯格 著，邹振隆、张历宁，等译，引力论和宇宙论——广义相对论的原理和应用，科学出版社，1984，p288.

$$\begin{aligned}\Gamma_{il,k}^l &= \frac{1}{2}\eta^{lm}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^k}h_{mi} + \frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^k}h_{ml} - \frac{\partial^2}{\partial x^m\partial x^k}h_{il}\right] + O(h^2) \\ \Gamma_{ik,l}^l &= \frac{1}{2}\eta^{lm}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}h_{mi} + \frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^l}h_{mk} - \frac{\partial^2}{\partial x^m\partial x^l}h_{ik}\right] + O(h^2)\end{aligned}$$

代入式 (4.7.2), 得

$$\mathbf{R}_{ik} \approx \mathbf{R}_{ik}^{(1)} = \frac{1}{2}\eta^{lm}(h_{ml,ik} - h_{il,mk} - h_{mk,il} + h_{ik,ml}) \quad (4.7.4)$$

$\mathbf{R}_{ik}^{(1)}$  是  $\mathbf{R}_{ik}$  的一阶线性表示。

真空场方程是  $\mathbf{R}_{ik} = 0$ , 可得真空中, 弱场的方程为

$$\eta^{lm}(h_{ml,ik} - h_{il,mk} - h_{mk,il} + h_{ik,ml}) = 0 \quad (4.7.5)$$

为了简化上式, 采用谐和坐标。先了解一下谐和坐标, 一个方程推广到广义相对论时, 必须将其普通微商换成协变微商。考虑标量  $\mathbf{S}$  的达朗贝尔方程

$$\eta^{lm} \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} \mathbf{S} = 0$$

换成协变微商后为

$$\eta^{lm} \mathbf{S}_{;l;m} = 0 \quad (4.7.6)$$

因  $\mathbf{S}_{;l;m} = \mathbf{S}_{,l;m} = \mathbf{S}_{,lm} - \Gamma_{ml}^k \cdot \mathbf{S}_{,k}$ , 上式可写为

$$\eta^{lm}(\mathbf{S}_{,lm} - \Gamma_{ml}^k \cdot \mathbf{S}_{,k}) = 0 \quad (4.7.7)$$

笛卡儿坐标  $x^i$  满足达朗贝尔方程  $\square x^i = 0$ , 由上式可知

$$\eta^{lm}(x^i_{,lm} - \Gamma_{ml}^k \cdot x^i_{,k}) = 0$$

因  $x^i_{,k} = \delta_k^i$ ,  $x^i_{,lm} = 0$  (即  $x^i$  满足达朗贝尔方程), 可得

$$\eta^{lm} \Gamma_{ml}^k = 0 \quad (4.7.8)$$

满足式 (4.7.8) 条件的坐标  $x^i$  称为谐和坐标。

利用式 (4.7.3), 可将上式写成

$$\eta^{lm} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^m} h_{il} + \frac{\partial}{\partial x^l} h_{im} - \frac{\partial}{\partial x^i} h_{lm} \right) \right] = 0 \Rightarrow \eta^{lm} \left( h_{il,m} - \frac{1}{2} h_{lm,i} \right) = 0$$

此式对任意的  $l, m$  都成立, 可将  $l, m$  互换。对  $x^k$  求导, 并略去二阶小量, 得

$$\eta^{lm} \left( h_{il,mk} - \frac{1}{2} h_{lm,ik} \right) = 0 \quad (4.7.9)$$

互换  $i, k$  指标, 得

$$\eta^{lm} \left( h_{ik,mi} - \frac{1}{2} h_{lm,ik} \right) = 0 \quad (4.7.10)$$

把式 (4.7.5)、式 (4.7.9) 和式 (4.7.10) 加在一起, 就把式 (4.7.5) 的前 3 项消除, 仅剩第 4 项, 即  $\eta^{lm} \cdot h_{ik,lm} = 0$ , 或者表述为

$$\eta^{lm} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} h_{ik} = 0 \quad (4.7.11)$$

谐和坐标是接近笛卡儿坐标的, 上式基本上可以被认为是达朗贝尔方程 ( $ik$  是时空指标, 容易被认为是空间指标, 将上式  $ik$  指标换成  $\mu\nu$ )。

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (4.7.12)$$

为标准的波动方程,  $h_{\mu\nu}$  代表引力场。引力场能够以波的形式向四周传播, 其传播速度为光速  $c$ , 这就是引力波。

式 (4.7.9) 可写为

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} h^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} h^\mu{}_\mu \quad (4.7.13)$$

满足式 (4.7.12) 和式 (4.7.13) 的任何附加项代表来自无限远处的引力辐射。

## 4.7.2 引力波

### 1. 引力波的横波特性

式 (4.7.12) 和式 (4.7.13) 的通解是如下形式解的叠加:

$$h_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) + e_{\mu\nu}^* \exp(-ik_\lambda x^\lambda) \quad (4.7.14)$$

$$k_\mu k^\mu = 0 \quad (4.7.15)$$

满足式 (4.7.12) 的解。如果

$$k_\mu e^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} k_\nu e^\mu{}_\mu \quad (4.7.16)$$

矩阵具有对称性  $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$ , 称为极化张量。

通过坐标变换  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ , 可以把度规  $\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  换到新度规  $\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$ 。假定选择

$$\varepsilon^\mu(x) = i\varepsilon^\mu \exp(ik_\lambda x^\lambda) - i\varepsilon^{\mu*} \exp(-ik_\lambda x^\lambda) \quad (4.7.17)$$

则由式 (4.7.8) 得

$$h'_{\mu\nu}(x) = e'_{\mu\nu} \exp(ik_\lambda x^\lambda) + e_{\mu\nu}^* \exp(-ik_\lambda x^\lambda) \quad (4.7.18)$$

上式中,

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + k_\mu \varepsilon_\nu + k_\nu \varepsilon_\mu \quad (4.7.19)$$

这个波仍然要满足协和坐标条件 (4.7.16)。  $e_{\mu\nu}$  只有 2 个有物理意义。为了弄清极化张量  $e_{\mu\nu}$  不同分量的差别, 可以考虑一个沿  $+z$  方向传播的波, 这样波矢量为

$$k^1 = k^2 = 0, \quad k^3 = k^0 = k > 0 \quad (4.7.20)$$

由式 (4.7.15) 得

$$\begin{aligned} e_{01} + e_{31} &= e_{02} + e_{32} = 0 \\ e_{03} + e_{33} &= -e_{00} - e_{03} = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22} + e_{33} - e_{00}) \end{aligned}$$

上述两式给出

$$e_{01} = -e_{31}, \quad e_{02} = -e_{32}, \quad e_{03} = -\frac{1}{2}(e_{33} + e_{00}), \quad e_{22} = -e_{11} \quad (4.7.21)$$

对坐标系施行由式 (4.7.7) 和式 (4.7.17) 所定义的变换时,  $e_{\mu\nu}$  这 6 个独立分量按照方程 (4.7.19) 改变。

$$\begin{aligned} e'_{11} &= e_{11}, \quad e'_{12} = e_{12}, \quad e'_{13} = e_{13} + k\varepsilon_1, \\ e'_{23} &= e_{23} + k\varepsilon_2, \quad e'_{33} = e_{33} + 2k\varepsilon_1, \quad e'_{00} = e_{00} - 2k\varepsilon_0 \end{aligned}$$

只有  $e_{11}$  和  $e_{12}$  具有绝对的物理意义。通过施行如下变换

$$\varepsilon_1 = -\frac{\varepsilon_{13}}{k}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_{23}}{k}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_{33}}{2k}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{00}}{2k}$$

可将除  $e'_{11}$ ,  $e'_{12}$  和  $e'_{22} = -e'_{11}$  外所有的分量变为 0。这表明引力波是横波, 沿传播方向没有振幅存在。

## 2. 引力波的自旋角动量

对坐标系统实施一个转动  $R$ , 绕  $z$  转动一个角度  $\theta$ , 这样可以进一步给出极化张量  $e_{\mu\nu}$  不同分量之间的差别。该转动就是如下的 Lorentz 变换:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7.22)$$

分量  $R_1^1 = \cos \theta$ ,  $R_1^2 = \sin \theta$ ,  $R_2^1 = -\sin \theta$ ,  $R_2^2 = \cos \theta$ ,  $R_3^3 = R_0^0 = 1$ , 其余  $R_\mu^\nu = 0$ 。转动保持  $k_\mu$  不变, 即  $R_\mu^\nu k_\nu = k_\mu$ , 这使得

$$e_{\mu\nu} = R_\mu^\rho R_\nu^\sigma e_{\rho\sigma} \quad (4.7.23)$$

坐标系统实施两个转动  $R_\mu^\rho R_\nu^\sigma$ , 是在三维空间中转动, 这和电磁场只在二维空间转动是不一样的, 从这里可以看出引力子具有三维空间结构。利用式 (4.7.21), 可以得到

$$e'_\pm = \exp(\pm 2i\theta) e_\pm \quad (4.7.24)$$

$$f_\pm = \exp(\pm i\theta) f_\pm \quad (4.7.25)$$

$$e'_{33} = e_{33}, \quad e'_{00} = e_{00} \quad (4.7.26)$$

这里,

$$e'_\pm = e_{11} \mp i e_{12} = -e_{22} \mp i e_{12} \quad (4.7.27)$$

$$f'_\pm \equiv e_{31} \mp i e_{32} = -e_{01} \mp i e_{02} \quad (4.7.28)$$

一般而言, 任意平面波  $\psi$  通过绕传播方向转动任意角度  $\theta$  而变为

$$\psi' = e^{ih\theta} \psi \quad (4.7.29)$$

具有螺旋量  $h$ 。式 (4.7.24) 表明引力平面波可以分解为螺旋量为  $\pm 2$  的部分  $e_\pm$ 。电磁波可以分解为螺旋度等于  $\pm 1, 0$  的部分, 而只有螺旋度等于  $\pm 1$  才有物理意义。那时, 我们说电磁波的自旋为 1, 现在可以说引力波的自旋为 2。

## 3. 平面波

真空中的线性场方程是

$$\partial_\lambda \partial^\lambda \phi^{\mu\nu} = 0 \quad (4.7.30)$$

其规范条件是

$$\partial_\mu \phi^{\mu\nu} = 0 \quad (4.7.31)$$

考虑一个简单的平面波解

$$\phi^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu} \cos k_a x^a \quad (4.7.32)$$

其中,  $\varepsilon^{\mu\nu}$  是一个常张量, 称为极化张量。  $k_a$  是一个常张量, 为波矢量。它们满足

$$k^a k_a = 0 \quad (\text{时空应变守恒}) \quad (4.7.33)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu} k_\mu = 0 \quad (4.7.34)$$

波的频率是

$$\omega = k^0 \quad (4.7.35)$$

$$k^0 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} = |\mathbf{k}| \quad (4.7.36)$$

$$\omega/|\mathbf{k}| = 1 \quad (4.7.37)$$

即波的速度为光速。设波沿  $z$  轴传播, 且

$$k^a = (\omega, 0, 0, \omega) \quad (4.7.38)$$

$$\phi^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu} \cos(\omega t - \omega z) \quad (4.7.39)$$

式 (4.7.34) 的线性独立解为

$$\varepsilon_{(1)}^\mu \varepsilon_{(1)}^\nu - \varepsilon_{(2)}^\mu \varepsilon_{(2)}^\nu \quad (4.7.40)$$

$$\varepsilon_{(1)}^\mu \varepsilon_{(2)}^\nu + \varepsilon_{(1)}^\nu \varepsilon_{(2)}^\mu \quad (4.7.41)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{(1)}^\mu k^\nu + \varepsilon_{(1)}^\nu k^\mu \\ \varepsilon_{(2)}^\mu k^\nu + \varepsilon_{(2)}^\nu k^\mu \\ k^\mu k^\nu \\ \varepsilon_{(1)}^\mu \varepsilon_{(1)}^\nu + \varepsilon_{(2)}^\mu \varepsilon_{(2)}^\nu \end{array} \right\} \text{不携带能量和动量, 不是物理波} \quad (4.7.42)$$

其中, 矢量  $e_{(1)}^\mu$  和  $e_{(2)}^\mu$  定义如下:

$$e_{(1)}^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad (4.7.43)$$

$$e_{(2)}^\mu = (0, 0, 1, 0) \quad (4.7.44)$$

引力场和光子一样, 是横波, 不是纵波。之所以不存在纵波是因为纵波没有可观测性, 而这种波的可观测性来自于动态测量协变形。

#### 4. 引力纵波

在真空场中, 引力纵波的存在是无法回避的, 任何应变达到极限都将以波的形式存在, 每一种应变极限对应一种波。

既然存在纵波, 那么就必然存在产生纵波的应变, 这个应变就是纵向动量  $p_{//}$ 。有必要加入纵向波矢:

$$e_{(3)}^\mu = (1, 0, 0, -1) \quad (4.7.45)$$

$$\phi_{//}^\mu = e_{(3)}^\mu A_{//} \exp(k_0 \xi^0 - k_3 \xi^3)$$

纵波的振幅  $A_{//}$  是引力子沿纵向的真空场的形变量。光子内禀空间沿纵向的真空场的形变量是  $h$ , 形变只需要考虑沿传播方向的形变量。引力子不同, 引力子的应变率极小, 形变是连续光滑的, 沿  $\xi^3$  方向传播时, 该方向的形变同样会造成  $\xi^1 \xi^2$  平面的形变。这样的形变是三维球形应变, 形变量是  $h_f$ , 这和光子 (纤维结构场) 不同。

引力子纵波的内禀波函数为

$$\phi_{//}^{\mu}(\xi) = \varepsilon_{(3)}^{\mu} \hbar_f \exp(k_0 \xi^0 - k_3 \xi^3) \quad (4.7.46)$$

纵波的能量为  $E_{//} = \hbar k_0$ ，动量为  $p_{//} = E_{//} / c = \hbar k_3$ ，四动量守恒， $k_0 x^0 - k_3 x^3 = 0$ 。沿传播方向没有振幅存在，这一问题不难理解。所有的量子场都具有这样的特性，即一种周期为  $\pi$  的纵波的孤立子，并在内禀空间中表现出来。在一个大的范围，量子场纵波被封闭在内禀空间，没有周期性存在。引力子同样是纵波的孤立子，引力子的能量隐含在内禀纵波中。对观测而言，如果引力子存在纵波，那么引力子中心点就必须在向前传播的同时沿传播方向来回做周期振动，实际的情况并非如此。无纵波，自然无纵波振幅，也就没有波动表述。横波和纵波的特性如图 4.7.1 所示。

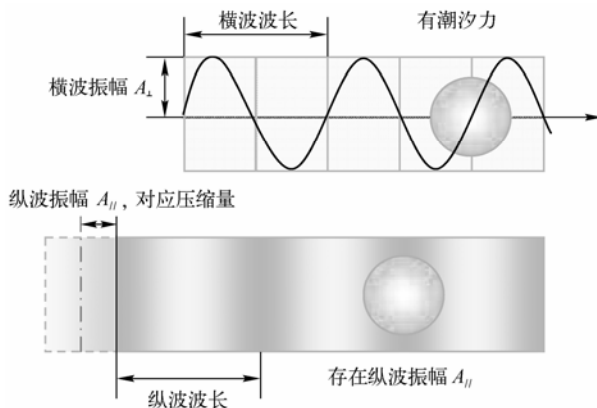


图 4.7.1 横波和纵波的特性

## 5. 引力横波

极化张量式 (4.7.38) 和式 (4.7.39) 称为横向的。具体形式为

$$\varepsilon_{\oplus}^{\mu\nu} = \varepsilon_{(1)}^{\mu} \varepsilon_{(1)}^{\nu} - \varepsilon_{(2)}^{\mu} \varepsilon_{(2)}^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7.47)$$

$$\varepsilon_{\otimes}^{\mu\nu} = \varepsilon_{(1)}^{\mu} \varepsilon_{(2)}^{\nu} + \varepsilon_{(1)}^{\nu} \varepsilon_{(2)}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7.48)$$

这对应于物理引力波的唯一极化。

## 6. 引力波的能量动量

把波解式 (4.7.32) 代入能量动量张量 (一级近似)  $t_{(1)}^{\mu\nu}$  中:

$$t_{(1)}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left[ 2\phi^{\alpha\beta, \mu} \phi_{\alpha\beta}^{\nu} - \phi^{\mu} \phi^{\nu} - \eta^{\mu\nu} \left( \phi^{\alpha\beta, \sigma} \phi_{\alpha\beta, \sigma} - \frac{1}{2} \phi_{, \sigma} \phi^{\sigma} \right) \right]$$

得到

$$t_{(1)}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \varepsilon^\alpha{}_\alpha \varepsilon^\beta{}_\beta \right) k^\mu k^\nu \sin^2 k_\sigma x^\sigma \quad (4.7.49)$$

振幅为  $A_\oplus$  和  $A_\otimes$  的横波:

$$\phi_\oplus^{\mu\nu} = A_\oplus \varepsilon_\oplus^{\mu\nu} \cos k_\sigma x^\sigma \quad \text{变为复数波的形式} \quad \rightarrow A_\oplus \varepsilon_\oplus^{\mu\nu} \exp i k_\sigma x^\sigma \quad (4.7.50)$$

$$\phi_\otimes^{\mu\nu} = A_\otimes \varepsilon_\otimes^{\mu\nu} \cos k_\sigma x^\sigma \quad \text{变为复数波的形式} \quad \rightarrow A_\otimes \varepsilon_\otimes^{\mu\nu} \cos k_\sigma x^\sigma \quad (4.7.51)$$

波的能量动量张量:

$$t_{(1)}^{\mu\nu} = (A_\oplus)^2 k^\mu k^\nu \sin^2 k_\sigma x^\sigma \quad (4.7.52)$$

$$t_{(1)}^{\mu\nu} = (A_\otimes)^2 k^\mu k^\nu \sin^2 k_\sigma x^\sigma \quad (4.7.53)$$

$t_{(1)}^{03}$  分量给出  $z$  方向的能量流。对该方向的平均能量流用  $\frac{1}{2}$  代替  $\sin^2 k_\sigma x^\sigma$ , 得

$$t_{(1)}^{\mu\nu} = \frac{1}{2c} (A_\oplus)^2 \omega^2 \quad (4.7.54)$$

$$t_{(1)}^{\mu\nu} = \frac{1}{2c} (A_\otimes)^2 \omega^2 \quad (4.7.55)$$

引力波和电磁波一样, 不仅携带能量而且携带动量。定义圆偏振波如下:

$$(\varepsilon_\oplus^{\mu\nu} - i\varepsilon_\otimes^{\mu\nu}) \exp i k_\sigma x^\sigma \quad \text{正螺旋性} \quad (4.7.56)$$

$$(\varepsilon_\oplus^{\mu\nu} + i\varepsilon_\otimes^{\mu\nu}) \exp i k_\sigma x^\sigma \quad \text{负螺旋性} \quad (4.7.57)$$

这样的圆偏振波携带角动量。角动量的大小正比于波所携带的能量的大小, 即

$$[\text{波的角动量}] = \frac{2}{\omega} [\text{波的能量}] \quad (4.7.58)$$

该式的量子力学解释是引力子具有自旋  $2\hbar$ 。每个量子的角动量与能量之比是

$$\frac{2\hbar}{\hbar\omega} = \frac{2}{\omega} \quad (4.7.59)$$

一个质量为零的粒子必须使它的自旋沿着运动方向 (正螺旋性), 或者与运动方向相反 (负螺旋性); 任何其他方向的自旋都是禁止的。

## 7. 潮汐力线

考虑引力波对一个粒子的作用。粒子的运动方程是

$$\frac{du_\mu}{d\tau} = -\kappa \left( h_{\mu\alpha, \beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta, \mu} \right) u^\alpha u^\beta \quad (4.7.60)$$

对于一个静止的粒子,  $u_0 = 1$  且  $u_k = 0$ , 因而有

$$\frac{du_\mu}{dt} = -\kappa \left( h_{\mu 0, 0} - \frac{1}{2} h_{00, \mu} \right) u^\alpha u^\beta \quad (4.7.61)$$

$h_{0\mu} = 0$  初始静止, 粒子保持静止。但考虑  $x$  轴上的两个粒子, 一个位于  $x = x_0$ , 另一个位于  $x = -x_0$ , 接收到一个类型为式 (4.7.50) 的引力波。按照式 (4.7.61), 这两个粒子之间的距离为  $2x_0$ , 但是用米尺测量物理距离, 不仅决定于  $\Delta x$ , 而且决定于时空度规

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$$

这样, 所测量到的两个粒子之间的距离为



$$\Delta l^2 = -g_{11}\Delta x^2 = (1 - \kappa h_{11})(2x_0)^2 = (1 - \kappa A_{\oplus} \cos \omega t)(2x_0)^2$$

在线性近似下振幅  $A_{\oplus}$  很小, 因而

$$\Delta l \approx \left(1 - \frac{\kappa}{2} A_{\oplus} \cos \omega t\right) 2x_0 \quad (4.7.62)$$

对于  $y$  轴, 类似可得

$$\Delta l \approx \left(1 + \frac{\kappa}{2} A_{\oplus} \cos \omega t\right) 2y_0 \quad (4.7.63)$$

每一个粒子朝向另一个粒子的加速度是

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\Delta l}{2} &= -\frac{\kappa}{2} A_{\oplus} x_0 \frac{d^2}{dt^2} \cos \omega t \\ &= \frac{\kappa}{2} A_{\oplus} \omega^2 x_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad (4.7.64)$$

因此, 对于一个位于  $x$  轴和  $y$  轴上质量为  $m$  的粒子, 潮汐力是

$$f_x = \left(m \frac{\kappa}{2} A_{\oplus} \omega^2 \cos \omega t\right) x_0 \quad (4.7.65)$$

$$f_y = -\left(m \frac{\kappa}{2} A_{\oplus} \omega^2 \cos \omega t\right) y_0 \quad (4.7.66)$$

引力波的潮汐线如图 4.7.2 所示。

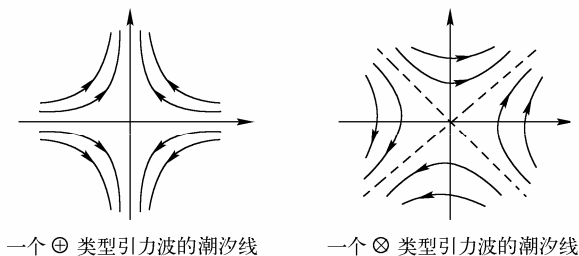


图 4.7.2 引力波的潮汐线

### 4.7.3 引力子的内禀结构

在真空场中, 引力子是存在的。引力子的发射源自于有静质量的费米子, 费米子在振动或加速的过程中发射引力子。

#### 1. 引力子的非扩散性

考虑一个自旋为  $\hbar/2$ 、有静质量的费米子, 如图 4.7.3 所示。当该粒子被加速时, 粒子内禀空间中心点压缩前面并拉伸后面的背景空间。由于内禀空间中心点达到应变极限, 粒子的任何加速度对于中心点而言, 都是超光速的。既然超光速, 就达到产生波的条件, 必然会发射波。考虑背景时空, 当中心点挤压前面临近的真真空场基本单元时, 只有沿传播方向的场基本单元最先达到应变极限, 形成引力波, 该点成为引力子中心点。在传播的过程中, 引力子只有中心点处唯一的一个场基本单元达到应变极限, 和光子类似, 引力子具有非扩散性。

费米子中心点挤压前面临近的场基本单元，该场基本单元成为引力子中心点

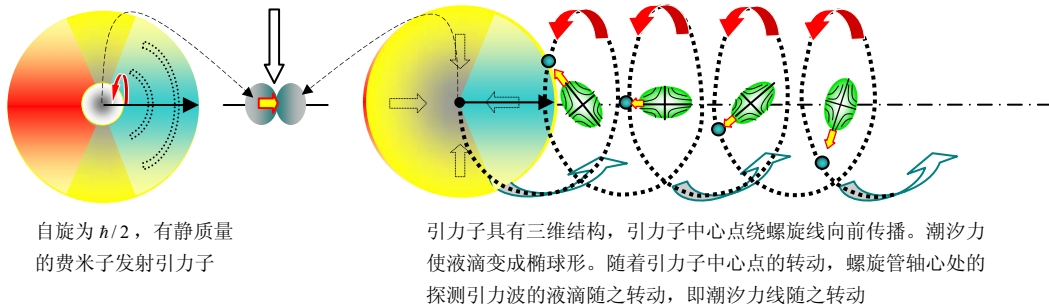


图 4.7.3 引力子的内禀结构

## 2. 引力子具有三维结构

质量空间具有三维球对称性，从质量空间脱胎而来的引力子具有相似的三维球对称性。和光子不同的是引力子没有纤维结构。引力子中心点向前移动，造成负  $\xi^3$  区域的  $\xi^1\xi^2$  面被拉伸，这样的结果使负  $\xi^3$  区域的半球具有和正物质（如  $e^-$  电子）完全相同的真空背景场结构，即时空为正弯曲；同样，正  $\xi^3$  区域的  $\xi^1\xi^2$  面被压缩，正  $\xi^3$  区域的半球具有和正物质（如  $e^+$  电子）完全相同的真空背景场结构，即时空为负弯曲。形象地说是由两个半球构成的引力子，左半球是正粒子质量引力场，右半球是反粒子质量引力场。由于引力子的产生源自于费米子点的移动，因而正粒子和反粒子的引力子具有完全相同的结构引力子结构的二维示意图如图 4.7.4 所示。

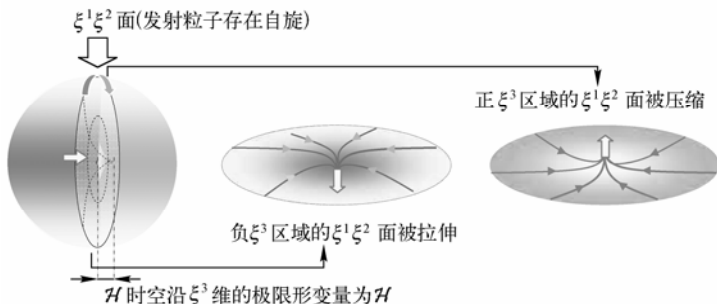


图 4.7.4 引力子结构的二维示意图

引力场具有万有引力特性，无论在负  $\xi^3$  区域的  $\xi^1\xi^2$  面，还是在正  $\xi^3$  区域的  $\xi^1\xi^2$  面都将存在引力。

## 3. 引力子的时空总形变量

引力子的形变具有三维结构，在研究轻子的章节中，我们知道三维球的时空总形变量为  $h_g$ 。左半球的时空总形变量为  $h_g/2$ ，右半球的时空总形变量为  $-h_g/2$ ，引力场和量子场不同，引力场没有纤维结构，因而引力子总的时空形变量为

$$|h_g| = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{H}{2} \right)^3 \quad (4.7.67)$$

要注意的是时空沿  $\xi^3$  维度的极限形变量为  $\mathcal{H}$ 。在一个极大的时空范围内有一个场基本单元压迫形变  $h_g$ ，时空没有被压破裂，满足应变协调方程，时空是连续光滑的。

#### 4. 引力子具有潮汐力

对于单一的引力子而言，引力子  $\xi^1 \xi^2$  面上的引力导致液滴被拉长，构成潮汐力，如图 4.7.5 所示。

如果引力源体积很小，离观测者很近，单一引力子能量很大且引力波很强，那么引力纵波  $\xi^3$  的潮汐力可以被观测到。对于引力纵波而言，探测液滴沿纵向被拉长。

#### 5. 引力子的螺旋进动性和角动量

引力子中心点的运动轨迹是螺旋线，如图 4.7.3 所示。引力子的螺旋进动使潮汐力的方向跟着旋转，如图 4.7.6 所示。引力波在产生时存在两个维度方向的形变。完整的引力子是纵向引力子和自旋引力子的叠加态。

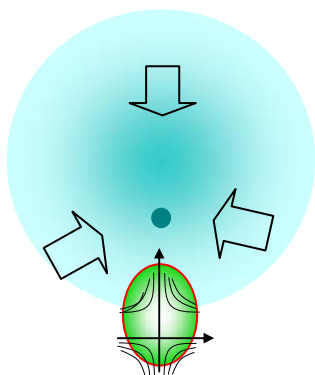


图 4.7.5 在引力子  $\xi^1 \xi^2$  面上的引力导致液滴被拉长，存在潮汐力

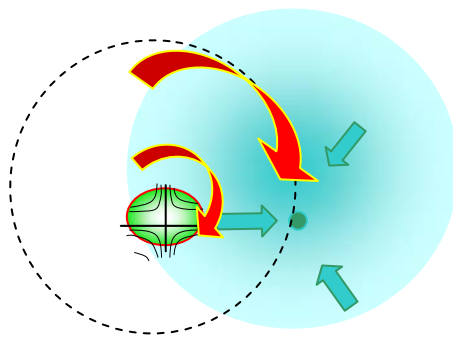


图 4.7.6 引力子的螺旋进动使潮汐力的方向跟着旋转

(1) 沿运动方向被挤压存在应变，该应变使得引力子沿  $\xi^3$  方向运动。 $\xi^3$  方向的动量是引力波的纵动量  $p^3$ ，引力场函数

$$h(\xi) = \mathbf{e}_3 \exp(iE_3 \tau - p_3 \xi^3)$$

满足

$$h_g = p_{||} \cdot \frac{4}{3} \pi R_{||}^3$$

$p_{||}$  为纵向引力子的动量， $R_{||}$  为纵向引力子的半径。

(2) 另一个维度在  $\xi^1 \xi^2$  面上，在该二维面上，发射粒子有自旋，自旋形变在  $\xi^1 \xi^2$  面上，该应变使得引力子绕圆环转动。

$$h(\xi) = \mathbf{e}_2 \exp(iE_2 \tau - p_2 \xi^2)$$

和光子自旋类似，可以认为引力子绕圆环转动是由于存在一个转动引力子，该引力子动量的大小决定了螺旋管的半径，满足

$$h_G = p_{\perp}' \cdot \frac{4}{3} \pi R_{\perp}^3$$

$$\mathbf{p}'_{\perp} \cdot \frac{4}{3} \pi R_{\perp}^3 = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{\mathcal{H}}{2} \right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\mathbf{p}'_{\perp} \cdot \mathbf{e}} \cdot R_{\perp} = \mathbf{e} \frac{\mathcal{H}}{2} \Rightarrow \mathbf{p}_{\perp} \cdot R_{\perp} = h_f$$

$\mathbf{p}'_{\perp}$  具有三维性质, 没有可测性, 必须考虑一维效应。规定  $\mathbf{p}_{\perp} \equiv \sqrt[3]{\mathbf{p}'_{\perp} \cdot \mathbf{e}}$  为引力子沿运动方向的动量。 $R_{\perp}$  为自旋引力子的半径。可以把自旋引力子的动量归在引力子中心点上, 这样引力子的自旋角动量为

$$2\pi R_S \times \mathbf{p}_{\perp} = h_f \Rightarrow (R_S \times \mathbf{p}_{\perp}) = h_f / 2\pi \Rightarrow (R_S \times \mathbf{p}_{\perp}) = \hbar_f \Rightarrow (R_S \times \mathbf{p}_{\perp}) = 2\hbar$$

引力子的自旋角动量是  $2\hbar$ 。纵波动量和横波动量之间的关系满足正交关系, 即

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_{\parallel}^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2, \quad E = cp$$

## 6. 引力波的探测

对于引力子而言, 由于应变变量实在太小, 潮汐力效应无法观测到。引力子时空总形变量满足

$$h_G = \int_0^{\Omega} \mathbf{p}(x) d\Omega = \int_0^{\Omega_0} p^0(x) d\Omega^0$$

$\mathbf{p}(x)$  为引力子动量,  $p^0(x)$  为引力子能量。 $\Omega$  是三维形变时空范围, 为一个巨大的球体, 球体积是  $\Omega = \frac{4}{3} \pi R^3$ 。上式可简化为

$$\mathbf{p}_{\mu} \cdot R_{\mu} = h_f$$

$R_{\mu}$  是产生并形成引力子所需的时间。

由式 (4.7.1) 知  $p \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$ , 引力子的大小决定于单费米子发射引力子时所能给与的动量的大小。无数引力子的叠加会增加引力波的强度, 但无法改变引力波的频率, 这和光子是一样的。

影响潮汐力大小最关键的因素是探测物质和引力源之间的角度, 如图 4.7.7 所示。

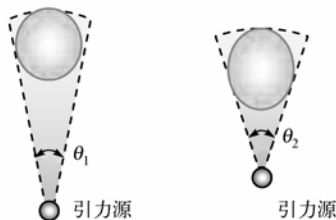
在引力强度相同的条件下, 角度越大, 潮汐力越强, 测量协变效应破坏越大; 角度越小, 潮汐力越弱, 测量协变效应破坏越小。测量协变效应使得引力波无观测效应, 只有潮汐力才具有可观测效应。

考虑  $\oplus$  类型引力波的潮汐线, 如图 4.7.2 所示。

当引力子经过探测粒子时, 随着引力子的螺旋转动, 潮汐线也会随之转动。这样的潮汐线是引力子传播所产生的特有效应。 $\otimes$  类型引力波和  $\oplus$  类型引力波性质完全相同, 只是相差一个角度。

在实际测量中, 如果发射源太大, 引力子的螺旋管截面杂乱分布, 那么微弱的潮汐力就会变得杂乱, 各种方向的潮汐力叠加, 使得我们无法测量, 如图 4.7.8 所示。强大而杂乱的引力波的存在会导致背景时空变硬, 致使光线弯曲, 身处其中将无直接可观测效应, 因为发生了测量效应。

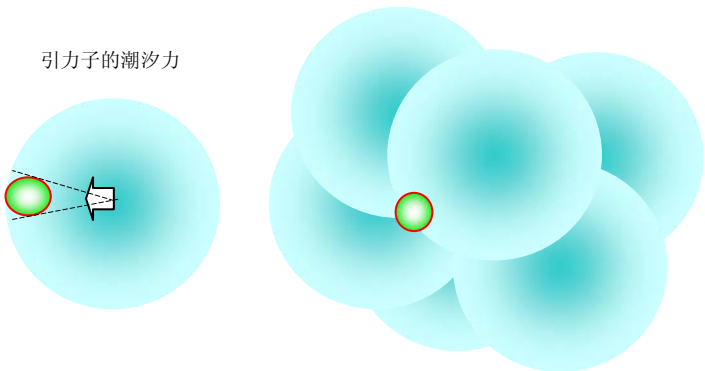
当杂乱分布的平面引力波向地球传播时, 背景真空场发生形变, 地球本身也随背景真空场的形变而发生形变, 根本不存在一个相对不变的参考系。我们的思维和仪器也随引力波



$\theta_1 < \theta_2$ , 在引力强度相同的条件下, 角度越大, 潮汐力越强, 测量协变效应破坏越大; 角度越小, 潮汐力越弱, 测量协变效应破坏越小

图 4.7.7 潮汐力与角度的关系

一起波动，这种随时间不断变化的测量协变称为动态测量协变。



如果引力子的螺旋管杂乱分布，那微弱的就会变得杂乱，各种方向的潮汐叠加使得我们无法测量，只存在测量加变效应。

图 4.7.8 引力子的螺旋管截面杂乱分布导致测量协变效应，引力波不可测

另外，还要强调的是：质量荷之间的相互作用有两种，一是动态相互作用，即场源之间交换引力子；二是静态相互作用，即两场源之间背景真空场弯曲而产生的力场实现相互作用，并非两交换引力子。

# 第 5 章 真空场中光子的一维图像

认识光子存在相当多的困难，光子为什么没有静质量？光子的能量和动量是什么？光子为什么具有波粒二象性，波粒二象性的本质是什么，光子不带电荷，却能传递电磁相互作用，光子的几率波特性和电磁波特性是什么，光子自旋是什么，虚光子是什么，等等。面对这一大堆问题如何在理论上有一个完满的解释，原有的理论无能为力，因而理论上需要有新的突破。从真空场最基本的性质来建立符合实验观测光子结构是当务之急。

本章讲述光子的一维空间结构图像。在该图像中，通过满足基本假设的真空性质来理解微观的真空中一个点移动应变产生的一维效应。光子的一维空间结构性质给出了光子的基本性质。

## 5.1 光子的现有图像

### 5.1.1 光子的电磁波图像

#### 1. 电磁波的Maxwell图像

1863 年，Maxwell发表了著名的电磁场理论<sup>①</sup>，要点是变化电场产生磁场和变化磁场产生电场。如果在空间某区域中有变化电场和变化磁场，则在邻近区域中会产生变化磁场和变化电场，变化电场—变化磁场—变化电场……，构成传播的电磁场，如图 5.1.1 所示。

考虑由一个振荡偶极子所辐射的电磁波（电矩迅速变化的电偶极子称为振荡偶极子）。最简单的振荡偶极子是电矩做余弦式振动的偶极子，它的电矩  $p$  可用下式表示：

$$p = p_0 \cos \omega t$$

其中， $p_0$  是振幅， $\omega$  是圆频率。

振荡偶极子所辐射的是电磁波，但在离开偶极子很远的地方，可用平面波（如图 5.1.2 所示）的波动方程来表示。

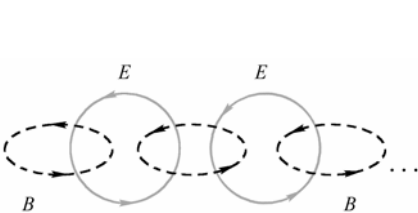


图 5.1.1 变化电场和变化磁场的传播示意图

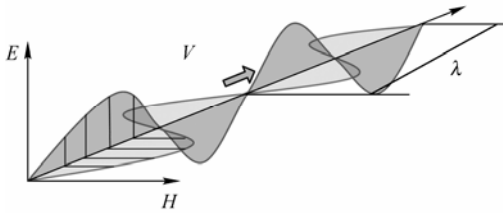


图 5.1.2 平面电磁波

$$E = E_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

① 王谟显 改编，物理学第二册，人民教育出版社，1963，p200.

$$H = H_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

电场和磁场相互垂直： $\vec{E} \perp \vec{H}$

其中， $x$  为波源的距离， $\lambda$  和  $T$  分别为波长和周期，满足  $\lambda = vT$ 。

经典电磁理论中电磁波的传播不依赖任何媒质，可在真空中传播，且真空中的传播速度为  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ，这就是光速。光也是电磁波。

2. 电磁波的特性

(1) 电磁波是横波。电磁波具有偏振性。 $E, H$  和传播方向  $V$  相互垂直，构成右手螺旋系。

(2)  $E$  与  $H$  同相位。

(3)  $E$  与  $H$  的数值成比例， $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$ 。

(4) 真空中电磁波的传播速度等于真空中的光速。

(5) 电磁波的传播过程为能量的传播过程，即辐射能的过程。

电场能量密度

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

磁场能量密度

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$$

电磁场能量密度

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2$$

电磁波的范围很广，其本质相同，只是频率（波长）不同而具有不同的特性，可分为无线电波、红外线、可见光、紫外线、X 射线和  $\gamma$  射线等。

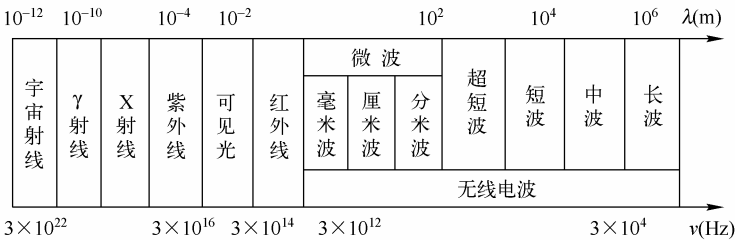


图 5.1.3 电磁波的分类

特别要说的是可见光，它的波长范围在 400~760nm，如图 5.1.4 所示，这些电磁波能使人眼产生光的颜色，所以叫做光波。

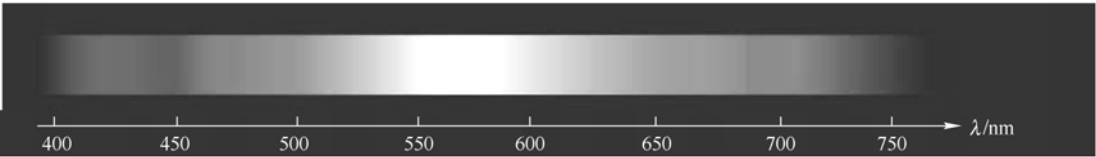


图 5.1.4 可见光的波长

人眼所看见的不同颜色的光, 实际上是不同波长的电磁波, 白光则是各种颜色(红、橙、黄、绿、青、蓝、紫)的可见光的混合。波长最长的可见光是红光( $\lambda$ 为 630~760nm), 波长最短的光是紫光( $\lambda$ 为 400~430nm)。

### 5.1.2 光子的粒子性

普朗克于 1900 年提出辐射能量在被吸收或发射时, 电磁波以完整的量子态存在, 其能量为  $\varepsilon = h\nu$ 。这里,  $\nu$  是频率,  $h$  称为普朗克常数。

通过对光谱的研究, 波尔于 1913 年指出原子结构具有量子态, 能量为  $E_m$  和  $E_n$  的两个量子态  $m$  和  $n$ , 其能量差与光谱频率  $\nu_{m \rightarrow n}$  有下列关系:

$$\nu_{m \rightarrow n} = \frac{E_m - E_n}{h}$$

爱因斯坦从普朗克的辐射量子论出发, 对辐射进行深入研究, 于 1905 年提出辐射不在被吸收或发射时也是以量子态存在的。光量子的能量  $\varepsilon$  为

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$$

并且相应有动量  $\vec{p}$ , 其大小为  $p = h/\lambda$ ,  $\lambda$  为波长, 或者用波矢量  $\vec{k}$  表示为

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda\nu = c$$

$\omega$ ,  $\vec{k}$  为四维波矢,  $c$  是光速, 这解释了光电效应。

光子是电磁波, 同时又具有量子性。对于光子图像的建立是一项困难的工作, 困难在于波粒二象性之间的关系不清楚。我们能够用数学形式准确地描述光子的特性, 但却难于建立一个可以理解的物理学图像。

### 5.1.3 不确定关系

在经典力学中, 物体位置、动量一旦确定后, 物体以后的运动位置就可确定。但微观粒子, 具有显著的波动性, 不能同时确定坐标和动量。

#### 1. 电子单缝衍射

入射电子在  $x$  轴方向无动量, 其坐标的不确定范围为  $\Delta x = a$ , 电子通过单缝后, 坐标不能确定, 具有  $x$  轴方向动量使大部分电子落在两个一级暗纹之间, 动量在  $x$  轴方向不确定度为  $\Delta p_x$  如图 5.1.5 所示。由暗纹公式:  $a \sin \varphi = k\lambda$ ,

可知当  $k=1$  时,  $a \sin \varphi = \lambda$ , 则

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{\Delta x}$$

动量不确定度为

$$\Delta p_x = p \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{\Delta p_x}{p}, \quad \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{\Delta p_x}{p}$$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \lambda \cdot p = \lambda \frac{h}{\lambda} = h \rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_x = h$$

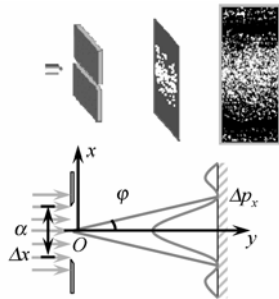


图 5.1.5 电子单缝衍射中的动量不确定度

$\Delta x \cdot \Delta p_x = h$  是真空量子场建立的核心之一,  $h$  的物理本质是真空某点邻域的时空总形变量, 关于这一问题详见后续讨论。



## 2. 海森伯不确定关系

1927 年, 海森伯提出: 对于微观粒子不能同时用确定的位置和确定的动量来描述。由于微观粒子的波动性, 位置与动量不能同时有精确值。不确定关系是物质的波粒二象性引起的。不确定关系的具体表述为  $\Delta x \cdot \Delta p \dots \hbar/2$ 。

### 5.1.4 光子的量子力学波函数

对于光子而言, 光子具有波粒二象性。光子的波长越短, 所表现出来的粒子性越强。先来看一下光子的量子力学表述, 之后, 再用图像的方式来理解光子为什么会有这样的特性。

#### 1. 光子波动方程

在  $\hbar = c = 1$  的单位制里, 真空中的 Maxwell 方程组有以下形式<sup>①</sup>:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (5.1.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (5.1.1b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.1.1c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.1.1d)$$

或者

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5.1.2a)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5.1.2b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.1.2c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.1.2d)$$

$\vec{A}$  和  $A_0$  分别是电磁场的矢势和标势。

#### 2. 光子的平面波解

方程 (5.1.2) 可以写为如下的四维形式:

$$\begin{aligned} A_{k\lambda}^{(+)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \epsilon_{k\lambda} e^{ik \cdot x} \\ A_{k\lambda}^{(-)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \epsilon_{k\lambda} e^{-ik \cdot x} \end{aligned} \quad \lambda = 1, 2 \quad (5.1.3)$$

其中,  $A_{k\lambda}^{(+)}(x)$  和  $A_{k\lambda}^{(-)}(x)$  分别是正负频率的平面波解,  $\frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}}$  是归一化常数,  $\epsilon_{k\lambda}$  是  $A_{k\lambda}^{(\pm)}(x)$  方向的单位向量, 称为光子的单位向量。  $\lambda = 1, 2$  对应光子的两种横向极化态 (或平

① 李淮江, 量子场论导引, 云南科技出版社, 1989, p55.

面波两种横向极化态)。由于两种横向极化态相互独立, 故  $\epsilon_{k\lambda}$  满足以下正交归一条件:

$$\epsilon_{k\lambda} \epsilon_{k\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (5.1.4)$$

又由于  $\vec{A}$  的横向性, 故有以下横向条件:

$$\vec{k} \cdot \epsilon_{k\lambda} = 0 \quad (5.1.5)$$

把式 (5.1.1) 代入  $\square A'(x) = 0$ , 可得到光子的质壳关系:

$$k^2 = |\vec{k}|^2 - E_k^2 = -m_0^2 = 0 \quad (5.1.6)$$

即光子的静质量为零。由于取  $\hbar = c = 0$ , 故单光子的能量为

$$E_k = \omega_k = |\vec{k}| \quad (5.1.7)$$

现在, 可把方程  $\square A'(x) = 0$  的任意解表示为如下的线性组合:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \sum_{k,\lambda=1}^2 \left( a_{k\lambda} \vec{A}_{k\lambda}^{(+)}(x) + a_{k\lambda}^* \vec{A}_{k\lambda}^{(-)}(x) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\vec{k}\lambda} (a_{k\lambda} e^{ik \cdot x} + \bar{a}_{\vec{k}\lambda} e^{-ik \cdot x}) \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

其中,  $a_{\vec{k}\sigma}$  和  $a_{\vec{k}\sigma}^*$  是展开系数。因  $\epsilon_{\vec{k}\lambda}$  可以作为纵横坐标系第一、二轴的基矢, 故上式即在纵横坐标系里写出来的。式 (5.1.8) 非常明确地表明了光子为横波, 而在介质中的波必以纵波的形式存在, 而在真空场这种介质中, 如何理解光子的横波特性的? 目前的理论并未涉及光子结构, 这是由于对光子的结构知之甚少。下面从真空场的角度来研究光子的一维结构。

## 5.2 光子内禀空间 $\xi^1$ 维的分析

### 5.2.1 真空场理论中光子的图像概述

对于空气而言, 当它处于平静的时候, 你感觉不到它的存在, 如果有风你立刻就能感觉到它, 真空有点类似于空气<sup>①</sup>。真空也没有可观测性, 只有受到扰动之后, 它才具有可观测性。而这种受到扰动的真空就是我们所习惯的那些所谓的场, 因为具有可观测性, 所以把它称为物质。四种力场及宇宙中的物质都是真空受到扰动的结果。物质从真空中产生出来, 所对应的是量子场由基态跃迁到激发态。要实现这一过程, 真空必须受到扰动, 基本粒子才有可能被激发出来。如用力搅动水, 就会有水花产生。真空是量子场的基态, 基本的粒子是量子场的激发态。光子就是真空激起的“涟漪”。

光子具有波粒二象性, 永远以光速传播, 无静质量, 能传递电子间的相互作用。同时具有那么多奇妙的特性, 它会是什么样呢? 现在我们从真空场的角度来看光子是如何从真空中产生出来的, 并分析光子的内禀结构。引入内禀结构是一件慎重的事情, 因为相对论要求基本粒子必须具有类点结构, 否则会破坏相对论的协变性。这里所引入的内禀结构必须符合相对论的协变性。新理论中的粒子的内禀结构不再是刚性结构的几何体, 而是真空形变的结

① 这种类比是不严格的, 只是现象上有某些类似, 请读者不要误解。

果，可以看成是一个具有邻域场的点。

如图 5.2.1 所示，建立一个静止参照系，在真空场处于平直状态时，真空场无任何形变，真空场处于一种自然状态。真空某处受到强的扰动，使得某一场基本单元  $O$  向前移动，就会压缩前面的真空场，并拉伸后面的真空场，形成纵波。拉伸场的量和压缩场的量相等， $R$  表示形变区域球体的半径，在  $R$  以外无形变，这里的  $2R$  就是光子的直径，也就是光子纵波波长  $\lambda$ 。 $O$  的移动还会造成中心附近的场极度弯曲，由基本假设 I 知，真空是由均匀、平直的三维真空场构成的，并且存在着拉伸压缩极限，这种极度弯曲使场在达到形变极限时，还不能满足弯曲的曲率，出现了撕裂现象，这就使得真空产生纤维结构，把这种局域的场形变造成的具有纤维结构效应的线定义为电力线，由电力线构成的场为电场。由场基本单元移动所造成的具有纤维结构的纵波的整体效应称为光子。

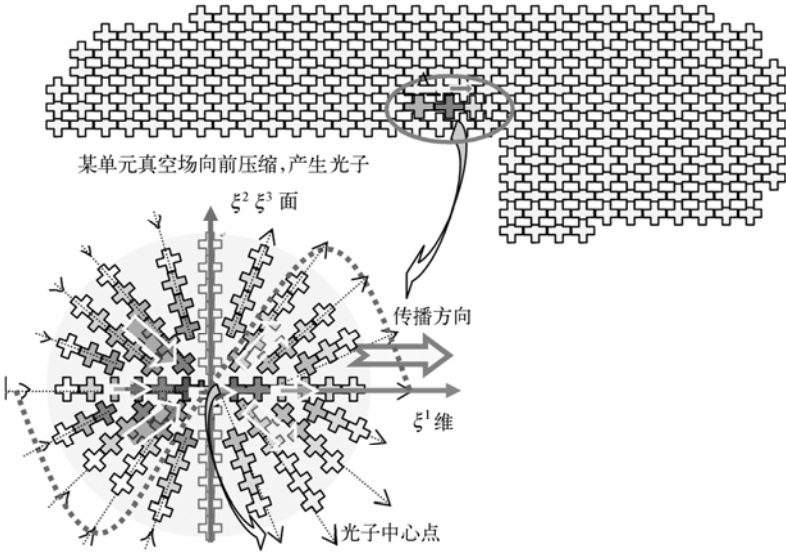


图 5.2.1 光子的图像

真空场的形变量  $u$  构成内禀场四维时空  $\xi^\mu$  ( $\mu=0,1,2,3$ ) 的位移函数  $u(\xi)$ 。  
 $u(\xi^\mu)=0$ ，对应于真空场的形变量为零，即真空基态场。

为了对内禀空间有一个直观的了解，想象一下有一块大的海绵（如图 5.2.2 所示），上面有一个小球，小球使海绵发生形变，出现一个小的凹面，这个凹面以外海绵并没有形变，这个形变区域就称为内部空间（或内禀空间）。真空形变部分的整个区域便构成一个单一的量子场。形变区域的半径  $R$  就是量子场内禀空间的半径  $R$ 。这里只是大致地介绍了光子的新图像，这一图像是否合理呢？接下来具体分析。

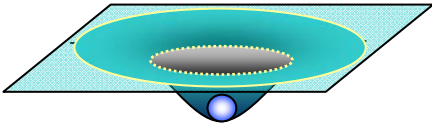


图 5.2.2 内禀二维空间示意图

### 5.2.2 光子 $\xi^1$ 维概述

#### 1. 观测时空

在第 4 章中，我们对时间的概念进行过论述。现在简要地回顾一下时空概念的要点。

光子是时空测量标准，所有物质的运动都在和光子运动相比较，时间和空间存在一个转换系数  $c$ ，有  $r \equiv ct$ ，构成光锥面。时间的本质就是光子所经历的真空场的量。这就是时间的真空场概念。

在现实世界中，光子运动速度是最快的，这样有一个好处，所有的测量结果都在类时空空间。光子变慢，时钟也相应变慢，光子传播的路径弯曲，那么空间也弯曲。光子成为最佳的时空测量标准，光的路径为时空短程线，是弯曲空间中的直线。时空是真空场本性的两种表述形式。时空不可能相互独立存在，只有用时空同时表述真空场，真空场才能被准确表述。对于观测物理时空  $(ct, \vec{x}) = x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ ， $\vec{x}(x^1, x^2, x^3)$  为真空场的空间量； $x^0 = ct$  为量子场“扫过”的真空场的量。

## 2. 量子场内禀时空

现在来了解光子内禀场的形变，即一激发态场基本单元及其邻域的情况。以量子场的中心点为坐标原点，量子场的内禀时空定义为

$$\xi^\mu = (c\tau, \vec{\xi}) = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad (5.2.1)$$

假定光子沿  $\xi^1$  方向传播，来分析光子  $\xi^1$  维真空场的情况，这有助于对新理论基本概念的理解。

由一激发态基本单元场及其对邻域造成的场形变的整个形变场体系定义为真空量子场，如图 5.2.3 所示。

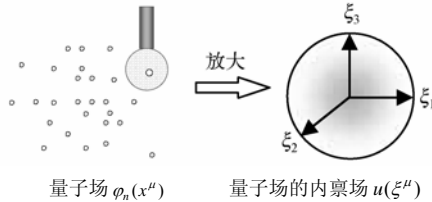


图 5.2.3 量子场

## 3. 光子内禀场 $\xi^1$ 维的结构

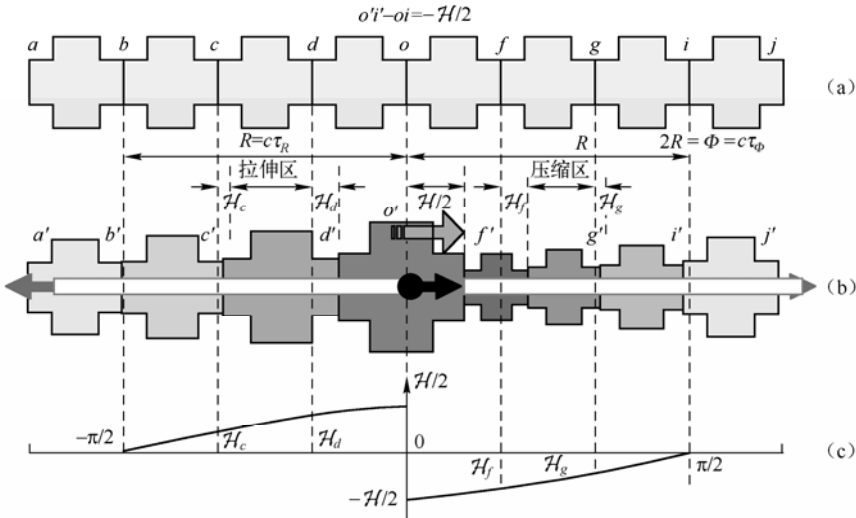
假设平直真空中只存在某一单光子，其内禀场为  $u(\xi^\mu)$ 。光子的  $\xi^1$  维是由场基本单元沿  $\xi^1$  方向直线排列构成。对于弹性真空场来说，可以产生横波，也可以产生纵波。这里只考虑纵波。

为了分析方便，在图 5.2.4 中，设想光子的  $\xi^1$  维是由理想的 8 个小场基本单元沿直线排列构成的一维平直真空场，对于每一个小场基本单元做  $a, b, c, d, o, f, g, i, j$  共 9 个标记，现在考虑  $o$  点的情况。

场基本单元  $o$  向前移动，就会压缩前面的真空场而拉伸后面的真空场，越靠近  $o'$  点的真空场形变量就越大。在基本假设 II 中，我们知道真空场存在着拉伸和压缩极限，定义  $o'$  点偏离  $o$  点的最大值为拉伸压缩极限值。

$o'$  点没有达到拉伸压缩极限，就不会形成纵波，这种情况  $o'$  点就会恢复自然状态，并把振动能还给施以场形变的真空场。因为不能形成波，所以  $o'$  点的形变不能独立存在。因而这里只考虑达到拉压极限而形成波的情况。

当达到压缩极限时,  $o$  点就会压迫  $f$  点,  $f$  点压迫  $g$  点 $\cdots$ ,  $oi$  段变短, 成为  $o' i'$  段。缩短的量为  $\mathcal{H}/2$ 。这个值为点  $o'$  偏离  $o$  点的极大值, 为压缩极限值。显然由前面的假设知道, 这个拉伸压缩极限值是真空场的固有特性值, 为一个恒定值。在达到压缩极限时也同样达到了拉伸极限值, 拉伸的量为  $\mathcal{H}/2$ 。



基本单元场形变等于  $\mathcal{H}/2$  时, 才达到传播条件, 传播速度  $v = \mathcal{H}/t_h = c$ , 其中  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$

图 5.2.4 光子  $\xi^1$  维内禀结构

$$o'b' - ob = \mathcal{H}/2$$

由  $b'$  至  $i'$  这一段, 真空场就形成一个独立的纵波, 在  $b'$  和  $i'$  以外的真空场仍然保持平直均匀, 并没有受到  $o'$  点移动的影响, 于是由拉伸压缩两个区域组成的纵波在真空场中传播, 这是一种不同于经典波的孤立波, 波是不可能停留的。

5.2.3 形变极限值  $\mathcal{H}$  的真空场物理意义

在光子的内禀空间中, 以内禀空间的中心点为原点建立一个坐标架  $\xi^\mu$  来研究光子内禀移位场  $u(\xi^\mu)$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ 。  $\xi^\mu$  为量子场内禀坐标架。在此坐标架中, 光子  $\xi^\mu$  维的静态结构如图 5.2.4 所示。

把由中心点  $o$  到  $i$  段定义为压缩区, 记为  $R_{\text{压}}$ , 把  $ob$  段定义为拉伸区, 记为  $R_{\text{拉}}$ 。由于移动量相对内禀空间半径极小, 规定  $R_{\text{压}} = R_{\text{拉}} = R$ ,  $R$  是光子内禀场  $\xi^1$  的半径。把拉伸区和压缩区的长度之和定义为  $\xi^1$  的波长  $\Phi$  (为纵波波长):  $\Phi = 2R$ 。

由真空场的基本假设 II 可知真空场存在拉伸极限和压缩极限,  $\xi^1$  场总压缩极限量为  $-\mathcal{H}/2$ ; 对于拉伸区极限形变量则为  $\mathcal{H}/2$ 。若  $\xi^1$  场累加形变量小于  $\mathcal{H}/2$ , 则无法形成纵波; 当然也不可能超过这个值, 因为达到  $\mathcal{H}/2$  时便形成以光速传播的纵波, 无法让纵波再形变。这里的总形变量就是拉伸区和压缩区真空场极限形变量绝对值的总和, 即为  $\mathcal{H}$ , 把  $\mathcal{H}$  定义为光子  $\xi^1$  维真空场的总形变量, 并把  $\mathcal{H}$  称为真空场的一维的极限形变值, 为一常数, 是真空场的基本性质。

对于光子来说, 把单个光子形变区域的大小定义为光子内禀空间。单个光子形变区域

为球状。

这里引入内禀时间概念，内禀时间有明确的物理意义，就是量子场形成的时间。量子场内禀空间形成时，形变波以光速向中心扩散（或向中心收缩）至内禀空间半径  $R$  时所需要的时间  $\tau_R$  为内禀时间。时间和空间存在严格的关系： $R \equiv c\tau_R$ 。也可以把内禀时间  $\tau_\phi$  表述为

$$\Phi = c\tau_\phi \quad (5.2.2)$$

$\Phi$  为球形内禀空间的直径， $\sqrt{\sum_{i=1}^3 (\xi^i)^2} = |\xi_{\max}^i| = R$ ， $R$  是内禀空间的半径。

时空是同一本质的不同表现形式，空间和时间转换系数为  $c$ ，即  $x_0 = ct$ 。时空的总形变量  $\mathcal{H}$  就是真空场的总形变量。空间总形变量  $\mathcal{H}_x$  和时间总形变量  $\mathcal{H}_t$  本质就是真空场的总形变量，即

$$|u_{\max}^{0,1}| \equiv \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_\sigma \mathcal{H}_\tau = 2u_{\max} \quad (5.2.3)$$

总形变量  $\mathcal{H}$  对应弹性理论中的  $2u_{\max}$ ，系数 2 表示拉伸区和压缩区形变位移之和。压缩区的最大形变量为  $-\mathcal{H}/2$ ，拉伸区的则为  $\mathcal{H}/2$ 。式 (5.2.3) 为  $u(\tau, \xi^i)$  时空总形变量的定义式。

从定义式可以看出，构成压缩区的最小的真空场的量是一场基本单元场；构成拉伸区的最小的真空场的量也是一场基本单元，因而一个场基本单元的最大可压缩量为  $-\mathcal{H}/2$ ；最大可拉伸量为  $\mathcal{H}/2$ 。

真空形变构成场，场具有可观测效应，因而形变本身就会产生相应的可观测效应，这些效应包含：空间效应及空间的三维性质；时间效应及时间的一场维性；质量效应。质量是场形变程度所表现出的效应。质量和时空成为场最基本的量，质量和时空是同一事物本质的三种表现形式（质量的本质可参见第 7 章）。场形变量  $u(\xi)$  的量纲为 [质量] · [长度] · [时间]。这就是普朗克常数  $h$  的量纲，为了讨论方便，本书约定把它省略不写。

#### 5.2.4 光子 $\xi^1$ 维的能量

规定二维时空位移量为

$$u(\xi^\mu) = u(\xi^0, \xi^1) = u(\tau, \xi)$$

考虑时间维形变量：

$$du = \frac{\partial u(\xi^\mu)}{\partial \xi^0} d\xi^0 = \frac{\partial u(\xi^\mu)}{\partial \tau} d\tau$$

定义  $u(\tau, \xi)$  场的能量函数为

$$E(\tau) = \frac{\partial u(\xi^\mu)}{\partial \tau} \quad (5.2.4)$$

由式 (5.2.4) 可知光子的能量函数是量子场场形变量随内禀时间的变化率，如果取这个变化率在  $0 \sim \Phi_0$  区间的平均值，则有

$$E = \bar{E} = \frac{1}{\Phi_0} \int_0^{\Phi_0} \frac{\partial u(\xi^\mu)}{\partial \tau} d\tau = \frac{\mathcal{H}}{\Phi_0}$$

$$E = \frac{\mathcal{H}}{\Phi_0} \quad (5.2.5)$$

这个值就是光子  $\xi^1$  维的能量值  $E$ ，它满足

$$\mathcal{H} = E\Phi_0 \quad (5.2.6)$$

### 5.2.5 光子 $\xi^1$ 维的动量

定义光子  $u(\xi^\mu)$  场的动量函数为

$$p(\xi) = \frac{\partial u(\xi^\mu)}{\partial \xi^1} \quad (5.2.7)$$

由式 (5.2.7) 可知光子  $u(\tau, \xi)$  动量函数是量子场形变量随内禀空间的变化率，如果取这个变化率为  $0 \sim \Phi_1$  的平均值，则有

$$p = \frac{1}{\Phi_1} \int_0^{\Phi_1} \frac{\partial u(\xi^\mu)}{\partial \xi^1} d\xi^1 = \frac{\mathcal{H}}{\Phi_1}$$

$$p = \frac{\mathcal{H}}{\Phi_1} \quad (5.2.8)$$

这便是我们所熟知的光子  $u(\tau, \xi)$  的动量  $p$ 。由式 (5.2.8) 有

$$\mathcal{H} = p\Phi_1 \quad (5.2.9a)$$

综合上述两式，可得

$$\mathcal{H} = p\Phi_1 = E\Phi_0 \quad (5.2.9b)$$

$p$  是  $p(\xi)$  在  $0 \sim \Phi_0$  区间的平均值。 $\mathcal{H}$  为光子沿  $\xi^1$  方向的总形变量，可以把动量  $p$  说成是  $\xi^1$  总形变量的空间均分量，能量  $E$  则是  $\xi^1$  变量的内禀时间的均分量，内禀区间越小，则光子  $\xi^1$  的动量、能量就越大。综上所述，光子的四动量函数为

$$p_\mu(\xi^\nu) = \frac{\partial u(\xi^\nu)}{\partial \xi^\mu} = \varepsilon_{\nu\mu} \quad (5.2.10)$$

光子的四动量可以统一地写为

$$p_\mu = \frac{1}{\Phi_\mu} \int_0^{\Phi_\mu} \frac{\partial u(\xi^\nu)}{\partial \xi^\mu} d\xi^\mu \quad (5.2.11)$$

这就是内禀场的形变分量。知道  $p$  并不能知道  $p(\xi)$ ，所以找出  $p(\xi)$  是了解光子场内禀结构的关键。

### 5.2.6 光子 $\xi^1$ 维的内禀场位移函数 $u(\tau, \xi)$ 的建立

现在来看  $u(\tau, \xi)$  的具体表达式，对于光子内禀场函数来说，受测不准原理的限制，不可能进入到光子的内部，也无法找到比光子更小的探针来探测，因而只能设法去构造满足实验观测的光子内禀场函数。由于真空场是弹性场，应该和宏观世界的弹性物质存在相似性，也和弹性介质中的弹性波存在某些共性，因而如图 5.2.4 所示，真空场在自由状态时很容易形变，在接近  $o'$  点时，真空场变硬，再形变就困难，形变量变小，在  $o'$  点处，真空场达到形变极限， $u(\xi)_{\max} = \mathcal{H}$ 。这里可用余弦函数来构造和表述位移函数  $u$ 。

$$\text{在压缩区中: } u(-\xi^\mu) = -\frac{\mathcal{H}}{2} \cos k_\mu \xi^\mu$$

$$\text{在拉伸区中: } u(+\xi^\mu) = \frac{\mathcal{H}}{2} \cos k_\mu \xi^\mu \quad (5.2.12)$$

$\xi^1$  维度真空场时空总形变量为

$$u(\xi^\mu) = \mathcal{H} \left[ \int_{-\phi/2}^0 -k_\mu \sin k_\mu \xi^\mu d\xi^\mu + \int_0^{\phi/2} -k_\mu \sin k_\mu \xi^\mu d\xi^\mu \right] = \mathcal{H} \quad (5.2.13)$$

值得注意的是把时间维和空间维的形变分开来考虑是没有物理意义的，时、空、质量是一体的。拉伸和压缩区形变量取绝对值之和为  $\mathcal{H}$ 。把拉伸区和压缩区时空联合起来考虑，场的时空位移量为

$$u(\xi^\mu) = \mathcal{H} \cos k_\mu \xi^\mu \quad (5.2.14)$$

利用  $\cos \beta + i \sin \beta = e^{i\beta}$  将上式写为如下形式：

$$u(\xi^\mu) = \mathcal{H} \exp i(k_\xi - k_0 \tau) = \mathcal{H} \exp i k_\mu \xi^\mu \quad (5.2.15)$$

能量函数为

$$E(\tau) = i \frac{du(\tau)}{d\tau} = \mathcal{H} k_0 \exp i k_\mu \xi^\mu \quad (5.2.16a)$$

动量函数为

$$p(\xi) = \frac{1}{i} \frac{du(\xi)}{d\xi} = \mathcal{H} k \exp i k_\mu \xi^\mu \quad (5.2.16b)$$

要满足式 (5.2.14)，则

$$\bar{k} = \frac{\pi}{\Phi}, \quad k_0 = \frac{\pi}{\tau_\phi} \quad (5.2.16c)$$

这里  $\Phi$  就是内禀空间直径 ( $\Phi = c\tau_\phi$ )。由式 (5.2.10) 可以得到  $k, k_0$  和  $p$  及  $E$  的关系。

$$P = \frac{\mathcal{H}}{\pi} k = \varepsilon_{11}, \quad E = \frac{\mathcal{H}}{\pi} k_0 = \varepsilon_{00} \quad (5.2.17)$$

上式和量子力学中  $p_\mu = (h/2\pi)k_\mu = \hbar k_\mu$  相对应。光子  $\xi^1$  被认为是具有一维结构的粒子，位移函数为  $u(\xi^\mu) = \mathcal{H} \cos k_\mu \xi^\mu$ ，可以理解为真空场基本单元  $\phi_0$  沿  $\xi^\mu$  产生移动，移动量为  $k_\mu$ 。这样便构成了  $\xi^1$  维光子的位移函数：

$$u(\xi^\mu) = U_\gamma u_0 = \mathcal{H} \exp i[k_\mu \xi^\mu] \exp i0 \quad (5.2.18)$$

把真空场基本单元视为点，可以直观地理解为真空中的一个点的移动产生光子。

这里要定义描述真空场基本单元的场函数。

$$\phi_0 = \exp i0 = 1 \quad (5.2.19)$$

没有可观测性。



## 第6章 光子四维时空图像

本章讨论光子在四维时空中的内禀结构，并了解光子所具有的奇妙性质。光子同时具有几率波和电磁波的特性。

### 6.1 光子的内禀结构

#### 6.1.1 光子的力线构成纵波

前面分析了光子  $\xi^1$  维，并建立了光子  $\xi^1$  维的能量、动量、时间及  $\mathcal{H}$  常数等的物理概念。现在来考虑三维真空场中完整的光子  $\phi$  的情况。

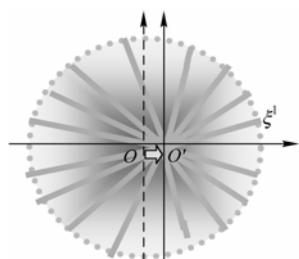


图 6.1.1 光子的形成

设想以内禀空间中心点为原点，在光子的内禀空间建立一个坐标架，来研究静态光子的内禀结构。

如图 6.1.1 所示，在点  $O$  处建立一个直角坐标架，当点  $O$  移动至  $O'$  时，点周围的场基本单元场排列发生变化，当沿  $\xi^1$  方向达到拉伸或压缩极限时，即  $OO' = \mathcal{H}/2$ ，开始沿  $\xi^1$  方向传播，形成光子。这里  $OO' = \mathcal{H}/2$  是一个小量，相对于整个光子球体来说， $OO'$  极小，可以认为拉伸区和压缩区近似相等，因此以光子中心点  $O$  为原点建立坐标架，可以使问题简化。

#### 6.1.2 光子单根力线的位移函数

对于单光子，光子由力线构成。可在光子内禀空间建立球坐标系（如图 6.1.2 所示），用位移函数  $u(\theta, \varphi, r)$  来描述光子的力线。单根力线是构成电子光子及电磁相互作用的最基本的单元。球面坐标与直角坐标之间的关系为

$$\begin{cases} (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = R^2 \\ \xi^1 = R \sin \theta \cos \varphi \\ \xi^2 = R \sin \theta \sin \varphi \\ \xi^3 = R \cos \theta \end{cases} \quad (6.1.1)$$

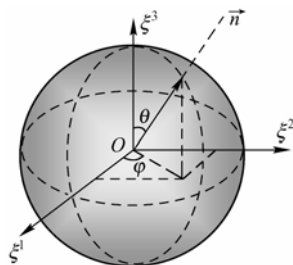


图 6.1.2 球坐标系

当  $O$  点沿  $x$  轴移动  $\mathcal{H}/2$ ，可以把  $\xi^1$  轴视为一维真空场，现以  $O'$  为圆心， $\xi_0^1 - \xi_{O'}^1 = \mathcal{H}/2$ ，在  $\xi^1$  轴上，考虑拉伸区  $0 \sim R$ ，单根电力线的位移函数为

$$u_{r(\text{single})}(\xi^1) = \frac{\mathcal{H}}{2} \cos \frac{\pi \xi^1}{\phi}, \quad -R \leq \xi^1 \leq 0$$

$$u_{r(\text{single})}(\xi^1) = -\frac{\mathcal{H}}{2} \cos \frac{\pi \xi^1}{\phi}, \quad 0 \leq \xi^1 \leq R$$

形变是在内禀空间中，因而有必要引入  $\theta$  函数，把上式合写为

$$u_{r(\text{single})}(\xi^1) = \theta(0 - \xi^1) \frac{\mathcal{H}}{2} \cos \frac{\pi \xi^1}{\phi} - \theta(\xi^1 - 0) \frac{\mathcal{H}}{2} \cos \frac{\pi \xi^1}{\phi}, \quad \xi^1 \gg |R| \quad (6.1.2)$$

这里,

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

在  $\xi^2 \xi^3$  面上真空场无形变,  $\mathcal{H}$  在该面上为零, 考虑在  $\xi^1 \xi^2$  面上, 当  $\varphi=0$  时, 沿  $\xi^1$  移动为  $\mathcal{H}/2$ ,  $\mathcal{H}$  的分布应满足

$$u_{r(\text{single})}(r, \varphi) = \theta(\varphi - \pi) \frac{\mathcal{H}}{2} \cos \varphi \cos \frac{\pi r}{\phi} - \theta(\pi - \varphi) \frac{\mathcal{H}}{2} \cos \varphi \cos \frac{\pi r}{\phi}, \quad r \gg |R| \quad (6.1.3)$$

再考虑  $\theta$  方向,  $\theta=0$  时,  $\mathcal{H}$  为 0, 在球坐标中 (空间形变量) 有

$$u_{r(\text{single})}(r, \varphi) = \theta(\varphi - \pi) \theta(\vartheta - \pi) \frac{\mathcal{H}}{2} \sin \theta \cos \varphi \cos \frac{\pi r}{\phi} - \theta(\pi - \varphi) \theta(\pi - \theta) \frac{\mathcal{H}}{2} \sin \theta \cos \varphi \cos \frac{\pi r}{\phi}, \quad r \gg |R|, \vartheta \in [2\pi, \varphi] \cup [\varphi, 2\pi] \quad (6.1.4a)$$

这就是光子单根力线在形变区域的表述。  $R$  为光子内禀空间半径。对时间部分由  $r_0 = c\tau$ ,  $\xi = (-\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , 得时空形变量为

$$u_{r(\text{single})}(r, \varphi) = \theta(\varphi - \pi) \theta(\vartheta - \pi) \frac{\mathcal{H}}{2} \sin \theta \cos \varphi \cos \left( \frac{\pi r}{\phi} - \frac{\pi \tau}{\phi_0} \right) - \theta(\pi - \varphi) \theta(\pi - \theta) \frac{\mathcal{H}}{2} \sin \theta \cos \varphi \cos \left( \frac{\pi r}{\phi} - \frac{\pi \tau}{\phi_0} \right), \quad r \gg |R|, \vartheta \in [2\pi, \varphi] \cup [\varphi, 2\pi] \quad (6.1.4b)$$

这里  $\phi_0 = 2R/c$ 。

利用欧拉关系式, 考虑时空总形变量, 可以把式 (6.1.4b) 写为

$$u_{r(\text{single})}(\tau, \varphi, \theta) = [\theta(\varphi - \pi) \theta(\vartheta - \pi) - \theta(\pi - \varphi) \theta(\pi - \theta)] \frac{\mathcal{H}}{2} \sin \theta \cos \varphi \exp i(kr - k_0 \tau), \quad r \gg |R|, \vartheta \in [2\pi, \varphi] \cup [\varphi, 2\pi] \quad (6.1.5)$$

这里,  $k = \frac{\pi}{\phi}$ ,  $k_0 = \frac{\pi}{\phi_0}$ 。这就是内禀场位移函数, 时空的形变构成内禀波函数。

### 6.1.3 光子纵波的非扩散性

光子既然是纵波, 为什么不像声波一样会发散形成球面波, 而总以粒子的形式存在呢? 这是因为光子具有纤维结构。这里可以看出光子内禀空间呈球状, 也可以把光子形象地说成是光子球。我们来看光子的  $\xi^1$  轴的纤维, 光子中心点压缩前面的场, 拉伸后面的场, 如图 6.1.3 所示。当  $O$  沿  $\xi^1$  轴的移动量达到拉伸压缩极限  $\mathcal{H}/2$  时 (这也是光子的形成条件), 对于  $\xi^1$  轴以外的场纤维来说, 虽然发生了形变, 但未达到拉伸压缩极限, 只有在  $\xi^1$  轴上才达到拉压极限而满足传播条件, 形成纵波。而  $\xi^1$  轴以外的真空场不会形成波而向外传播丧失能量, 光子只沿  $\xi^1$  轴方向传播, 不会形成向外辐射的球面波, 于是光子无论传播多远, 都仍然保持原有的光子的特性。所以光子虽然是纵波, 但却不会发散, 保持粒子的性状。

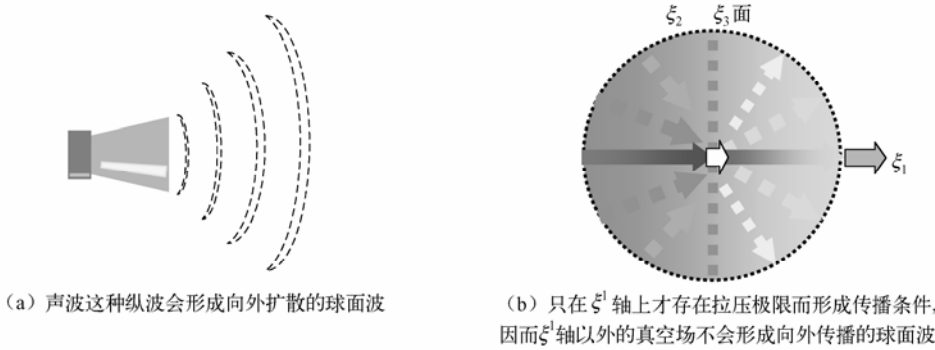


图 6.1.3 光子的粒子性

对于光子来说, 纤维真空场在以  $O$  点为原点,  $R$  为半径的区域中发生形变, 当  $O$  点离开后, 真空场又恢复平静, 回到平直状态, 而不带走任何能量, 所以整个量子场的全部能量决定于  $O$  点, 并称  $O$  点为光子中心点。

6.1.4 光子的纤维结构

1. 电力线的结构

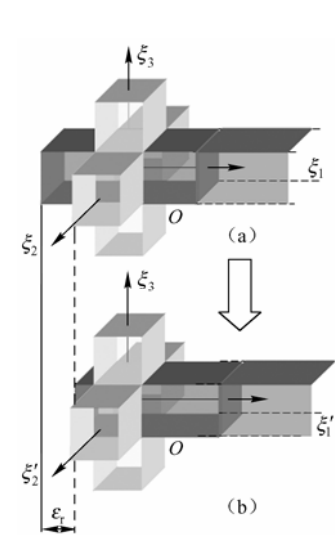


图 6.1.4 电力线的形成

对于压缩区  $O'$  附近的场, 由场基本单元排列而构成的某一条纤维化的场在  $\xi^2\xi^3$  方向虽然被压缩, 但其形变小于沿  $\xi^1$  方向的形变, 于是沿  $\xi^1$  方向的真空场会向前移动一个量  $\epsilon_r$ , 如图 6.1.4 (b) 所示, 并不改变场基本单元三维特性。和其紧密相连的场基本单元也会向前移动一个小量  $\epsilon_r$ , 这样一直持续下去, 就在  $\xi^1$  方向上形成电力线。在压缩区则形成压缩电力线; 在拉伸区则形成拉伸电力线 (可以和电子电力线对比看一下, 机理是一致的)。

这里, 注意到电力线在内禀空间区域的形变具有维度独立性。某点真空场具有完备的三维特性, 由  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  三维的场构成,  $\xi^1$  维真空场沿  $\xi^1$  移动一个小量  $\epsilon_r$ , 并不改变  $\xi^2, \xi^3$  维真空场的性质, 彼此是独立的, 即真空场具有维度的独立性。

拉伸纤维场 (负电场电力线) 的量和压缩纤维场 (正电场电力线) 的量  $\epsilon_r$  是严格相等的。

要特别注意的是电力线维度具有无限长的特性, 因为基本单元场被压缩, 于是会向前移动一个小量  $\epsilon_r$ , 和其紧密相连的基本单元场的维度也跟着向前移动一个小量  $\epsilon_r$ , 这样一直持续下去, 就在前方形成一根无限长的压缩电力线维。由于三个维度是独立的, 这种极小的维度梭动并不改变其他两维真空场的性质, 对整个真空场都没有影响, 因而光子的存在对周围时空没有影响。

对于正纤维场和反纤维场相遇, 真空场有一种恢复平直状态的趋势, 力图使两者结合在一起, 即所熟知的电场。

## 2. 光子的力线区域的划分

光子的力线由形变区域（动量线区域）和非形变区域（电力线区域）两部分构成，动量线区域又由动量线形成区和动量线区构成，如图 6.1.5 所示。弱线力区  $u_r = u_{r^+} + u_{r^-}$ ，由拉伸形变和压缩形变纤维构成。

(1) 光子动量线形成区  $0 \leq r \leq r_0$

在一个封闭球面（ $4\pi r^2$ ）内，设单光子的纤维总数为  $e$ ，单位球面力线的位移函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_r(\xi, \theta, \varphi) &= \frac{[\theta(\varphi - \pi)\theta(\vartheta - \pi) - \theta(\pi - \varphi)\theta(\pi - \theta)]}{4\pi r^2} \frac{\mathcal{H}}{2} \\ &\quad \sin \theta \cos \varphi \exp i(k_i \xi^i) \\ &\quad r \in [R], \vartheta \in [2\pi, \varphi] \in [2\pi] \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

力线形成区中，力线的数量和面积成正比： $n = e \frac{4\pi r^2}{4\pi r_0^2}$ ，则光子动量线场强度（单位球面内的动量线的位移量）为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_r(\xi, \theta, \varphi) &= \frac{\Delta u_r(\xi, \theta, \varphi)}{\Delta S} \\ &= [\theta(\varphi - \pi)\theta(\vartheta - \pi) - \theta(\pi - \varphi)\theta(\pi - \theta)] \frac{er^2}{r_0^2} \frac{\mathcal{H}}{2} \sin \theta \cos \varphi \exp i(k_i \xi^i) \\ &\quad r \in [R], \vartheta \in [2\pi, \varphi] \in [2\pi] \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

$r_0$  是形成区半径。

其中， $-k_i \xi^i = \frac{\pi}{\phi_1} \xi^1 + \frac{\pi}{\phi_2} \xi^2 + \frac{\pi}{\phi_3} \xi^3 - \frac{\pi}{\phi_0} \xi^0 = \frac{\pi}{\phi_r} \bar{r} - \frac{\pi}{\phi_0} \xi^0$

光子内禀空间为球结构， $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_r$ ， $\xi^0 = \tau$ ， $\xi^1 \bar{i} + \xi^2 \bar{j} + \xi^3 \bar{k} = \bar{r}$ 。

(2) 光子动量线区  $r_0 \leq r \leq R$

光子内禀空间单位球面内的动量线的位移量为

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u_r(\xi, \theta, \varphi)}{\Delta S} &= [\theta(\varphi - \pi)\theta(\vartheta - \pi) - \theta(\pi - \varphi)\theta(\pi - \theta)] \\ &\quad \times \frac{e\bar{r}}{4\pi r^3} \frac{\mathcal{H}}{2} \sin \theta \cos \varphi \exp i(k_i \xi^i), \quad r \in [R], \vartheta \in [2\pi, \varphi] \in [2\pi] \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

(3) 光子电力线区域  $R \leq r \leq \infty$

对于光子电力线而言，电力线是由纤维场整体移动一个小量  $\varepsilon_r$  构成的。 $\varepsilon_r \ll H/2$ ，

$$\begin{aligned} e \cdot \frac{\partial u_r(r, \varphi, \theta)}{\partial r} &= [\theta(\varphi - \pi)\theta(\vartheta - \pi) - \theta(\pi - \varphi)\theta(\pi - \theta)] \\ &\quad \times \frac{e\bar{r}}{4\pi r^3} \frac{\varepsilon_r \pi}{2\phi} \sin \theta \cos \varphi \exp i(k_i \xi^i), \quad r \in [R], \vartheta \in [2\pi, \varphi] \in [2\pi] \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

电场是长程力，对于单根电力线有效半径  $R' \rightarrow \infty$ ，动量线的内禀时间  $\phi_t \rightarrow \infty$ 。

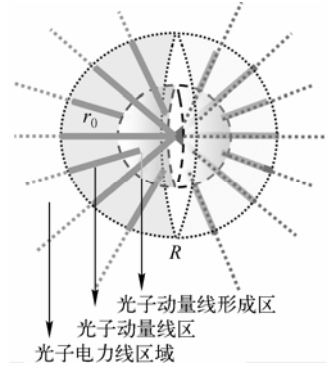


图 6.1.5 光子力线域的划分图

$$k_0 = \frac{\pi}{\phi_r} \rightarrow 0, \quad k_1 = \frac{\pi}{\phi} \rightarrow 0$$

则  $\exp i(k_i \xi^i) = 1$ 。

这是由于电力线是由维度移动构成的，本身并无形变，即电力线的动量为零，因而对时空不产生影响。 $e$  根动量线构成光子电场，取  $\vec{E}_\gamma = e \cdot \frac{\partial u_r(r, \varphi, \theta)}{\partial r}$ ，光子电场强为

$$e \cdot \frac{\partial u_r(r, \varphi, \theta)}{\partial r} = [\theta(\varphi - \pi)\theta(\theta - \pi) - \theta(\pi - \varphi)\theta(\pi - \theta)] \frac{e\vec{r}}{4\pi r^3} \frac{\varepsilon_r \pi}{2\phi} \sin \theta \cos \varphi$$

$$r \in [R], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, 2\pi] \quad (6.1.10)$$

$$E_\gamma = \frac{1}{2}(+E_\gamma) + \frac{1}{2}(-E_\gamma) \quad (6.1.11)$$

### 3. 光子的电荷

考虑一个封闭的球面，在正半球区间电场为  $\vec{E}_\gamma/2$ ；在负半球区间电场为  $-\vec{E}_\gamma/2$ 。

总电场为

$$E_\gamma = \frac{1}{2}(+E_\gamma) + \frac{1}{2}(-E_\gamma) = 0 \quad (6.1.12)$$

光子电力线进入和穿出相抵消，光子电荷为零。也就是说光子不带电荷。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\gamma = 0 \quad (6.1.13)$$

为无源场；对于电子， $\nabla E = e\delta(R)$ ； $\nabla \varphi = m\delta(r)$  为有源场。

### 4. 光子的磁荷

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (6.1.14a)$$

光子不带磁荷。光子电场磁场间的关系为

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (6.1.14b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.1.14c)$$

光子和轻子具有性质相同的电力线，因而电场磁场有上述性质。光子的 Maxwell 方程组就是光子电力线所具有的性质。

### 5. 普朗克常数

普朗克常数在真空场理论中有着非常明确的物理意义，就是光子总的场形变量。考虑光子球内所有的力线的总形变，设总共有  $e$  根力线，光子总的场形变量（只考虑绝对值）为

$$\Omega_{\text{Sphere}} = \int_0^{R_0} dr_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^R F(r_0, r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta \, dr$$

$$h = \left| \int_0^{R_0} dr_0 \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R p_\gamma p_{r_0} r^2 dr \right|$$

$$+ \left| \int_0^{R_0} dr_0 \int_\pi^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R p_\gamma p_{r_0} r^2 dr \right|$$

为了积分方便，把  $\varphi$  的取值范围由  $0$  到  $2\pi$  换为  $-\frac{\pi}{2}$  到  $\frac{3\pi}{2}$ ，这并不影响积分值。

$$\begin{aligned}
p_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{e\mathcal{H}\pi}{8\pi r^2 \phi} \sin \theta \cos \varphi \sin \left( \frac{\pi r}{\phi} - \frac{\pi r_0}{\phi_0} \right) \\
\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \tau} &= \left( -\frac{\pi}{\phi_0} \right) \frac{e\mathcal{H}\pi}{8\pi r^2 \phi} \sin \theta \cos \varphi \cos \left( \frac{\pi r}{\phi} - \frac{\pi r_0}{\phi_0} \right) \\
F(r_0, r, \theta, \varphi) &= \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \tau} \\
h &= \left| -\frac{\pi}{2R_0} \int_0^{R_0} d\tau \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R \frac{e\mathcal{H}\pi}{8\pi r^2 \phi} \sin \theta \cos \varphi \cos \left( \frac{\pi r}{\phi} - \frac{\pi r_0}{\phi_0} \right) \cdot r^2 dr \right| \\
&= \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R \int_0^{R_0} \frac{-e\mathcal{H}\pi^2}{8\pi r^2 \phi \phi_0} \sin \theta \cos \varphi \sin \left( \frac{\pi r}{\phi} - \frac{\pi \tau}{\phi_0} \right) \cdot r^2 dr d\tau \right| \\
&= \left| \frac{e\mathcal{H}}{8\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \right| + \left| \frac{e\mathcal{H}}{8\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \right| \\
&= \left| \frac{e\mathcal{H}}{8\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right| + \left| -\frac{e\mathcal{H}}{8\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right| \\
h &= e \left( \frac{\mathcal{H}}{4} \right) \tag{6.1.15}
\end{aligned}$$

如果不考虑绝对值，那么场的总形变量为零。拉伸场和压缩场形变大小相等，方向相反。光子场总形变  $h = h_f / 2$ ，是轻子场总形变的一半。

真空中某一点发生一维位移使得该点邻域发生形变构成场，该场总形变量为  $h$ ，则构成一个 Bose 场  $\phi$ ；若该场为三维形变且总形变量为  $h_f$ ，则构成一个轻子场  $\psi$ 。这些场统称为量子场  $\varphi$ 。

对于单一的量子场  $\varphi_i$  来说，位移函数  $u_i(\xi)$  沿某一个方向的应变不能大于真空场的形变极限值  $h$ ，因而存在如下关系：

$$u_i(\xi) \leq h$$

$$h = \int_0^R \frac{\partial u_i(\xi)}{\partial \xi^j} d\xi^j = \int_0^R \epsilon_{ij} d\xi^j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

这里  $0 < \xi^j \leq R^\mu$ 。由此可见每个场  $\varphi_i$  都有自己的作用范围  $R_j$ ，任何场应变都是有限的，场应变越小，力程就越长；反之，场应变越大，力程就越短。

## 6. 光子力线结构的简化

由于光子具有纤维特性，因而光子可以由球结构简化为一维弦结构，如图 6.1.6 所示。

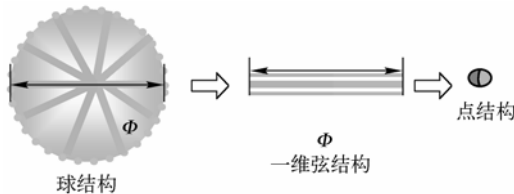


图 6.1.6 光子的简化

当考虑动量线结构时，光子由  $e$  根形变的动量线构成，对所有的单根动量线的总形变总

能找到一个平均值  $\bar{H}$ ，使得

$$e \frac{\bar{H}}{2} = \sum_{i=1}^e \frac{\mathcal{H}_i(\theta, \varphi)}{2} \quad (6.1.16)$$

对于  $\sum_{i=1}^e [R_i \cdot p_i(\theta, \varphi)]$  这一项同样也能找到一个平均值  $\bar{p}$ ，对于某光子  $R$  与  $\theta, \varphi$  无关，于是有

$$N(R\bar{p}) = \sum_{i=1}^e [R_i \cdot p_i(\theta, \varphi)] \quad (6.1.17)$$

综合式 (6.1.16) 和式 (6.1.17)，得到

$$h = e \frac{\bar{H}}{2} = \frac{\Phi}{2} \cdot e\bar{p} \quad (6.1.18a)$$

类似地，可得到

$$h = e \frac{\bar{H}}{2} = \frac{\Phi_0}{2} \cdot e\bar{E} \quad (6.1.18b)$$

定义

$$p_b \equiv e\bar{p}/2, \quad E_b \equiv e\bar{E}/2 \quad (\text{平均值}) \quad (6.1.19)$$

$p_b$  和  $E_b$  就是光子的总动量和总能量， $h$  则为总形变量，进一步简化有

$$h = p_b \cdot \Phi = E_b \cdot \Phi_0 \quad (6.1.20)$$

这就是光子简化图像的表达式。无论光子的动量大小如何，总是满足式 (6.1.20)。

有趣的是无论光子球的大小如何，光子动量线的总数都是相同的，并且电子的动量线总数也为  $e$ ， $e$  为常数，这一性质是由真空场本身的性质决定的。式 (6.1.20) 称为光子的普朗克常数的定义式，这个普朗克常数就是量子物理学中的普朗克常数， $\hbar = \lambda \cdot p = T \cdot E$ 。  
 $T = 1/\nu$  是振动周期。

## 6.1.5 光子的简化波函数

### 1. 光子纵波的简化

光子时空位移构成在真空介质中单光子的纵波，振动方向和传播方向一致。这种波是由真空发生位移产生的波，没有直接的可观测性。光子球体沿  $\vec{\xi}$  方向传播的球形半径  $R$  的大小直接表征了光子沿  $\vec{\xi}$  传播方向的形变的大小。不区分光子的压缩区和拉伸区，光子纵波位移波函数为

$$u_r(\xi, \varphi, \theta) = \frac{e}{4\pi r^2} \frac{\mathcal{H}}{2} \sin\theta \cos\varphi \exp i(k_i \xi^i), \quad r \in [R], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, 2\pi] \quad (6.1.21)$$

光子纵波在  $r$  处的形变振幅为  $\frac{e}{4\pi r^2} \frac{\mathcal{H}}{2} \sin\theta \cos\varphi$ ，对光子整体球壳内的动量线结构进行一维简化，光子总的形变量为  $h$ ，构成光子形变振幅，内禀极化坐标系中，纵波位移函数为

$$\begin{aligned} u_r(\xi) &= e \left( \frac{\mathcal{H}}{4} \right) \exp i(k_0 \xi^0 - k_3 \xi^3) \\ &= h \exp i \left( \frac{\pi}{\Phi_0} \tau - \frac{\pi}{\Phi} \xi^3 \right) \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

这就是光子的内禀纵波位移波函数的一维表述。该纵波具有孤立波的性质，波长为  $\Phi$ 。真空场性质和光子具有纤维场使光子具有这种奇异的性质。光子的纵波限制在内禀空间内，因而没有可观测性，对应现在量子场论中的纵光子或虚光子。在这个物理图像中，光子的动量有很明确的物理意义，就是纵波波长内的平均形变量。形象地说，光子的个头越大，平均形变量越小，动量越低；个头越小，动量就越大。无论光子的形变率大小如何，只有达到形变极限，就会构成传播条件，成为可测的光子。这个形变极限量为常数，即  $h = p \cdot \Phi$ 。这就是光子总的形变量，即普朗克常数  $h$ 。

由式 (6.1.22) 可知光子纵波的内禀波函数为

$$\varphi_{//}(\xi) = \exp i(k_0 \tau - k_3 \xi^3) \quad (6.1.23)$$

其中， $u$  为纵波振幅

## 2. 光子纵波的几率波波函数

波函数的概念源自于几率幅，对于光子纵波而言，纵向几率幅没有可观测性，因而采用几率波的概念来描述纵光子是不适用的，对于纵光子无几率波可言。

内禀空间中的纵波存在两种相互独立的纵向极化态，即沿时间方向和动量方向。在内禀空间中建立极化坐标架，规定沿传播方向的动量  $\mathbf{k}$  的方向为  $k_3$  方向。 $\bar{\varepsilon}_{k\lambda}$  满足以下正交归一条件：

$$\varepsilon_{k\lambda} \varepsilon_{k\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (6.1.24)$$

又由于  $\bar{A}_{//}$  的纵向性，故有以下纵向条件：

$$\vec{k} \cdot \varepsilon_{k\lambda'} = k_3 \quad (6.1.25)$$

$$k_0 \tau - \vec{k} \xi = 0$$

纵光子满足  $\square \bar{A}_{//}(\xi) = 0$ ，可得到光子的质壳关系：

$$\mathbf{k}^2 = |\mathbf{k}|^2 - E_k^2 = -m_0^2 = 0 \quad (6.1.26)$$

即光子的静质量为零。由于取  $\hbar = c = 1$ ，故单光子的能量为

$$E_k = \omega_k = |k| \quad (6.1.27)$$

现在，可把方程  $\square \bar{A}_{//}(\xi) = 0$  的任意解表示为如下的线性组合，即纵光子的波函数。

$$\begin{aligned} \bar{A}_{//}(\xi) &= \sum_{k, \lambda=i} \left( a_{k\lambda} A_{k\lambda}^{(+)}(\xi) + a_{k\lambda}^* A_{k\lambda}^{(-)}(\xi) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \sum_{\lambda=i} \varepsilon_{\vec{k}\lambda} (a_{\vec{k}\lambda} e^{ik \cdot \xi} + \bar{a}_{\vec{k}\lambda} e^{-ik \cdot \xi}), \quad i=0, 3 \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

其中， $a_{\vec{k}\sigma}$  和  $a_{\vec{k}\sigma}^*$  是展开系数。因  $\varepsilon_{\vec{k}\lambda}$  可以作为纵横坐标系第三、四轴的基矢，故上式即在纵横坐标系里写出来的。从测不准关系来看， $\Delta\lambda \cdot \Delta p \dots \frac{h}{2}$ ，而纵波波长  $\Phi = \frac{\lambda}{2}$ ，显然量子场纵波在内禀空间外没有可观测性，因而加入  $\theta(R-x)$ ，当  $x > R$  时， $\theta(R-x) = 0$ ；当  $x < R$  时， $\theta(R-x) = 1$ 。这样，就可以把内禀空间换到观测坐标空间中。



$$\bar{A}_{//}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \sum_{\lambda=i} \varepsilon_{\vec{k}\lambda} \theta(R-x) (a_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot x} + \bar{a}_{\vec{k}\lambda} e^{-i\vec{k}\cdot x}), \quad i=0, 3 \quad (6.1.29)$$

上式表述的是纵光子，由于没有可观测性，为虚光子态。

### 6.1.6 光子横向波动及几率波

#### 1. 光子的横波

光子几率波是由光子的横波表现出来的。为什么光子会有横波呢？如图 6.1.7 (a) 所示，光子沿  $\xi^3$  传播，构成一维纵波。此时的内禀位移函数为  $u_{//}(\xi) = \hbar \exp i(k\xi^3 - k_{03}\xi^0)$ 。

如图 6.1.8 所示，左边部分表示拉伸真空场，右边部分则表示压缩真空场，场的形变被限制在半径为  $R$  的球面内。球壳以外的为平直三维真空场，在简化结构中，光子球可以视为沿  $\xi^3$  方向传播的一根长为  $\phi$  的弦。在初始理想情况下，在  $\xi^3$  方向上，场形变量最大，由于维度具有独立性，与传播方向相垂直的  $\xi^1\xi^2$  面并没有发生场形变，在该面上存在自旋波。考虑到  $\xi^3$  方向已存在场形变，当光子在发射时，自旋波使得光子在  $\xi^1\xi^2$  面上必然受到扰动。这根弦中心点在受到扰动之后，只可能沿  $\xi^1\xi^2$  面发生上下振动，这样便构成了光子的横波。振动方向就是光子偏振方向。因而光子既有横波也有纵波，形象地说光子弦的中心点一边以光速沿直线向前传播，一边又沿垂直方向上下振动，这样光子的中心点的轨迹就形成了一条正弦曲线。在波峰处，相速度最慢，中心点出现的几率最大。要注意的是这种振动过程中，中心在光子球的球壳内振动，整个光子球的运动方向没有任何改变，沿  $\xi^1\xi^2$  方向运动（如图 6.1.7 (a) 所示）。横波和纵波合成后，

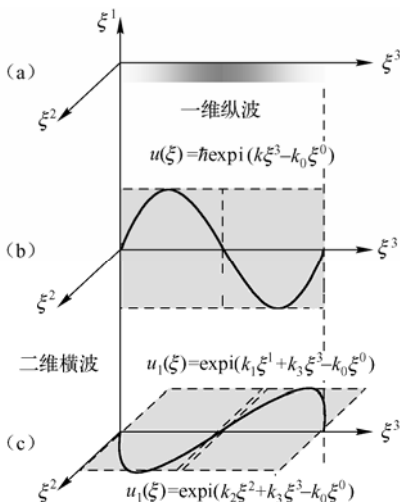


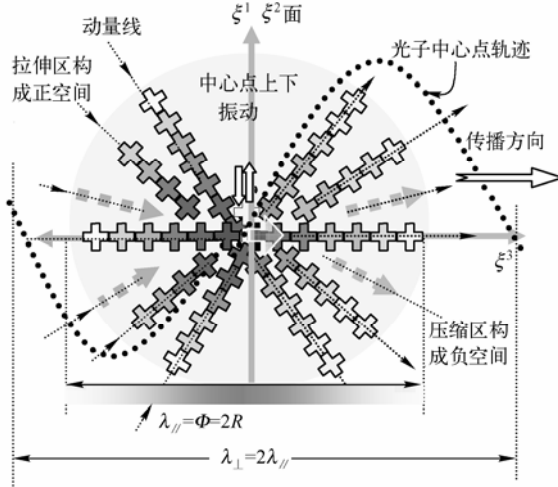
图 6.1.7 光子的横波和纵波

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \varphi_{\perp}(\xi) \varphi_{//}(\xi) = \exp i(k_1 \xi^1 + k_2 \xi^2 - k_{01} \xi^0) \exp i(k \xi^3 - k_{03} \xi^0) \\ \varphi(\xi) &= \exp i(k_1 \xi^1 + k_2 \xi^2 + k_3 \xi^3 - k_{03} \xi^0) \end{aligned}$$

$k_1 \xi^1$  和  $k_2 \xi^2$  使光子在传播时在  $\xi^1\xi^2$  面上存在横向振动。

每一种场形变度都对应一种可观测性。换言之，光子中心点的振动有 4 个方向，是

$k_\mu$ ,  $k_\mu$  的基矢量是  $\varepsilon_{k\mu}$ 。考虑振幅后的内禀波函数： $A(\xi) = \sum_{\lambda=i} \varepsilon_{k\lambda} (Ae^{ik \cdot \xi} + \bar{A}e^{-ik \cdot \xi})$ ,  $i=0, 1, 2, 3$  对于观测而言, 纵波没有可观测性。因此, 要把纵波波函数去掉, 将光子写成横波波函数的形式, 这一点在后续章节讨论。



光子中心点在波峰处相速度最小, 则可测几率最大, 表现为几率波, 波长为  $\lambda$

图 6.1.8 光子的纤维结构

## 2. 光子几率波波函数与内禀场函数的关系

光子被简化为一维弦, 光子一维弦的中心点在受到扰动之后会发生上下振动, 形象地说光子一维弦的中心点一边以光速沿直线向前传播, 一边又沿垂直方向上下振动, 这样光子的中心点的轨迹就形成了一条正弦曲线, 在波峰处, 相速度最慢, 中心点出现的几率最大, 这便构成光子的几率  $|\varphi(x)|^2$  和几率波波函数  $\varphi(x)$ 。

$$\varphi(t, \vec{x}) = Ae^{-i(p\vec{x} - Et)} \quad (6.1.30)$$

$|\varphi(x)|^2$  描述了光子中心点出现的几率,  $A$  是波函数的振幅。位移函数  $u(\xi^\nu)$  描述了量子场的内禀时空。能否找到内禀空间位移函数和波函数之间的关系呢? 这里有必要对内禀场函数  $\phi(\xi)$  进行相应的恒等变化:

$$\varphi_r(\xi) = u \exp i(k_0 \xi^0 - k \xi^i) = u \exp i\left(\frac{\pi}{\Phi_\mu} \xi^\mu\right) = u \exp i\left(\frac{2\pi}{2\Phi_\mu} \xi^\mu\right)$$

由光子内禀波函数和几率波之间的关系知:

$$2\Phi = \lambda, \quad 2\Phi_0 = T$$

$$\varphi(\xi) = u \exp i\left(\frac{2\pi}{T} \xi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_\mu} \xi^\mu\right) \quad (6.1.31)$$

光子几率波波函数为

$$\varphi_\perp(x) = u \exp i\left(\frac{2\pi}{T} t(\xi) - \frac{2\pi}{\lambda} \vec{x}(\xi)\right) \quad (6.1.32)$$

内禀二维简化波函数和光子几率波波函数有完全相同的表述形式。内禀空间标架可延伸至粒子空间标架（如图 6.1.9 所示），规定  $\xi^\mu = x^\mu(\xi)$ ，把  $x^\mu(\xi)$  简写为  $x^\mu$ ，内禀空间四维波矢和时空自由度空间的四维波矢严格相等，与纵波波矢等价。

$$\vec{k} = \frac{\pi}{\Phi} \equiv \frac{2\pi}{\lambda} = k_3; \quad k_0 = \frac{\pi}{\Phi_0} \equiv \frac{2\pi}{T}$$

光子的场量为

$$\varphi_\perp(x) = u \exp i \left( \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} \bar{x} \right) \quad (6.1.33)$$

上式虽然是光子的几率波波函数，但是同时也表征了光子内禀场的简化结构。内禀场和几率波存在共同的表述形式使得量子场的研究大为方便。

值得注意的是  $\varphi_\parallel(\xi)$  和  $\varphi_\perp(x)$  类似一个硬币的两面，内禀空间内看到的是  $\varphi_\parallel(\xi)$ ；内禀空间外看到的是  $\varphi_\perp(x)$ 。

### 3. 光子的横波在实验时空自由度空间的描述

前面的讨论是单光子，是一种理想情况。现在来看光子  $\varphi(x)$  在实验时空自由度空间中的具体表述形式。实验中，可以通过偏振片来对光子进行分类，如用偏振片可把与偏振方向正交的光子过滤掉。由此，认为光子具有横波特性，其偏振面与传播方向  $\vec{k}$  垂直。实验对光子的测量采用的是探测器，探测器测量到一个光子后，产生一个电信号，如图 6.1.10 所示。探测器测到的是光子的整体能量和动量，不可能像宏观物体那样能同时测到光子的  $p_1, p_2, p_3$ ，因为探测器不可能进入光子内禀空间。受实验条件的限制，在现有实验条件下，我们对光子的理解建立了这样的图像：光子具有波粒二象性，光子具有横波特性，动量是唯一的，为  $\vec{k}$ ，方向沿传播方向，在其他方向的动量为零。

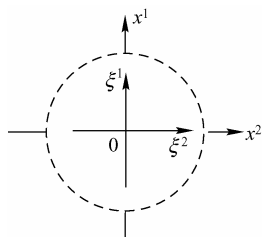


图 6.1.9 内禀空间标架可延伸至粒子空间标架



图 6.1.10 光子进入探测器产生一个电信号

根据这一图像，现在的理论把  $\vec{k}$  看成一个单一的不变矢量， $\vec{k} = k_z \vec{e}_z$ 。从场形变的角度来看， $A_\mu = \exp i k_\mu x^\mu$ ， $k_\mu$  沿  $x^\mu$  移动产生  $A_\mu$ ，而现有的物理图像有  $k_z$  却无  $A_z(t, \vec{r})$  项； $k_x = k_y = 0$ ，但却有矢势  $A_x(\vec{r}, t)$ ， $A_y(\vec{r}, t)$ 。 $A_x, A_y$  与光的传播方向  $\vec{k}$  垂直，它的方向也就是光的偏振方向，满足

$$\vec{k} \cdot \varepsilon_{(1)} = \vec{k} \cdot \varepsilon_{(2)} = 0 \quad (6.1.34)$$

这一理论描述完全违反了场位移波源自于场发生点移动的原则  $u(x) = \exp i \vec{k} \vec{x}$ ，但奇异的是这种描述却很好地符合实验观测，这表明实验观测决定了理论的描述形式。根据实验观测，光子只有横波，没有纵波，光子横波满足

$$\square \vec{A}_t(\xi) = 0 \quad (6.1.35)$$

方程的任意解表示为如下的线性组合：

$$A_l(x) = \sum_{k,\lambda=1}^2 \left( a_{k\lambda} A_{k\lambda}^{(+)}(x) + a_{k\lambda}^* A_{k\lambda}^{(-)}(x) \right) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_{k\lambda} (a_{k\lambda} e^{-ik \cdot x} + \bar{a}_{k\lambda} e^{ik \cdot x}) \quad (6.1.36)$$

其中， $a_{k\sigma}$  和  $a_{k\sigma}^*$  是展开系数， $|\vec{k}| = \omega_k$ 。因  $\varepsilon_{k\lambda}$  可以作为纵横坐标系第一、二轴的基矢，故上式即在纵横坐标系里写出来的。

$$A_{k\lambda}^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \bar{\varepsilon}_{k\lambda} e^{-ik \cdot x}, \quad \lambda = 1, 2 \quad (6.1.37a)$$

$$A_{k\lambda}^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \bar{\varepsilon}_{k\lambda} e^{ik \cdot x}, \quad \lambda = 1, 2 \quad (6.1.37b)$$

其中， $A_{k\lambda}^{(+)}(x)$  和  $A_{k\lambda}^{(-)}(x)$  分别是正负频率的平面波解， $\frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}}$  是归一化常数， $\varepsilon_{k\lambda}$  是

$A_{k\lambda}^{(\pm)}(x)$  方向的单位向量，称为光子的单位向量。 $\lambda = 1, 2$  对应光子的两种横向极化态（或平面波的两种横向极化态）。由于两种横向极化态相互独立，故  $\varepsilon_{k\lambda}$  满足以下正交归一条件：

$$\varepsilon_{k\lambda} \cdot \varepsilon_{k\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (6.1.38)$$

$A_{k\lambda}^{(\pm)}(x)$  就是光子内禀空间中心点的四维移动形成量子波  $u(\xi)$  在实验观测所表现出来的波函数。对实验观测而言，光子只有两种横向极化态，这种理解显然受到实验条件的限制。

#### 4. 光子纵波和横波之间的关系

现在在粒子时空自由度空间  $x^\mu$  中具体来看一下光子中心点的运动情况，选择极化坐标系（如图 6.1.11 所示），光子沿  $x$  轴方向运动。

光子中心点上下振动构成横波。有必要考虑光子中心点的振动是否会违反光速不可超过的原则，答案是否定的，因为存在维度相互独立的原理。做如下简单的实验：一束光通过  $n$  条与之垂直的光线后，所测的光速应该仍然为  $c$ ，而没有改变。这个实验说明，对于同一点来说，沿  $x$  方向和  $y$  方向场的传播速度均为  $c$ ，互不影响，相互独立，这就是场的独立传播原理，根据这个原理，可以知道光子球光子中心点沿  $y$  轴振动（振动的本质还是波的传播）不影响沿  $x$  轴的传播，即光子球沿  $x$  轴的速度仍然为  $c$ ，而在  $y$  轴上，光子中心点的最大速度是  $c$ ，最小为零，光子中心点轨迹如图 6.1.12 所示。

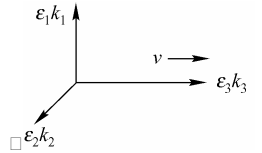


图 6.1.11 极化坐标系

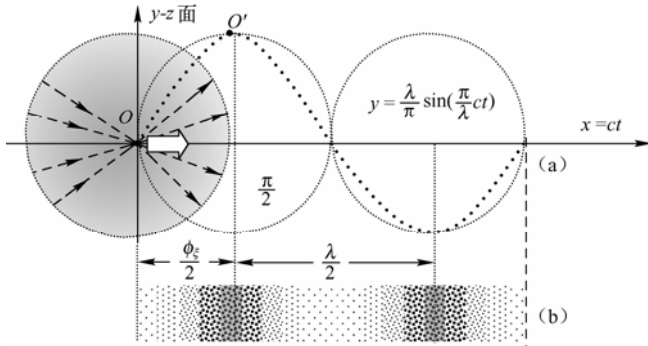


图 6.1.12 光子中心点的轨迹及概率

在  $y$  轴方向的运动规律是简谐振动，光子中心点在达到光子球的球壳时，其速度为零；而在过  $x$  轴时，速度为  $c$ ，于是  $v_y = c \cdot \cos kx$ ，其中  $k = \pi/\lambda_\perp$ 。在沿  $x$  轴方向上，光子中心点永远以光速  $c$  运动，并不受  $y$  方向的影响，所以  $v_x = c$ ，光子中心点的运动轨迹满足余弦函数  $\cos kx$ ，如图 6.1.12 所示，在这个合成轨迹上，中心的线速度  $v$  为

$$v = c\sqrt{1 + \cos^2 kx} \quad (6.1.39)$$

由上式可以看出，当  $kx = n\pi$  时 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )， $v$  为极大值，速度最大为  $\sqrt{2}c$ ；当  $n$  为  $(2n+1)\pi/2$  时 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )， $v$  为极小值，于是  $O'$  点在波峰上，速度最小为  $c$ 。光子中心点这种合成速度为相速度，显然相速度是超光速的，但从维度的独立传播原理来看，并未超光速。由于在波峰上中心的相速度最小，则几率最大，而在  $x$  轴上中心的相速度最大，则几率最小，如图 6.1.12 所示。

这里要提出注意的是：光子中心点在  $y$  轴方向振动的四维动量是由光子球本身的四动量分出的一部分，总的四动量并没改变，光子总的形变量仍然是  $\hbar$ ；光子在未受扰动之前并无横波，光子的波动性是由横波特性表现出来的，而横波特性是受扰动而产生的结果。或者说原始纵光子并无几率波波动性，纵光子无可观测性，称之为虚光子。产生光子的过程本身就是一种扰动，另外测量的本身也是一种扰动，这同样也赋予了光子波动性。只有横光子才有几率波波动性，即可观测性。

受扰光子由横波和纵波两部分构成，那么这两部分有什么关系呢？先来看纵波波长  $2R$  和横波波长  $\lambda$  间的关系。如图 6.1.12 所示，余弦曲线为中心轨迹，为了方便标记，记纵波的波长为  $\phi_\xi$ ，沿  $x$  轴方向。记横波的波长  $\lambda$ ，振动垂直于  $x$  轴方向，沿  $y$  轴方向为横波，满足

$$x = ct, \quad y = \frac{\lambda}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} ct\right), \quad \text{当 } \frac{\pi}{\lambda} ct \text{ 取 } 0 \sim \frac{\pi}{2} \text{ 时, 有如下关系:}$$

$$\phi_\xi = \lambda/2$$

光子纵波波长就是内禀空间直径， $\phi_\xi$  和横波波长  $\lambda$  的关系为  $\phi_\xi = 2R = \lambda/2$ ，因而光子的内禀空间和时空自由度空间的关系如下：

$$\xi = x/2 \quad (6.1.40)$$

## 5. 测不准原理

光子中心点的位置能否确定？当我们沿某一方向进行测量时，用一个量子测量一个光子由光子球表面到中心的位置就是  $R$ ，考虑到另一个量子场的内禀真空场区域也存在内禀空间，有  $\Delta x \dots R$ ，由式 (6.1.40) 知

$$\Delta p \cdot \Delta \Phi \dots \frac{\hbar}{2} \quad (6.1.41)$$

这便是所熟知的测不准关系式。当一个量子场碰上另一个光子球后，只要进入光子球壳以内，就会对光子中心点造成扰动，并改变光子球的运动位置，于是无法准确测知（或用一个量子场感知另一量子场）该光子中心点的位置，用实验感知的极限便是用一个量子场去感知另一个量子场。

## 6. 光子几率波波函数

由关系式  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - x) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x)$  可知，当  $x \rightarrow \xi$  时，光子的简化结构在实验观测中

的波函数为

$$\phi(x) = \exp i(k_1 x^2 + k_2 x^2 + k_3 x^3 - k_0 x^0) = \exp i(k_\mu x^\mu) = \exp i(\vec{k}\vec{x} - \omega \cdot t) \quad (6.1.42)$$

光子中心点的运动轨迹可以用余弦函数来表达。能得到横波的波函数:

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \exp i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) \\ \phi &= e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{x})} \end{aligned} \quad (6.1.43)$$

该波函数描述了光子的几率特性, 就是几率波波函数。和纵波不同的是横波的周期为  $2\pi$ , 纵波为  $\pi$ 。

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}, \quad \vec{p} = \hbar \vec{k} \quad (6.1.44)$$

$$k_0 = \omega, \quad E = \hbar \omega \quad (6.1.45)$$

几率波波函数  $\phi$  和  $u_\lambda(\xi) = \exp i(k_\lambda \xi^\lambda + k_3 \xi^3 - k_0 \xi^0)$  是等价的。

$$\vec{k} = \frac{\pi}{\phi_\xi} \frac{\vec{\phi}_\xi}{|\vec{\phi}_\xi|} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|} \quad (6.1.46)$$

这里  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$  三者之间相互正交, 每一个量都是变量, 但彼此间满足如下关系:

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \quad (6.1.47)$$

这里讲述了单个光子的横波和纵波的关系, 讲述了量子场的内禀结构, 并知道了光子为什么存在普郎克常数, 四动量  $p_\mu$  和波粒二象性。

给出光子波粒二象性的定义: 光子同时具有纵波和横波, 纵波的非扩散性使光子表现出粒子性, 而横波使光子中心点的相速度呈现出周期性快慢变化, 对于观测表现出具有几率波的性质, 光子同时具有的这两种特性定义为光子的波粒二象性。

对内禀空间的分析得知光子具有了 4 种性质: 纵波、横波、自旋及纤维结构。纤维结构就是电力线场, 即电磁场; 纵波表现出粒子性; 横波表现出波动性。实际观测到的是几率波, 波函数很简单, 对于光子的内禀结构没有涉及, 仅描述了光子中心点出现的几率分布, 光子的所有可观测量都包含在光子所简化的点中。所观测到的光子的光波某处强弱指的是光子中心点在某处出现的几率的大小, 换言之, 是光子的横波, 只有横波才具有可观测性。对于由多个光子构成的光子的几率由下式表述。

$$\phi = a_k e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x})} \quad (6.1.48)$$

其中,  $a_k$  表示几率幅。运动方向相反的光子具有对偶结构, 即正反光子的运动方向相反, 结构一致。考虑正反光子和光子的横波的可观测特性, 光子横波波函数为

$$A_\perp(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_{\vec{k}\lambda} (a_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \bar{a}_{\vec{k}\lambda} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}})$$

对比光子纵波波函数,

$$\bar{A}_\parallel(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \sum_{\lambda=i} \varepsilon_{\vec{k}\lambda} \theta(R-x) (a_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \bar{a}_{\vec{k}\lambda} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}), \quad i=0, 3$$

可将上述两式合写为

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \sum_{\lambda=0}^3 \left[ \varepsilon_{\vec{k}\lambda}(\lambda=1,2) + \varepsilon_{\vec{k}\lambda}(\lambda=0,3) \theta(R-x) \right] (a_{\vec{k}\lambda} e^{ik \cdot x} + \bar{a}_{\vec{k}\lambda} e^{-ik \cdot x}) \quad (6.1.49)$$

这就是光子波函数的完整表述。

从上式可以看出：当  $x \ll R$  时，受测不准原理  $\Delta p \cdot R \sim \hbar$  的限制，纵波没有可观测性；当  $x \sim R$  时，相对于测量而言，没有触及光子内禀空间，因而也无观测效应，由  $\theta$  函数把纵波项去除。介于上述两方面的考虑，光子对于观测者而言只有横波效应。

## 6.1.7 光子的极化和自旋

### 1. 光子的自旋

沿  $\xi^2$  方向运动振动，如图 6.1.7 (c) 所示，

$$\varphi_2(\xi) = \varphi_s(\xi) = \exp i(k_2 \xi^2 - k_{01} \xi^0) \quad (6.1.50)$$

三式合起来为

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \varphi_1(\xi) \varphi_2(\xi) \varphi_3(\xi) = \varphi_{\perp}(\xi) \varphi_s(\xi) \varphi_{//}(\xi) \\ \varphi(\xi) &= \exp i(k_1 \xi^1 + k_2 \xi^2 + k_3 \xi^3 - k_0 \xi^0) \end{aligned} \quad (6.1.51)$$

$k_0 \xi^0 = (k_{01} + k_{02} + k_{03}) \xi^0$  使光子具有能量。光子的简化结构现在不再是单一的一维结构，在  $\xi^1, \xi^2$  上又增加了两个运动自由度。 $k_2 \xi^2$  使光子在  $\xi^1, \xi^2$  面上与  $\xi^1$  垂直的方向又增加了一个运动自由度，这一运动使  $\xi^1$  发生转动。内禀坐标架变为一个旋转的坐标架。

如图 6.1.13 (a) 所示， $k_2 = 0$ ，对应的是线偏振光；

$k_1 = k_2$ ，对应的是左圆偏振光；

$k_2 = -k_1$ ，对应的是右圆偏振光。

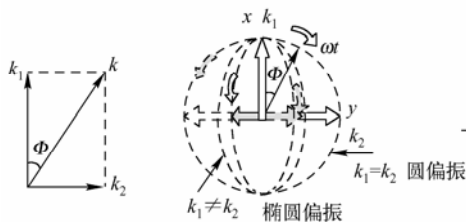


图 6.1.13 (a) 光子的自旋

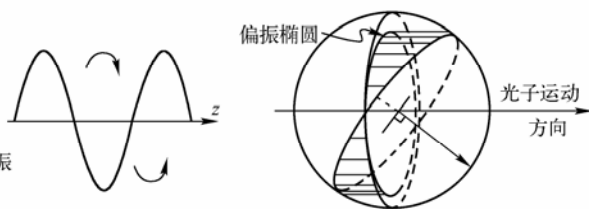


图 6.1.13 (b) 光子椭圆偏振

如果光子中心点的振动面不垂直于光子的运动方向，如图 6.1.13 (b) 所示。当  $k$  分解为  $k_1$  和  $k_2$ ， $k_1$  和  $k_2$  在垂直面上投影值不再相等， $k_1 \neq k_2$ （规定  $k_1 > k_2$ ）对应椭圆偏振光。

单光子的位移函数为

$$u(\xi) = h \exp i(k_1 \xi^1 + k_2 \xi^2 + k_3 \xi^3 - k_0 \xi^0) \quad (6.1.52)$$

容易得到光子自旋角动量为  $\hbar$ 。因为自旋波的总形变量为  $u_s = \oint_{2\pi r} du(\xi^2) = \hbar$ ，这里每一个

独立的自由度满足  $p_\mu \xi^\mu = \hbar$ ，其中  $p_\mu = k_\mu \hbar$ ， $k_\mu = \pi / \phi_\mu$ 。

相应的动量为  $\vec{P}_s = \partial u_{r_s} / \partial S$ ， $S = \theta \cdot \vec{r}$  为弧长。在光子内禀空间中，设  $r$  为光子中心点

转动的半径, 当  $S = 2\pi r$  时, 光子的中心点波长  $\lambda = 2\pi r$  构成一个单一的驻波, 是自旋的低能稳定态。因而自旋波满足

$$2\pi\vec{r} \times \vec{P}_S = \hbar \quad (6.1.53)$$

有

$$\vec{r} \times \vec{p}_S = \frac{\hbar}{2\pi} = \hbar$$

为光子自旋角动量。

## 2. 自旋振幅

矢量势  $\mathbf{A}(t, \vec{r})$  就是光子的场位移  $u(\xi)$  在粒子空间的表现形式。在实际情况中, 光子的波矢  $\vec{k}$  是一个由转动、振动和向前三种量合成的量。从场应变的角度来看, 位移函数就是四维矢势。

$$\mathbf{A}^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} A^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A^3 \end{pmatrix} = \eta_{\mu\nu} \mathbf{A}$$

这里

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(t, \vec{x}) = A^0(t, \vec{x})\varepsilon_{(0)} - A^1(t, \vec{x})\varepsilon_{(1)} - A^2(t, \vec{x})\varepsilon_{(2)} - A^3(t, \vec{x})\varepsilon_{(3)} \quad (6.1.54)$$

角标中的括号表示在极化坐标中。  $\mathbf{A}^\mu(x)$  满足  $\square \mathbf{A}^\mu(x) = 0$ , 该式的任意解可表示为

$$\mathbf{A}^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \int d^3k \varepsilon_{(\mu)} [a_{(\mu)}(k) e^{-ikx} + a_{(\mu)}^\dagger(k) e^{ikx}], \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (6.1.55)$$

现在从场形变的角度来理解光子的自旋。光子沿  $z$  轴方向传播, 矢量势  $\mathbf{A}(\vec{r}, t)$  为

$$\mathbf{A}_r(t, \vec{r}) = A_x(t, \vec{r})\varepsilon_x + A_y(t, \vec{r})\varepsilon_y + A_z(t, \vec{r})\varepsilon_z \quad (6.1.56)$$

其中,  $A_x, A_y, A_z$  相互垂直, 满足

$$A_r(t, \vec{r}) = \sqrt{A_x^2(t, \vec{r}) + A_y^2(t, \vec{r}) + A_z^2(t, \vec{r})}$$

相对于  $A_{xy} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$  而言,  $A_z$  也是一个变量, 只有  $A(\vec{r}, t)$  是不变量。  $A_x(t, \vec{r})$  和  $A_y(t, \vec{r})$  两个分量满足

$$\begin{cases} A_x = A_r \sin \theta \cos \Phi = A_{xy} \cos \Phi \\ A_y = A_r \sin \theta \sin \Phi = A_{xy} \sin \Phi \end{cases} \quad (6.1.57)$$

其中  $\Phi$  是该点矢量势的幅角。从三维空间来看, 矢势  $\mathbf{A}_r(\vec{r}, t)$  是一个旋转量, 如图 6.1.14 所示。

在  $xy$  二维面上看,  $x$  维和  $y$  维上的速度在  $0 \sim v_{\max}$  之间振荡, 如图 6.1.15 所示。速度为 0 时, 测到的几率最大; 速度为  $v_{\max}$  时, 测到的几率最小。在  $xy$  二维面上光子中心点的轨迹为椭圆环。

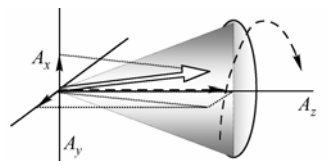


图 6.1.14 矢势  $\mathbf{A}(\vec{r}, t)$  为旋转量



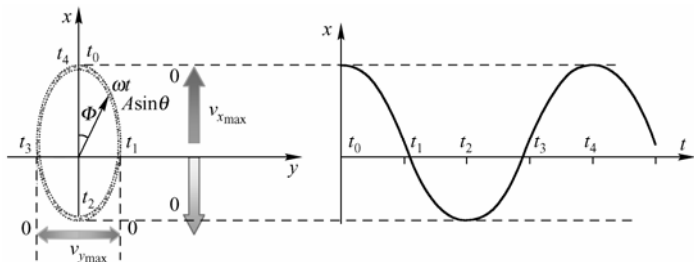


图 6.1.15 光子自旋

就单一光子而言，光子的中心点在沿  $z$  轴方向传播的同时，还在与  $z$  轴方向垂直的平面上做椭圆旋转。随着时间的增加， $+\omega t$  相位幅角也增加，增加  $2\pi$  幅角，中心点转动一个周期，即光子的中心点沿  $z$  轴方向传播一个周期，可以看成光子沿  $z$  轴正向传播。反之， $-\omega t$  则光子沿  $z$  轴反向传播。

另一方面，任一方向的线偏振光也可分解成一个左旋圆偏振光  $A_L$  和一个右旋圆偏振光  $A_R$  的叠加。

$$\begin{cases} A_L = A e^{+i\phi} = A_x + iA_y \\ A_R = A e^{-i\phi} = A_x - iA_y \end{cases} \quad (6.1.58)$$

对于光子自旋的理解是这样的：写出波函数的时间因子  $\exp\{-i\omega \cdot t\}$ ，这时  $A_L$  与  $A_R$  的相位分别为  $\phi - \omega t$  和  $\phi + \omega t$ ，随着时间  $t$  的增加，光沿  $z$  轴传播，相位相同点的幅角增加（左旋）或减少（右旋）。在一个周期  $T = 2\pi/\omega$  里，矢量势转过  $2\pi$  幅角。

进一步赋予光子具有表述意义下的自旋角动量，和球谐函数进行类比。

$$\begin{cases} A_L \sim Y_{1+1} \\ A_R \sim Y_{1-1} \end{cases} \quad (6.1.59)$$

即矢量势的转动性质与  $l=1$  的球谐函数  $Y_{lm}$  一样。所以，这种类比使光子具有  $l=1$  的自旋角动量。

这个结论是普遍的：任何矢量波函数所描述的粒子，都具有  $l=1$  的自旋角动量。左旋和右旋圆偏振光子，自旋角动量在  $z$  轴的投影分别是  $+\hbar$  和  $-\hbar$ 。光子自旋在  $z$  轴的投影不可能为 0，没有与  $m=0$  相对应的态  $Y_{10}$ ，这是由于光子没有质量并以光速运动，是纯相对论性粒子。由于没有  $m=0$  的态，光子的运动具有螺旋性，当  $m=1$  时，其自旋方向与运动方向相同，而当  $m=-1$  时，其自旋方向与运动方向相反。

光子自旋为  $1\hbar$ ，按照量子力学（取 Coulomb 规范），它应有三种极化态。但由于电磁波的横向性，光子事实上只有两种独立的横向极化态。为了物理的直观性，采用 Coulomb 规范。

光子的自旋属于内部自由度，在平面波解式 (6.1.49) 里，除了时空相因子以外便是极化矢量  $\epsilon_{\vec{k}\lambda}$ ，因而与 Dirac 粒子的情况进行对比，可以把极化矢量  $\epsilon_{\vec{k}\lambda}$  ( $\lambda=1, 2$ ) 作为光子的自旋波函数。由于电磁波的横向性，故纵横坐标第三轴的基矢  $\epsilon_{\vec{k}3}$  不是光子的极化矢量，内禀空间中  $\epsilon_{\vec{k}3}$  也是光子的极化矢量，同时也是光子的自旋波函数。这样， $\epsilon_{\vec{k}\sigma}$  ( $\sigma=1, 2, 3$ ) 就构成  $\hat{s}^2$  和  $\hat{s}_3$  的一组“完全”、正交、归一的共同本征函数。

$$\epsilon_{\vec{k}\sigma} \cdot \epsilon_{\vec{k}\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \sigma, \sigma' = 1, 2, 3 \quad (6.1.60)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma}$  作为三维矢量, 可以表示为如下的列矩阵:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\vec{k}\sigma}^1 \\ \varepsilon_{\vec{k}\sigma}^2 \\ \varepsilon_{\vec{k}\sigma}^3 \end{pmatrix}, \quad \sigma = 1, 2, 3$$

相应地, 自旋分量算符  $\hat{s}_j (j=1, 2, 3)$  应为  $3 \times 3$  矩阵:

$$\hat{s}_j = \begin{pmatrix} s_j^{11} & s_j^{12} & s_j^{13} \\ s_j^{21} & s_j^{22} & s_j^{23} \\ s_j^{31} & s_j^{32} & s_j^{33} \end{pmatrix}$$

按照式 (6.1.60), 当  $j=1$  时, 有

$$\hat{s}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} = \hat{s}_1 \begin{pmatrix} \varepsilon_{\vec{k}\sigma}^1 \\ \varepsilon_{\vec{k}\sigma}^2 \\ \varepsilon_{\vec{k}\sigma}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i\varepsilon_{\vec{k}\sigma}^3 \\ i\varepsilon_{\vec{k}\sigma}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_j^{11}\varepsilon_{\vec{k}\sigma}^1 + s_j^{12}\varepsilon_{\vec{k}\sigma}^2 + s_j^{13}\varepsilon_{\vec{k}\sigma}^3 \\ s_j^{21}\varepsilon_{\vec{k}\sigma}^1 + s_j^{22}\varepsilon_{\vec{k}\sigma}^2 + s_j^{23}\varepsilon_{\vec{k}\sigma}^3 \\ s_j^{31}\varepsilon_{\vec{k}\sigma}^1 + s_j^{32}\varepsilon_{\vec{k}\sigma}^2 + s_j^{33}\varepsilon_{\vec{k}\sigma}^3 \end{pmatrix}$$

由此式便确定了算符  $\hat{s}_1$  的矩阵元:

$$\hat{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1.61)$$

当  $j=2, 3$  时, 利用式 (6.1.60) 并重复上述之推算可得

$$\hat{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1.62)$$

以上三式相加可得

$$\hat{s}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.1.63)$$

算符  $\hat{s}^2$  的矩阵形式表明光子自旋为 1。

若场  $A_\mu(x)$  绕  $z$  轴转动  $\gamma$ , 则场点  $x$  转到  $x'$ , 有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

类似的, 场绕  $x$  轴转  $\alpha$  角和绕  $y$  轴转动  $\beta$  角的转动矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

一般的转动矩阵是上述三个矩阵的积。采用符号  $(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = (\alpha, \beta, \gamma)$ , 则当  $\theta^i$  为无限小时, 一般转动矩阵可以写成

$$(a^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & -\theta^3 & \theta^2 \\ \theta^3 & 1 & -\theta^1 \\ -\theta^2 & \theta^1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - i\mathbf{J}_k \theta^k = e^{-i\mathbf{J}_k \theta^k} \quad (6.1.64)$$

其中  $\mathbf{J}_i$  是下列矩阵

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

它们是生成三维坐标空间的转动算符,  $\mathbf{J}_i = \hat{\mathbf{s}}_i$ 。

在纵横坐标系里, 自旋第三分量算符  $\hat{s}_3$  与螺旋度算符  $h$  一致

$$\hat{s}_3 = \hat{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}3} = \hat{\mathbf{s}} \cdot \frac{\vec{k}}{|\mathbf{k}|} = h \quad (6.1.65)$$

因光子的静止质量为零, 采用  $h$  的本征值来表写来描写自旋态具有 Lorentz 不变性。要注意的是: 由于光子静止质量为零, 光子的自旋角动量和轨道角动量都存在于同一个 Minkowski 空间内, 不存在另外的“自旋空间”。

光子的极化态: 在纵横坐标系里,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}3}$  具有如下表示

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^0 = e^3 \quad (6.1.66)$$

因此,  $h \boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}3}$  描写了  $h=0$  的极化态。由此可知  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}$  ( $\lambda=1,2$ ) 应分别是  $h=\pm 1$  的极化态。利用本征值方程  $h\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\vec{k}1} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\vec{k}1}$ ,  $h\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\vec{k}2} = -\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\vec{k}2}$  以及正交归一条件 (6.1.49),

不难得到:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^1 + ie^2) = e^+; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^1 - ie^2) = e^- \quad (6.1.67)$$

右旋圆极化态                      左旋圆极化态

由于横向条件  $h\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\vec{k}3} = 0$ , 因而  $h=0$ , 纵向极化态自动被排除掉, 光子只具有两种横向极化态。上式给出的是在与  $\vec{k}$  垂直的平面波内的两种圆极化态。

这三个本征态的物理<sup>①</sup>, 可以从一个简单的例子来看。设有一沿  $\mathbf{k} // \boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}3}$  方向传播的矢量简谐波, 则可以用这三个本征矢量来展开

$$\mathbf{A}(\vec{x}, t) = (a_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}1} + a_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}2} + a_3 \boldsymbol{\varepsilon}_{\vec{k}3}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = (a_+ e^+ + a_- e^- + a_0 e^0) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{z})} \quad (6.1.68)$$

从  $e^+$  的展开式 (6.1.67) 可以看出, 它在  $e^2$  方向振动的相位比在  $e^1$  方向落后  $\pi/2$ , 时在  $(x, y)$  平面逆时针旋转的单位矢量。而在沿着  $z$  轴的传播方向, 相位随着传播距离  $z$  的增加线性的减小。所以,  $\mathbf{J}_z$  在传播方向投影  $s=+1$  的  $a_+$  分量是右旋波。同样  $s=-1$  的  $a_-$  分量是左旋波,  $s=0$  的  $a_0$  分量是纵波。

① 王正行 编著, 简明量子场论, 北京大学出版社, 2008 年 4 月第一版, p32.

3. 光子的质量

光子是没有静质量的，表现为纯动量形式。但这并不意味着光子没有重量。虽然光子是动量线结构，光子动量线在内禀空间区域内具有形变。而任何形变都会对背景时空场产生一个小的影响，使背景时空场发生非常微小的形变，而这种形变场（即弯曲时空）就是引力场。由于背景时空场发生的弯曲非常微小，对于光子内禀空间内外的时空几乎无影响。对于真空场理论有这样的结论：所有的量子真空场形变都会对背景时空场产生影响，这种影响与量子场形变大小严格成正比；并与量子场形变的形式和结构无关。换言之，所有的能量都有重量，尤其是，光子也有重量。

$$\begin{aligned} h &= p \cdot \Phi = E \cdot \Phi_0 \\ m_\gamma &= E/c^2 \end{aligned} \tag{6.1.69}$$

$m_\gamma$  就是光子的动质量。可见波长越短，质量越大。

6.1.8 光子波粒二象性的物理图像

现在从真空场的角度来看这个问题，已经知道了光子波粒二象性的成因，假设光子在沿  $\vec{r}$  方向传播时，受到扰动后在垂直于传播方向  $\vec{r}$  的方向上做简谐振动，光子中心点的运动轨迹变成余弦（或正弦）曲线。在波峰处（正负波峰）光子中心点的传播线速度最慢，而在过  $\vec{r}$  轴时，光子中心点传播的线速度最快。从统计的角度看，在波峰处几率最大，而在  $\vec{r}$  轴上，几率最小。

现在具体看一下光子的单缝衍射。在  $A$  上有一条缝，缝的大小和光子的振幅大致接近便能形成扰动，如图 6.1.16 所示的缝 I（先不考虑缝 II）。在  $A$  之前，假设所有光子的动量和能量均相等，虽然每个光子的动量（表现为传播速度）均相等，都在沿与传播方向垂直的方向做简谐振动，但由于相位不同，所以不可能形成条纹。经过  $A$  时，缝 I 对光子给予了一个新的扰动，而这种扰动的位置对于所有的光子均相同，光子从  $A$  的缝 I 出来后，获得了统一的相位。另外，光子在受到扰动后，改变了原有的运动方向，由于能量低，所以这种扰动是弹性的，不改变原有光子的动量，仅改变方向。于是经过  $A$  缝 I 的衍射后，在屏  $B$  上就形成了光子的单缝干涉条纹。缝本身就是一个扰动源，缝的宽度越窄，则光子发生弹性形变越大，扰动越强烈，相应散射的角度越宽。

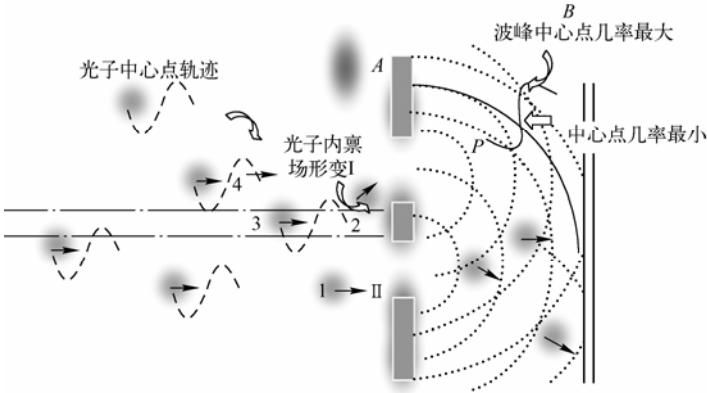


图 6.1.16 光子波粒二象性的真空场本质

在图 6.1.16 中,  $A$  左侧画的是光子的示意图, 虚线圆环表示光子的内禀空间, 而虚线的正弦曲线表示光子中心的轨迹。在  $A$  和  $B$  之间我们可用几率的形式来表示出来, 在波峰(粗虚线)处, 几率最大, 其中只画了一点  $P$ , 用内禀空间和轨道示意图表示, 可以看出波峰的位置用粗虚线表示, 几率最大, 而在细虚线处几率最小。

在上面所表述的波粒二象性中, 还要特别注意光子扰动源的问题, 考虑双缝干涉。如图 6.1.16 所示, 对于双缝的虚线部分是对光子实际产生干涉的真空场。波动特性是由存在内禀场决定的。光子并非点, 光子内禀真空场和双缝虚线部分的真空场接触以后, 光子内禀真空场发生形变, 光子真空场 2 的光子中心点有可能进入缝 I 或缝 II, 具体光子中心点进入哪条缝则要视光子形变的情况而定。光子具有了可选择性, 换言之, 在图 6.1.16 中, 区域  $\Delta$  内的光子能感知存在双缝。区域  $\Delta$  内的光子具有可选择性, 可选择性使得双缝干涉和单缝干涉大不相同, 形成双缝特有的干涉条纹。要注意的是在整个过程中, 光子真空场都是一体的。在通过双缝时, 从双缝出来的真空场会发生干涉, 这种双缝干涉是光子特有的可选择性造成的。在整个干涉过程中, 光子中心点并没有发生分裂, 光子中心点被限制在光子内禀真空场内, 因而真空场的扰动使光子中心点的位置发生改变, 光子中心点可能从任何一条缝中通过。从双缝屏  $A$  出来之后, 所汇合成的完整光子在未受到新扰动之前永远带有被干涉之后的波动特性, 如果该光子能沿原路径丝毫不差地返回, 可以恢复到未干涉前的状态, 只是运动方向相反。换言之, 满足时间反演。扰动源的存在使光子中心点受到扰动, 光子便改变了原来的运动方向。对于光子来说单缝只有一个扰动源, 则只改变运动方向、角度和相位。这种差别使单缝衍射和双缝衍射明显不同, 做双缝衍射实验时, 如果每次过一个光子, 只开放一条缝, 则始终只有一个扰动源, 光子不存在可选择性, 双缝衍射的条件被破坏, 干涉条纹消失。

由此, 从真空场的性质出发, 理解了波粒二象性的本质。

光子的波动性是光子本身所具有的特性, 因而用单一光子进行衍射和用许多光子同时进行, 得到的干涉图样都是一致的。

光子本身中心点具有严格而清晰的传播轨迹, 所以爱因斯坦是对的。如果能知道内禀真空场和背景真空场的所有边界条件, 就能精确地确定光子中心的位置和速度, 其轨迹由波函数(横波)准确描述。但光子中心点的轨迹却无法测量, 因而边界条件永远是未知的。因为我们用于感知世界的最精细的手段和工具, 在接触到所测光子时, 光子中心点的位置受到了致命的扰动, 使我们根本无法知道光子中心点的轨迹, 而且永远也找不到比光子更精巧的工具。只好用统计的方式来表示光子行为, 所以玻尔也是正确的。被测粒子存在轨道, 若不进行测量我们对粒子处于无知的状态, 而测量粒子的本身使我们虽然知道了  $t$  时刻粒子的位置, 但测量扰动使我们对粒子的去向变得一无所知, 这样便处于一种两难的境地。于是就把测量空间变得无限大, 在一个足够大的区间中找到粒子的几率必定是 1, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1 \tag{6.1.70}$$

积分区  $\int_{-\infty}^{\infty}$  是这种两难境地的表述形式。

## 6.2 电磁场理论

电磁场是无质量的矢量场，它描述自旋为1的光子。通常，矢量场用四分量的场来协变描述，而实验观测表明电磁场只有两个横向自由度。这种场变量个数大于独立自由度数的情形必然导致存在附加的约束条件（即 Lorentz 条件）来消除多余的自由度，这给电磁场的协变量子化带来一定的困难。

光子的产生在真空场中被理解为真空场基本单元的移动所产生的效应。真空  $x^i(\lambda)$  的某一点  $\lambda_0 = 0$ ，对应最简单的点就是真空场  $\Phi_0$ ，产生形变  $\varepsilon_\mu = ik_\mu$ ， $x^\mu(0) = \Phi_0 = 1$ ，则有：

$$x^\mu(0 + \varepsilon) = \Phi = \exp(ik_\mu x^\mu)x(0) = \exp(ik_\mu x^\mu)$$

这种最简单的量子场波函数  $\Phi$  就是光子的简化波函数  $A$ （即电磁波  $A$ ），从这个角度可以认为真空场的某点移动  $ik_\mu$  后的效应就是一个单光子。量子场的波函数可以通过点的移动得到量子场的基本结构形式，而量子场的内禀结构需要从真空场的性质得到。

### 6.2.1 电磁场的协变形式和Lorentz条件

光子具有纤维结构，由电力线构成，这种电力线就是电磁场，光子的电磁场之间的关系由下列麦克斯韦方程组描写：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (6.2.1)$$

电场和磁场之间的关系为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A^0 \quad (6.2.2)$$

$A^\mu(x)$  为电磁势四矢量，定义四维势  $\{A^\mu\} = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\underbrace{A^0}_{\text{标势}}, \underbrace{\bar{\mathbf{A}}}_{\text{矢势}})$ ，是场基本单元的四维移动形成的。写成明显协变的形式为

$$\mathbf{A} = (A^\mu) = (A^0, \mathbf{A}) \quad (6.2.3)$$

电磁场  $A^\mu$  构成的电磁空间的曲率为  $F^{\mu\nu}$ （反对称二阶张量）：

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (6.2.4)$$

利用式（6.2.3）容易验证  $F^{\mu\nu}$  的非零分量相应于  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$ ：

$$F^{0i} = -\mathbf{E}, \quad F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} \mathbf{B}^k \quad (6.2.5)$$

其中  $\varepsilon^{ijk} \equiv \varepsilon_{ijk}$  是全反对称符号，具有  $\varepsilon^{123} = \varepsilon_{123} = 1$ 。因此  $F^{\mu\nu}$  被称为电磁场张量。利用  $F^{\mu\nu}$ ，式（6.2.1）的前两个方程是自动满足的，而后两个方程可以结合成下列协变形式：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (6.2.6)$$

所以方程（6.2.6）或（6.2.1）就构成了自由电磁场方程的协变形式。

需要注意的是，电磁势式（6.2.2）虽然通过式（6.2.3）规定了电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{B}$ ，但不

是唯一的。在  $A^\mu$  的下列“规范变换”下，

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (\chi \text{ 是任意标量函数}) \quad (6.2.7)$$

$E$  和  $B$  应保持不变。这种不变性称为电磁场的规范不变性。它等效于电磁场张量  $F^{\mu\nu}$  在电磁势的规范变换 (6.2.7) 下是不变的。

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \chi) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu \chi) \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu \partial^\mu \chi = F^{\mu\nu} + (\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu) \chi = F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

把式 (6.2.4) 代入式 (6.2.6)，可得到

$$\square A^\nu + \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0 \quad (6.2.9)$$

利用式 (6.2.7)，选取特殊的  $\chi$ ，使  $A^\mu$  满足所谓的 Lorentz 规范条件。

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial A^0}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (6.2.10)$$

光子纵波的性质决定了存在上述规范条件。在这种规范下，式 (6.2.9) 变为

$$\square A^\mu = 0 \quad (6.2.11)$$

因此，在 Lorentz 条件下自由电磁场满足 K-G 方程，式 (6.1.36) 即

$$\vec{A}_l(x) = \sum_{k,\lambda=1}^2 \left( a_{k\lambda} A_{k\lambda}^{(+)}(x) + a_{k\lambda}^* A_{k\lambda}^{(-)}(x) \right) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\vec{k}\lambda} (a_{\vec{k}\lambda} e^{-ik \cdot x} + \bar{a}_{\vec{k}\lambda} e^{ik \cdot x})$$

就是它的一个特解。由电磁场的纤维结构可以得到麦克斯韦方程，结合 Lorentz 规范条件，并满足 K-G 方程，得到其特解  $\vec{A}_l(x)$ ，它描述了光子的横波特性。

## 6.2.2 Coulomb规范量子化电磁场

爱因斯坦在 20 世纪初就提出了光的量子假设：频率为  $\omega$  的电磁波同时又是许多能量为  $\hbar\omega$  的光子。这得到实验的肯定。这个光的量子假设可以直接由真空场基本学元位移构成光子得到。问题是应当怎样从理论上反映电磁波的粒子性？该问题要从场二次量子化来解决。

### 1. 经典电磁谐振子

把经典电磁波分解为许多不同频率、不同波矢的单色平面波，并把每一个平面波  $(\mathbf{k}, \omega_k)$  视为一个电磁谐振子。

为了突出物理内容<sup>①</sup>，采用 Coulomb 规范（没有非物理自由度）。

引入归一化体积  $V = l^3$ ，并假定场在  $V$  的边界面上满足周期边界条件，故波矢  $\mathbf{k}$  的各分量取如下分立值：

$$k_j = \frac{2\pi}{l} n_j, \quad j=1, 2, 3 \quad (6.2.12)$$

这样，场方程  $\square A^\mu(x) = 0$  的解可表示为平面波解的叠加级数和：

$$A^\mu(x, t) = \sum_{\mathbf{k}} \{ c_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + c_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \} \quad (6.2.13)$$

① 该小节为了强调物理内容在 Pauli 度规下讨论。

$\mathbf{c}_k(t)$  是横向矢量, 与  $\mathbf{k}$  正交, 即  $(\mathbf{k}, \omega_k)$  的振动量。把此式代入 (6.2.11):

$$\square \mathbf{A}'(x) = \left( \nabla^2 - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}'(x) = \sum_k \left\{ \underbrace{\left( \nabla^2 - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{c}_k(t) e^{i\mathbf{k}x}}_{(a)} + \underbrace{\left( \nabla^2 - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{c}_k^*(t) e^{-i\mathbf{k}x}}_{(b)} \right\}$$

花括号中的 (a) 和 (b) 两项分别为 0, 所以:

$$-|\mathbf{k}|^2 \mathbf{c}_k(t) e^{i\mathbf{k}x} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{c}}_k(t) e^{i\mathbf{k}x} = 0$$

$$-|\mathbf{k}|^2 \mathbf{c}_k^*(t) e^{-i\mathbf{k}x} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{c}}_k^*(t) e^{-i\mathbf{k}x} = 0$$

即

$$\ddot{\mathbf{c}}_k(t) e^{i\mathbf{k}x} + \omega_k^2 \mathbf{c}_k(t) e^{i\mathbf{k}x} = 0 \quad (6.2.14a)$$

$$\ddot{\mathbf{c}}_k^*(t) e^{-i\mathbf{k}x} + \omega_k^2 \mathbf{c}_k^*(t) e^{-i\mathbf{k}x} = 0 \quad (6.2.14b)$$

$$\omega_k = c|\mathbf{k}| \quad (6.2.15)$$

这里  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}$ , 式 (6.2.14) 就是平面波  $(\vec{k}, \omega_k)$  振动的运动方程式, 它与力学谐振子的运动方程  $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$  十分相似。因此, 把每一个平面波视为一个经典电磁谐振子  $(\vec{k}, \omega_k)$ 。由式 (6.2.14) 易得:

$$\vec{c}_{\vec{k}}(t) = \vec{c}_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t} \quad (6.2.16a)$$

$$\vec{c}_{\vec{k}}^*(t) = \vec{c}_{\vec{k}}^* e^{i\omega_k t} \quad (6.2.16b)$$

对应  $x(t) = x_0 e^{-i\omega_k t}$ 。

(1) 电磁场能量

在归一化体积  $V$  中的电磁场能量为  $E$ ,

$$E = \frac{1}{2} \int_V (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) dV = H \quad (\text{哈密顿量}) \quad (6.2.17)$$

现在要用  $\vec{c}_{\vec{k}}(t)$ ,  $\vec{c}_{\vec{k}}^*(t)$  来表示能量  $E$  (即  $H$ ), 方法如下。

① 把  $\vec{A}'(\mathbf{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \{ \vec{c}_{\vec{k}}(t) e^{i\mathbf{k}x} + \vec{c}_{\vec{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}x} \}$  代入以下两式:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \quad (\text{库仑规范 } A_0 = t) \quad (6.2.18a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' \quad (6.2.18b)$$

② 把式 (6.2.18) 代入式 (6.2.17), 并注意:

$$\nabla \times \vec{c}_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (6.2.19a)$$

$$\nabla \cdot \vec{c}_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (\text{由横场条件 } \nabla \cdot \mathbf{A}'(t) = 0 \text{ 可得}) \quad (6.2.19b)$$

$$[\vec{k} \times \vec{c}_{\vec{k}}(t)] \cdot [\vec{k} \times \vec{c}_{\vec{k}}(t)] = |\vec{k}|^2 |\vec{c}_{\vec{k}}(t)|^2 \quad (6.2.19c)$$



$$\left. \begin{aligned} \int e^{\pm i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} dV &= V\delta_{\vec{k}',-\vec{k}} \\ \int e^{\pm i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} dV &= V\delta_{\vec{k}',\vec{k}} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.19d)$$

结果是在归一化体积  $V$  中的电磁场能为

$$H = 2V \sum_{\vec{k}} |\vec{k}|^2 \vec{c}_{\vec{k}}^*(t) \cdot \vec{c}_{\vec{k}}(t) \quad (6.2.20)$$

谐振子  $(\vec{k}, \omega_k)$  的能量是

$$H_{\vec{k}} = 2V |\vec{k}|^2 \vec{c}_{\vec{k}}^*(t) \cdot \vec{c}_{\vec{k}}(t) \quad (6.2.21)$$

(2) 正则形式

既然把每一个谐振子  $(\vec{k}, \omega_k)$  视为一个经典电磁谐振子，就可把它的运动方程式 (6.2.14b) 纳入正则形式。设正则坐标为  $\vec{Q}_{\vec{k}}(t)$ ，正则动量为  $\vec{P}_{\vec{k}}(t)$ ，则其哈密顿量为

$$H_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \left( |\vec{P}_{\vec{k}}(t)|^2 + \omega_k^2 |\vec{Q}_{\vec{k}}(t)|^2 \right) = E_k \quad (6.2.22)$$

正则运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{Q}}_{\vec{k}}(t) &= \frac{\partial H_{\vec{k}}}{\partial \vec{P}_{\vec{k}}} \\ \dot{\vec{P}}_{\vec{k}}(t) &= -\frac{\partial H_{\vec{k}}}{\partial \vec{Q}_{\vec{k}}} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.23)$$

把式 (6.2.22) 代入式 (6.2.23)，并注意在 Coulomb 规范下，电磁场是实场，只有一套自由度（只有一种光子），因而在求式 (6.2.23) 左边的导数时可把  $\vec{Q}_{\vec{k}}^*(t)$ ， $\vec{P}_{\vec{k}}^*(t)$  与  $\vec{Q}_{\vec{k}}(t)$ ， $\vec{P}_{\vec{k}}(t)$  视为同一。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{Q}}_{\vec{k}}(t) &= \vec{P}_{\vec{k}}(t) \\ \dot{\vec{P}}_{\vec{k}}(t) &= -\omega_k^2 \vec{Q}_{\vec{k}}(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.2.24)$$

把上式再对  $t$  微分一次，

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\vec{Q}}_{\vec{k}}(t) &= \dot{\vec{P}}_{\vec{k}}(t) = -\omega_k^2 \vec{Q}_{\vec{k}}(t) \\ \ddot{\vec{P}}_{\vec{k}}(t) &= -\omega_k^2 \dot{\vec{Q}}_{\vec{k}}(t) = -\omega_k^2 \vec{P}_{\vec{k}}(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.2.25)$$

将此式与式 (6.2.14) 即  $\ddot{\vec{c}}_{\vec{k}}(t) = -\omega_k^2 \vec{c}_{\vec{k}}(t)$  比较可知， $\vec{P}_{\vec{k}}(t)$ ， $\vec{Q}_{\vec{k}}(t)$  与  $\vec{c}_{\vec{k}}(t)$  满足相同的运动方程式，故必有以下线性关系：

$$\vec{c}_{\vec{k}}(t) = A\vec{P}_{\vec{k}}(t) + B\vec{Q}_{\vec{k}}(t) \quad (6.2.26)$$

为了确定  $A, B$ ，把上式代入式 (6.2.21)：

$$\begin{aligned} H_{\vec{k}} &= 2V |\vec{k}|^2 \vec{c}_{\vec{k}}^*(t) \cdot \vec{c}_{\vec{k}}(t) = 2V |\vec{k}|^2 \left( A^* \vec{P}_{\vec{k}}^*(t) + B^* \vec{Q}_{\vec{k}}^*(t) \right) \left( A \vec{P}_{\vec{k}}(t) + B \vec{Q}_{\vec{k}}(t) \right) \\ &= 2V |\vec{k}|^2 \left[ A^* A |\vec{P}_{\vec{k}}(t)|^2 + B^* B |\vec{Q}_{\vec{k}}^*(t)|^2 + A^* B \vec{P}_{\vec{k}}^*(t) \vec{Q}_{\vec{k}}(t) + B^* A \vec{Q}_{\vec{k}}^*(t) \vec{P}_{\vec{k}}(t) \right] \end{aligned}$$

由式 (6.2.22)  $H_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \left( |\vec{P}_{\vec{k}}(t)|^2 + \omega_k^2 |\vec{Q}_{\vec{k}}(t)|^2 \right)$  知：

$$A^*A = \frac{1}{4V|\vec{k}|^2} \quad (6.2.27a)$$

$$B^*B = \frac{\omega_k^2}{4V|\vec{k}|^2} \quad (6.2.27b)$$

$$A^*B\vec{P}_{\vec{k}}^*(t)\vec{Q}_{\vec{k}}(t) + B^*A\vec{Q}_{\vec{k}}^*(t)\vec{P}_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (6.2.27c)$$

$\vec{P}_{\vec{k}}^*(t)$  与  $\vec{P}_{\vec{k}}(t)$ ,  $\vec{Q}_{\vec{k}}^*(t)$  与  $\vec{Q}_{\vec{k}}(t)$  可视为同一, 由此可得

$$\vec{P}_{\vec{k}}^*(t)\vec{Q}_{\vec{k}}(t) = \vec{Q}_{\vec{k}}^*(t)\vec{P}_{\vec{k}}(t)$$

所以式 (6.2.27c) 简化为

$$A^*B + B^*A = 0 \quad (6.2.28)$$

根据式 (6.2.27a), 可取

$$A = \frac{-i}{2|\vec{k}|\sqrt{V}} \quad (6.2.29)$$

把式 (6.2.29) 代入式 (6.2.28) 得

$$\frac{-i}{2|\vec{k}|\sqrt{V}}B + B^*\frac{i}{2|\vec{k}|\sqrt{V}} = 0$$

即

$$B^* = B \quad (6.2.30)$$

$$B^*B = \frac{\omega_k^2}{4V|\vec{k}|^2}$$

根据上式, 可得

$$B = \frac{\omega_k}{4V|\vec{k}|\sqrt{V}} = \frac{c|\vec{k}|}{4V|\vec{k}|\sqrt{V}} \quad (6.2.31)$$

把式 (6.2.29)、式 (6.2.31) 代入式 (6.2.26) 即  $\vec{c}_{\vec{k}}(t) = A\vec{P}_{\vec{k}}(t) + B\vec{Q}_{\vec{k}}(t)$ , 得

$$\left. \begin{aligned} \vec{c}_{\vec{k}}(t) &= \frac{i}{2|\vec{k}|\sqrt{V}} \left( \vec{P}_{\vec{k}}(t) - ic|\vec{k}|\vec{Q}_{\vec{k}}(t) \right) \\ \vec{c}_{\vec{k}}^*(t) &= \frac{-i}{2|\vec{k}|\sqrt{V}} \left( \vec{P}_{\vec{k}}^*(t) + ic|\vec{k}|\vec{Q}_{\vec{k}}^*(t) \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.2.32)$$

以常数振幅作为正则变数。

由方程 (6.2.25) 即  $\ddot{\vec{Q}}_{\vec{k}}(t) = -\omega_k^2\vec{Q}_{\vec{k}}(t)$ ;  $\ddot{\vec{P}}_{\vec{k}}(t) = -\omega_k^2\vec{P}_{\vec{k}}(t)$ , 可得

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}_{\vec{k}}(t) &= \vec{P}_{\vec{k}}(t)e^{-i\omega_k t} \\ \vec{Q}_{\vec{k}}(t) &= \vec{Q}_{\vec{k}}(t)e^{-i\omega_k t} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.33)$$

与  $c_k(t) = -\omega_k^2 c_k(t)$  形式一致。故式 (6.2.32) 成为常数振幅之间的关系。

$$\left. \begin{aligned} \vec{c}_{\vec{k}} &= \frac{i}{2|\vec{k}|\sqrt{V}} \left( \vec{P}_{\vec{k}} - ic|\vec{k}|\vec{Q}_{\vec{k}} \right) \\ \vec{c}_{\vec{k}}^* &= \frac{-i}{2|\vec{k}|\sqrt{V}} \left( \vec{P}_{\vec{k}}^* + ic|\vec{k}|\vec{Q}_{\vec{k}}^* \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.2.34)$$

式 (6.2.22) 即  $H_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \left( |\vec{P}_{\vec{k}}(t)|^2 + \omega_k^2 |\vec{Q}_{\vec{k}}(t)|^2 \right) = E_k$ , 现写为

$$H_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \left( |\vec{P}_{\vec{k}}|^2 + \omega_k^2 |\vec{Q}_{\vec{k}}|^2 \right) = E_k \quad (6.2.35)$$

↑ 实矢模方 ↑

以上表明, 可用  $\vec{Q}_{\vec{k}}$  与  $\vec{P}_{\vec{k}}$  代替  $\vec{Q}_{\vec{k}}(t)$  与  $\vec{P}_{\vec{k}}(t)$  作为经典电磁谐振子的正则变数。

## 2. 一维电磁谐振子

电磁谐振子  $(\vec{k}, \omega_k)$  在与  $\vec{k}$  正交的平面内振动 (回忆  $\vec{k} \cdot \vec{c}_{\vec{k}}(t) = 0$ ),

它是一个二维谐振子, 如图 6.2.1 所示。现把它分解为两个一维谐振子:

$$(\vec{k}, \omega_k, \lambda), \quad \lambda = 1, 2 \quad (6.2.36)$$

$\lambda$  为 2 表示电磁波的两横向偏振, 即光子的两个激化方向。

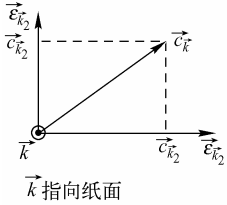


图 6.2.1 二维谐振子

$$\vec{c}_{\vec{k}} = \sum_{\lambda=1}^2 c_{\vec{k}\lambda} \vec{e}_{\vec{k}\lambda} \quad (6.2.37)$$

运动方程 (6.2.14) 分解为两个一维谐振子的运动方程, 那么  $\ddot{\vec{c}}_{\vec{k}}(t) + \omega_k^2 \vec{c}_{\vec{k}}(t) = 0$  分解为两个方程:

$$\ddot{\vec{c}}_{\vec{k}\lambda}(t) + \omega_k^2 \vec{c}_{\vec{k}\lambda}(t) = 0, \quad \lambda = 1, 2 \quad (6.2.38)$$

解为

$$\vec{c}_{\vec{k}\lambda}(t) = \vec{c}_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega_k t}, \quad \lambda = 1, 2 \quad (6.2.39)$$

因为  $\vec{c}_{\vec{k}\lambda}(t) = \vec{c}_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega_k t}$  且  $H_{\vec{k}} = 2V |\vec{k}|^2 \vec{c}_{\vec{k}}^*(t) \cdot \vec{c}_{\vec{k}}(t)$ ,  $H = \sum_{\vec{k}} H_{\vec{k}}$ , 故

$$H = 2V \sum_{\vec{k}} |\vec{k}|^2 \vec{c}_{\vec{k}}^* \cdot \vec{c}_{\vec{k}} \quad (6.2.40)$$

把分解式 (6.2.37) 代入上式:

$$H = 2V \sum_{\vec{k}} |\vec{k}|^2 \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \vec{c}_{\vec{k}\lambda}^* \vec{e}_{\vec{k}\lambda} \cdot \vec{c}_{\vec{k}\lambda'} \vec{e}_{\vec{k}\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} = 2V \sum_{\vec{k}} |\vec{k}|^2 \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \vec{c}_{\vec{k}\lambda}^* \vec{c}_{\vec{k}\lambda} \quad (6.2.41)$$

其中,

$$H_{\vec{k}\lambda} = 2V |\vec{k}|^2 \vec{c}_{\vec{k}\lambda}^* \vec{c}_{\vec{k}\lambda}, \quad \lambda = 1, 2 \quad (6.2.42)$$

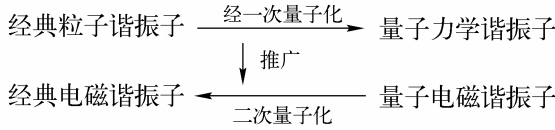
或者  $H_{\vec{k}\lambda} = \frac{1}{2} (\vec{P}_{\vec{k}\lambda}^2 + \omega_k^2 \vec{Q}_{\vec{k}\lambda}^2) = E_{\vec{k}\lambda}$ ,  $H_{\vec{k}\lambda}$  是一维谐振子的哈密顿量。现在可由式 (6.2.34) 写出  $\vec{c}_{\vec{k}}$  与  $\vec{p}_{\vec{k}}$ ,  $\vec{Q}_{\vec{k}}$  的线性关系式:

$$c_{\vec{k}\lambda} = \frac{i}{2|\vec{k}|\sqrt{V}} (P_{\vec{k}\lambda} - ic|\vec{k}|Q_{\vec{k}\lambda}), \quad \lambda = 1, 2 \quad (6.2.43a)$$

$$c_{\vec{k}\lambda}^* = \frac{-i}{2|\vec{k}|\sqrt{V}} (P_{\vec{k}\lambda} + ic|\vec{k}|Q_{\vec{k}\lambda}), \quad \lambda = 1, 2 \quad (6.2.43b)$$

## 3. 量子电磁谐振子 (二次量子化)

电磁波的运动与经典粒子的运动完全不同, 经典电磁谐振子与经典力学谐振子物理本质完全不同, 但仍进行如下推广:



二次量子化是一次量子化向波动领域的推广。二次量子化的目的是希望通过二次量子化所得到的量子电磁谐振子能够显示电磁波的粒子性。

类比于一次量子化，二次量子化的步骤如下。

① 正则量用算符表示：

$$\text{相当于 } x \Leftrightarrow Q_{\vec{k}\lambda} \rightarrow \hat{Q}_{\vec{k}\lambda} = Q_{\vec{k}\lambda}; \text{ 对应于 } \Leftrightarrow \hat{x} \quad (6.2.44a)$$

$$\text{相当于 } p_x \Leftrightarrow P_{\vec{k}\lambda} \rightarrow \hat{P}_{\vec{k}\lambda} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial Q_{\vec{k}\lambda}}; \text{ 对应于 } \Leftrightarrow \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (6.2.44b)$$

② 设量子电磁谐振子的状态要用“波函数”  $\Phi_{k\lambda}(Q_{k\lambda})$  (对应  $\Psi_n(x)$ ) 来描写。

③ 算符  $\hat{Q}_{k\lambda}$ ,  $\hat{P}_{k\lambda}$  要满足如下对易关系：

$$[\hat{Q}_{\vec{k}\lambda}, \hat{P}_{\vec{k}'\lambda'}] = i\hbar \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}, \text{ 对应于 } \Leftrightarrow [\hat{x}_\alpha, \hat{p}_x] = i\hbar \delta_{\alpha\beta} \quad (6.2.45a)$$

$$[\hat{Q}_{\vec{k}\lambda}, \hat{Q}_{\vec{k}'\lambda'}] = [\hat{P}_{\vec{k}\lambda}, \hat{P}_{\vec{k}'\lambda'}] = 0 \quad (6.2.45b)$$

④ 定态方程及其解 (经典电磁振子已成为量子电磁振子  $(\vec{k}, \omega_k, \lambda)$ ) 如下。

$$\text{由 } H_{\vec{k}\lambda} = \frac{1}{2}(\hat{P}_{\vec{k}\lambda}^2 + \omega_k^2 \hat{Q}_{\vec{k}\lambda}^2), \text{ 对应于经典谐振子 } H = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{m} + \mu\omega^2 x^2\right)$$

得

$$H_{\vec{k}\lambda} = \frac{1}{2}\left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dQ_{\vec{k}\lambda}^2} + \omega_k^2 Q_{\vec{k}\lambda}^2\right), \text{ 对应于经典谐振子 } H = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p}^2}{m} + \mu\omega^2 \hat{x}^2\right) \quad (6.2.46)$$

借用 QM (量子力学) 里一维谐振子的已知结果，直接写出一维量子电磁谐振子  $(\vec{k}, \omega_k, \lambda)$  的定态 Schödinger 方程式：

$$\begin{aligned}
 &\left(-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2\right) \psi_n(x) = E_n \psi_n(x) \\
 &\quad \quad \quad \uparrow \\
 &\frac{1}{2}\left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dQ_{\vec{k}\lambda}^2} + \omega_k^2 Q_{\vec{k}\lambda}^2\right) \Phi_{\vec{k}\lambda}(Q_{\vec{k}\lambda}) = E_{\vec{k}\lambda} \Phi_{\vec{k}\lambda}(Q_{\vec{k}\lambda}), \quad \lambda=1, 2 \quad (6.2.47)
 \end{aligned}$$

根据 QM 里一维谐振子问题的结果可直接写出定态方程 (6.2.47) 的如下本征解：

$$\Phi_{\vec{k}\lambda}^{(n)}(Q_{\vec{k}\lambda}) = N_n e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) \quad (6.2.48a)$$

量子电磁谐振子  $(\vec{k}, \omega_k, \lambda)$  的能量为

$$E_{\vec{k}\lambda}^{(n)} = \left(n_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_k \quad (6.2.48b)$$

$$n_{\vec{k}\lambda} = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad N_n = \left(\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha = \left(\frac{\omega_k}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \xi = \alpha Q_{\vec{k}\lambda}$$

整个归一化体积  $V$  的电磁场能量为

$$E = \sum_{\vec{k}, \lambda=1}^2 \left( n_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_k \quad (6.2.49)$$

至此，二次量子化完成。

#### 4. 对二次量子化结果的解释

式 (6.2.48b) 采用如下的新解释：经由二次量子化所得到的能量子  $\hbar \omega_k$  就是一个光子，而  $n_{\vec{k}\lambda}$  就是能量为  $\hbar \omega_k$ ，动量为  $\hbar \vec{k}$ ，极化为  $\lambda$  的光子数目。

采用这种观点，对电磁场的认识有了深化：宏观上看来是连续波动的电磁场，在其微观结构上既有波动性，又有粒子性。它是具有波粒二象性的微观体系，称为量子电磁场。

量子电磁场包含许多不同频率、不同波矢、不同偏振的谐波，其中每一谐波又是许多具有一定能量、动量和极化的光子。

#### 5. 算符和态矢

##### (1) 引入算符概念

首先， $\hat{Q}_{\vec{k}\lambda}$  和  $\hat{P}_{\vec{k}\lambda}$  是量子电磁谐振子的正则坐标算符和正则动量算符，故  $c_{\vec{k}\lambda}$  和  $c_{\vec{k}\lambda}^+$  也是算符，式 (6.2.43) 应改为

$$c_{\vec{k}\lambda} = \frac{i}{2|\vec{k}|\sqrt{V}} (\hat{P}_{\vec{k}\lambda} - ic|\vec{k}|\hat{Q}_{\vec{k}\lambda}) \quad (6.2.50a)$$

$$c_{\vec{k}\lambda}^+ = \frac{-i}{2|\vec{k}|\sqrt{V}} (\hat{P}_{\vec{k}\lambda} + ic|\vec{k}|\hat{Q}_{\vec{k}\lambda}) \quad (6.2.50b)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{\vec{k}\lambda} &= \frac{\sqrt{2V|\vec{k}|}}{\sqrt{c\hbar}} c_{\vec{k}\lambda} \\ a_{\vec{k}\lambda}^+ &= \frac{\sqrt{2V|\vec{k}|}}{\sqrt{c\hbar}} c_{\vec{k}\lambda}^+ \end{aligned} \right\} \quad (6.2.51)$$

则式 (6.2.50) 成为

$$a_{\vec{k}\lambda} = \frac{i}{\sqrt{2c\hbar|\vec{k}|}} (\hat{P}_{\vec{k}\lambda} - ic|\vec{k}|\hat{Q}_{\vec{k}\lambda}) \quad (6.2.52a)$$

$$a_{\vec{k}\lambda}^+ = \frac{-i}{\sqrt{2c\hbar|\vec{k}|}} (\hat{P}_{\vec{k}\lambda} + ic|\vec{k}|\hat{Q}_{\vec{k}\lambda}) \quad (6.2.52b)$$

所以，

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}^+] &= \frac{1}{2c\hbar\sqrt{|\vec{k}||\vec{k}'|}} [\hat{P}_{\vec{k}\lambda} - ic|\vec{k}|\hat{Q}_{\vec{k}\lambda}, \hat{P}_{\vec{k}'\lambda'} + ic|\vec{k}'|\hat{Q}_{\vec{k}'\lambda'}] \\ &= \frac{1}{2c\hbar\sqrt{|\vec{k}||\vec{k}'|}} \{ -ic|\vec{k}| [\hat{Q}_{\vec{k}\lambda}, \hat{P}_{\vec{k}'\lambda'}] - ic|\vec{k}'| [\hat{Q}_{\vec{k}'\lambda'}, \hat{P}_{\vec{k}\lambda}] \} \\ &= \frac{1}{2c\hbar\sqrt{|\vec{k}||\vec{k}'|}} \{ c\hbar|\vec{k}| \delta_{\vec{k}',\vec{k}} \delta_{\lambda',\lambda} + c\hbar|\vec{k}'| \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'} \} \end{aligned}$$

当  $\vec{k}' \neq \vec{k}$  时, 上式右边为 0, 故可令  $|\vec{k}'| = |\vec{k}|$ , 这样, 上式成为

$$[a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}^+] = \delta_{\vec{k}', \vec{k}} \delta_{\lambda', \lambda} \quad (6.2.53a)$$

同法可得

$$[a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}^+] = [a_{\vec{k}\lambda}^+, a_{\vec{k}'\lambda'}^+] = 0 \quad (6.2.53b)$$

式 (6.2.53) 是算符  $a_{\vec{k}\lambda}$ ,  $a_{\vec{k}\lambda}^+$  所满足的对易关系式。这两个算符是二次量子化后场系统特有的。

(2) 用  $a_{\vec{k}\lambda}$ ,  $a_{\vec{k}\lambda}^+$  表示  $H$

$$H_{\vec{k}\lambda} = \frac{1}{2} (P_{\vec{k}\lambda}^2 + \omega_k^2 Q_{\vec{k}\lambda}^2) \quad (6.2.54)$$

表示为算符

$$H_{\vec{k}\lambda} = \frac{1}{2} (\hat{P}_{\vec{k}\lambda}^2 + \omega_k^2 \hat{Q}_{\vec{k}\lambda}^2) \quad (6.2.55)$$

把式 (6.2.52a) 与式 (6.2.52b) 相加, 可得

$$\hat{Q}_{\vec{k}\lambda} = \sqrt{\frac{\hbar}{2c|\vec{k}|}} (a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda}^+) \quad (6.2.56)$$

由式 (6.2.52a) 减式 (6.2.52b), 又得

$$\hat{P}_{\vec{k}\lambda} = -i\sqrt{\frac{c\hbar|\vec{k}|}{2}} (a_{\vec{k}\lambda} - a_{\vec{k}\lambda}^+) \quad (6.2.57)$$

把式 (6.2.56)、式 (6.2.57) 代入式 (6.2.55), 得

$$\begin{aligned} H_{\vec{k}\lambda} &= \frac{\omega_k = c|\vec{k}|}{2} \left\{ -\frac{\hbar\omega_k}{2} (a_{\vec{k}\lambda} - a_{\vec{k}\lambda}^+) (a_{\vec{k}\lambda} - a_{\vec{k}\lambda}^+) + \frac{\hbar\omega_k}{2} (a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda}^+) (a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda}^+) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \hbar\omega_k \left\{ \frac{1}{2} (a_{\vec{k}\lambda}^2 + (a_{\vec{k}\lambda}^+)^2 - a_{\vec{k}\lambda}^+ a_{\vec{k}\lambda} - a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}^+) + \frac{1}{2} (a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda}^+) (a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda}^+) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \hbar\omega_k \frac{1}{2} \left\{ -a_{\vec{k}\lambda}^2 - (a_{\vec{k}\lambda}^+)^2 + a_{\vec{k}\lambda}^+ a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}^+ + a_{\vec{k}\lambda}^2 + (a_{\vec{k}\lambda}^+)^2 + a_{\vec{k}\lambda}^+ a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}^+ \right\} \\ &= \frac{1}{4} (a_{\vec{k}\lambda}^+ a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}^+ + a_{\vec{k}\lambda}^+ a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}^+) \hbar\omega_k = \frac{1}{2} (a_{\vec{k}\lambda}^+ a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}^+) \hbar\omega_k \\ &\stackrel{\text{对易关系}}{=} \left( a_{\vec{k}\lambda}^+ a_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_k \quad (6.2.58) \end{aligned}$$

因此, 在归一化体积  $V$  中的电磁场的哈密顿算符为

$$H = \sum_{\vec{k}\lambda} H_{\vec{k}\lambda} = \sum_{\vec{k}\lambda} \left( a_{\vec{k}\lambda}^+ a_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_k \quad (6.2.59)$$

(3) 量子电磁场的场算符

已知  $\vec{A}'(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \{ \vec{c}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \vec{c}_{\vec{k}}^+(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \}$  二次量子化后是算符, 即式 (6.2.13)。又

$\vec{c}_{\vec{k}}(t) = \vec{c}_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t}$  是算符, 即式 (6.2.16), 故

$$\vec{A}'(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \left\{ \vec{c}_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} + \vec{c}_{\vec{k}}^+ e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} \right\}$$

把  $\bar{c}_{\vec{k}}(t) = \sum_{\lambda=1}^2 c_{\vec{k}\lambda} \bar{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}$  代入上式得

$$\vec{A}'(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda=1}^2 \bar{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \left\{ \bar{c}_{\vec{k}\lambda} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} + \bar{c}_{\vec{k}\lambda}^+ e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} \right\}$$

又由式 (6.2.51) 得

$$\left. \begin{aligned} c_{\vec{k}\lambda} &= \sqrt{\frac{c\hbar}{2|\vec{k}|V}} a_{\vec{k}\lambda} \\ c_{\vec{k}\lambda}^+ &= \sqrt{\frac{c\hbar}{2|\vec{k}|V}} a_{\vec{k}\lambda}^+ \end{aligned} \right\} \quad (6.2.60)$$

故量子场的场算符为

$$\vec{A}'(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda=1}^2 \sqrt{\frac{c\hbar}{2|\vec{k}|V}} \bar{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda} \left\{ a_{\vec{k}\lambda} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} + a_{\vec{k}\lambda}^+ e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} \right\} \quad (6.2.61)$$

(4) 量子场的态矢

量子电磁场的每一谐振自由度  $(\vec{k}, \omega_k, \lambda)$  的态矢函数是  $\Phi_{\vec{k}\lambda}(Q_{\vec{k}\lambda})$ ，它不再是 QM 波函数 (非几率幅)。

当量子场的某一谐波  $(\vec{k}, \omega_k, \lambda)$  处于状态  $\Phi_{\vec{k}\lambda}^{(n)}(Q_{\vec{k}\lambda})$  时，其能量为

$$E_{\vec{k}\lambda}^{(n)} = \left( n_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_k$$

该谐波有  $n_{\vec{k}\lambda}$  个能量为  $\hbar \omega_k$ ，动量为  $\hbar \vec{k}$ ，极化为  $\lambda$  的光子。这里  $n_{\vec{k}\lambda}$  个光子完全决定了谐波  $(\vec{k}, \omega_k, \lambda)$  的状态，因此，就用右矢  $|n_{\vec{k}\lambda}\rangle$  来描写该波矢的状态。

整个量子电磁场的态矢量是

$$\prod_{\vec{k}} \prod_{\lambda=1}^2 |n_{\vec{k}\lambda}\rangle, \text{ 光子间无相互作用} \quad (6.2.62)$$

相应的场能是

$$E = \sum_{\vec{k}, \lambda} \left( n_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_k \quad (6.2.63)$$

特别是当量子场处于基态 (真空态)

$$|0\rangle = \prod_{\vec{k}} |0_{\vec{k}1}\rangle |0_{\vec{k}2}\rangle \quad (6.2.64)$$

时，光子数为  $n_{\vec{k}\lambda} = 0$ ，波动停止了，但量子场仍然存在，并有

$$E_0 = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k \rightarrow \infty \quad (6.2.65)$$

微观上无光子的情况相当于无电磁波的情况；经典电动力学观点认为无电磁波的空间一无所有。

量子场论观点认为无电磁波的空间仍然存在量子电磁场，只是这时的场处于真空态。因为  $E_0$  不可测，故人们令  $E_0 = 0$ ，相当于把真空视为零背景，一切物理过程和物理测量均在此背景中进行。

## (5) 粒子数算符

谐波  $(\vec{k}, \omega_k, \lambda)$  的哈密顿算符为  $H_{\vec{k}\lambda} = \left(a_{\vec{k}\lambda}^+ a_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_k$ ，即式 (6.2.58)。当它处于态  $|n_{\vec{k}\lambda}\rangle$  时，能量为  $E_{\vec{k}\lambda}^{(n)}$ ，故有本征值方程：

$$H_{\vec{k}\lambda} |n_{\vec{k}\lambda}\rangle = E_{\vec{k}\lambda}^{(n)} |n_{\vec{k}\lambda}\rangle$$

即

$$\begin{aligned} \left(a_{\vec{k}\lambda}^+ a_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_k |n_{\vec{k}\lambda}\rangle &= \left(n_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_k |n_{\vec{k}\lambda}\rangle \Rightarrow \\ a_{\vec{k}\lambda}^+ a_{\vec{k}\lambda} |n_{\vec{k}\lambda}\rangle &= n_{\vec{k}\lambda} |n_{\vec{k}\lambda}\rangle \end{aligned} \quad (6.2.66)$$

因此，厄密算符

$$N_{\vec{k}\lambda} = a_{\vec{k}\lambda}^+ a_{\vec{k}\lambda} \quad (6.2.67)$$

是量子场的粒子数算符，它的本征值是具有  $(\vec{k}, \omega_k, \lambda)$  的光子数目  $n_{\vec{k}\lambda}$ 。在粒子数表象（以  $\{|n_{\vec{k}\lambda}\rangle\}$  为基的表象）中有

$$N_{\vec{k}\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (6.2.68)$$

## (6) 光子产生、湮灭算符

利用  $a_{\vec{k}\lambda}$ ， $a_{\vec{k}\lambda}^+$  的对易关系式 (6.2.53)，使用和第3章相同的方法可证明， $a_{\vec{k}\lambda}$  是光子的

湮灭算符， $a_{\vec{k}\lambda}^+$  是光子的产生算符，即

$$N_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} |n_{\vec{k}\lambda}\rangle = (n_{\vec{k}\lambda} - 1) a_{\vec{k}\lambda} |n_{\vec{k}\lambda}\rangle \quad (6.2.69a)$$

$$N_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}^+ |n_{\vec{k}\lambda}\rangle = (n_{\vec{k}\lambda} + 1) a_{\vec{k}\lambda}^+ |n_{\vec{k}\lambda}\rangle \quad (6.2.69b)$$

$$a_{\vec{k}\lambda} |n_{\vec{k}\lambda}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}\lambda}} |n_{\vec{k}\lambda} - 1\rangle \quad (6.2.70a)$$

$$a_{\vec{k}\lambda}^+ |n_{\vec{k}\lambda}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k}\lambda} + 1} |n_{\vec{k}\lambda} + 1\rangle \quad (6.2.70b)$$

实际上， $a_{\vec{k}\lambda}(t) = a_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega_k t}$ ， $a_{\vec{k}\lambda}^+(t) = a_{\vec{k}\lambda}^+ e^{i\omega_k t}$  才是湮灭、产生算符，为简单才用  $a_{\vec{k}\lambda}$ ， $a_{\vec{k}\lambda}^+$  代之。

这里对电磁场进行二次量子化，由于电磁波传播速度为  $c$ ，故这里的二次量子化理论属于相对论性量子场论的范畴，在相对论领域，存在粒子产生、湮灭的现象。

那么，粒子从何产生？湮灭向何处？由式 (6.2.70) 可得

$$a_{\vec{k}\lambda} |0_{\vec{k}\lambda}\rangle = |1_{\vec{k}\lambda}\rangle, \text{ 粒子由真空产生} \quad (6.2.71a)$$

$$a_{\vec{k}\lambda} |1_{\vec{k}\lambda}\rangle = |0_{\vec{k}\lambda}\rangle, \text{ 粒子消失到真空中去} \quad (6.2.71b)$$

$$a_{\vec{k}\lambda} |0_{\vec{k}\lambda}\rangle = 0, \text{ 真空不可能再消失} \quad (6.2.72)$$



### 6.2.3 Lorentz规范量子化

电磁场的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (6.2.73)$$

那么由定义得场的正则共轲动量为

$$\begin{aligned} \pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \dot{A}_\mu} F^{\rho\sigma} \right) F_{\rho\sigma} + F^{\rho\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{A}_\mu} F_{\rho\sigma} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial \partial_0 A_\mu} = -\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial (\partial_0 A_\mu)} (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \\ &= -\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial (\partial_0 A_\mu)} (\partial_0 A_\mu g_\rho^\mu g_\sigma^\mu - \partial_0 A_\mu g_\rho^\mu g_\sigma^0) = -\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} (g_\rho^0 g_\sigma^\mu - g_\rho^\mu g_\sigma^0) \\ &= -\frac{1}{2} (F^{0\mu} - F^{\mu 0}) = -F^{0\mu} \end{aligned} \quad (6.2.74)$$

由此, 得到

$$\begin{aligned} \pi^0 &= -F^{00} = 0 \\ [A^0(t, x), \pi^0(t, x')] &= 0 \end{aligned}$$

这将与按通常方式确定的对易关系

$$[A^0(t, x), \pi^0(t, x')] = i\delta^3(x - x') \neq 0 \quad (6.2.75)$$

相矛盾。因此从经典电动力学出发来对电磁场进行量子化有困难。

从真空场的角度来看, 静态电磁场是纤维场, 存在于整个空间中。对于荷电粒子而言, 两粒子之间可以通过静电场实现相互作用; 另一种是通过交换光子来实现耦合。两者是完全等价的, 如图 6.2.2 所示。这为电磁场量子化提供了物理图像。

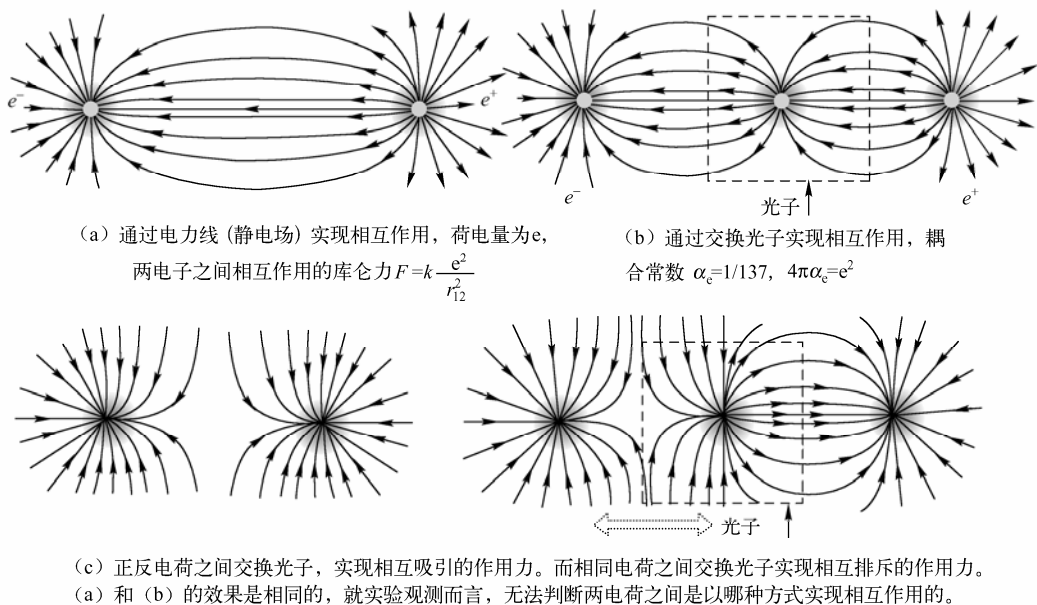


图 6.2.2 经典电磁场和量子电磁场的区别

电磁场满足规范不变性。 $A^\mu$  满足 Lorentz 规范条件下的电磁场方程为  $\square A^\mu = 0$ 。广义坐标和广义动量分别是  $A_\mu$  和  $\partial_\nu A_\mu$ ，进行变分得

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta J = \int_{\Omega} dx^4 (\square A^\mu) \delta A^\mu = \int_{\Omega} dx^4 [(-\partial^\nu A^\mu) \partial_\nu (\delta A^\mu)] \\
 &= \int_{\Omega} dx^4 \left[ -\frac{1}{2} \delta (\partial^\nu A^\mu) \partial_\nu A^\mu - \frac{1}{2} (\partial^\nu A^\mu) \delta (\partial_\nu A^\mu) \right] \\
 &= \delta \int_{\Omega} dx^4 \left( -\frac{1}{2} \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A^\mu \right) \\
 \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu)
 \end{aligned} \tag{6.2.76}$$

上式满足量子化场（光子）的拉氏量密度的表达式。该式描述的就是光子的  $\mathcal{L}$  量，式（6.2.73）描述的就是电磁场的  $\mathcal{L}$  量，两者是不同的。利用上式，按定义求得正则共轭动量为

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\dot{A}_\mu \tag{6.2.77}$$

于是正则量子化条件可规定为下列等时对易关系：

$$\begin{cases} [A_\mu(t, x), \dot{A}_\nu(t, x')] = -i g_{\mu\nu} \delta^3(x - x') \\ [A_\mu(t, x), A_\nu(t, x')] = [\dot{A}_\mu(t, x), \dot{A}_\nu(t, x')] = 0 \end{cases} \tag{6.2.78}$$

然而，进一步考虑发现问题并没有完全解决，原因是量子化以后，洛伦兹条件式（6.2.10）通常将变为算符等式，于是有

$$\chi \equiv \partial_\mu A^\mu = \dot{A}_0 + \nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{6.2.79}$$

这导致下列矛盾：

$$0 = [\chi(t, x), A^0(t, x')] = [\dot{A}^0(t, x), A^0(t, x')] = i \delta^3(x - x') \neq 0 \tag{6.2.80}$$

这表明不能简单地把经典的 Lorentz 条件对应为量子的算符等式。

导致这一矛盾的原因是将光子视为一个点，没有考虑光子的内禀结构。 $\chi \equiv \partial_\mu A^\mu = 0$  表述了光子内部空间纵波的性质，但是纵波没有可观测性。考虑内禀空间后，可把式（6.2.80）重新写为

$$[\chi(t, \xi), A^0(t, \xi')] = [\dot{A}^0(t, \xi), A^0(t, \xi')] = i \delta^3(\xi - \xi') \neq 0$$

把内禀空间对于纵波换到时空自由度空间，加入  $\theta$  函数，得

$$\theta(x - R) [\dot{A}^0(t, x), A^0(t, x')] = 0, \text{ 当 } x \dots R \text{ 时} \tag{6.2.81}$$

内禀空间没有可观测性。

对实验观测而言，有物理意义的是算符的期望值。现在的理论做这样的假设，量子化后  $\partial_\mu A^\mu$  作为算符不等于零，但它对物理态  $|\varphi\rangle$  的期望值为零，即

$$\langle \varphi | \partial_\mu A^\mu | \varphi \rangle = 0 \tag{6.2.82}$$

这称为洛伦兹附加条件，它既克服了上述矛盾，又保留了洛伦兹条件的物理内容。式（6.2.81）解释了式（6.2.82）。

## 6.2.4 动量表象和粒子解释

### 1. 动量表象

电磁场的运动方程 (6.2.11) 相当于零质量的多分量标量场方程, 可类似于标量场情形把电磁场展开为

$$A^\mu(x) = \int d^3k [a^\mu(k)f_k(x) + a^{+\mu}(k)f_k^*(x)] \quad (6.2.83)$$

其中,  $f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^0}} e^{-ikx}$  满足正交归一性条件。考虑到光是横波 (其偏振平面与传播方向

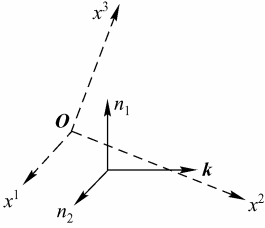


图 6.2.3 极化坐标系

向  $\mathbf{k}$  垂直), 即光是具有极化的。为了恰当地描述光的极化, 引进极化坐标系, 如图 6.2.3 所示, 极化坐标系  $(x^0, n_1, n_2, \bar{k})$  的第 3 轴为光的运动方向  $\mathbf{k}$ , 第  $O$  轴仍沿时间方向,  $n_1 \perp n_2$  在垂直于  $\mathbf{k}$  的平面上。极化四矢量  $\varepsilon_{(\sigma)}$  ( $\sigma = 0, 1, 2, 3$ ) 表示极化坐标系中 4 个极化方向的单位基矢量 (注意, 这里的指标  $\sigma$  仅识别极化方向, 并非洛伦兹指标, 无逆变, 协变之分, 故持别用括号括起来以示区别, 但重复指标求和规则依然执行), 定义为

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{(0)} = (\varepsilon_{(0)}^\mu) = (1, 0) = (1, 0, 0, 0) \text{ 标极化} \\ \varepsilon_{(1)} = (\varepsilon_{(1)}^\mu) = (0, n_1) = (0, 1, 0, 0) \\ \varepsilon_{(2)} = (\varepsilon_{(2)}^\mu) = (0, n_2) = (0, 0, 1, 0) \end{array} \right\} \text{ 横极化} \quad (6.2.84)$$

$$\varepsilon_{(3)} = (\varepsilon_{(3)}^\mu) = \left( 0, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right) = (0, 0, 0, 1) \text{ 纵极化}$$

它们满足正交性条件:

$$\varepsilon_{(\sigma)} \cdot \varepsilon_{(\lambda)} = \varepsilon_{(\sigma)}^\mu \varepsilon_{(\lambda)\mu} = g_{\mu\nu} \varepsilon_{(\sigma)}^\mu \varepsilon_{(\lambda)}^\nu = g_{\sigma\lambda} \quad (6.2.85)$$

完备性条件:

$$\varepsilon_{(\sigma)}^\mu \varepsilon_{(\lambda)}^\nu = \delta^{\mu\nu} \quad (6.2.86)$$

以及横向条件:

$$\vec{k} \cdot \varepsilon_{(1)} = \vec{k} \cdot \varepsilon_{(2)} = 0 \quad (6.2.87)$$

现在可以利用极化四矢量  $\varepsilon_{(\sigma)}$  把  $a_\mu(k)$  和  $a_\mu^+(k)$  展开为

$$a_\mu(k) = \varepsilon_{(\sigma)}^\mu a_{(\sigma)}(k), \quad a_\mu^+(k) = \varepsilon_{(\sigma)}^\mu a_{(\sigma)}^+(k) \quad (6.2.88)$$

于是, 式 (6.2.83) 变为

$$A^\mu(x) = \int d^3k k \varepsilon_{(\sigma)}^\mu [a_{(\sigma)}(k)f_k(x) + a_{(\sigma)}^+(k)f_k^*(x)] \quad (6.2.89)$$

利用式 (6.2.9) 和式 (6.2.85) 容易验证其逆展开为

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{(\sigma)}(k) = i \int d^3x k f_k^*(x) \vec{\partial}_0 A_\mu(x) \varepsilon_{(\sigma)}^\mu \\ a_{(\sigma)}^+(k) = -i \int d^3x k f_k(x) \vec{\partial}_0 A_\mu(x) \varepsilon_{(\sigma)}^\mu \end{array} \right. \quad (6.2.90)$$

与在式 (6.2.73) 中所做的完全类似, 可以证明  $a_{(\sigma)}(k)$  和  $a_{(\sigma)}^+(k)$  与时间无关。由此, 利

用式 (6.2.90) 和式 (6.2.78) 可得到动量表象的对易关系 (推导过程类似于式 (6.2.74)) 为

$$\begin{cases} [a_{(\sigma)}(k), a_{(\sigma)}^+(k')] = -g_{\sigma\sigma} \delta^3(k - k') \\ \text{其余对易子为零} \end{cases} \quad (6.2.91)$$

这里, 一个需要特别注意的特征是, 与标极化对应的零分量的对易关系中出现负号:

$$[a_{(0)}(k), a_{(0)}^+(k')] = -\delta^3(k - k') \quad (6.2.92)$$

在积分意义下(或分离形式), 也可表示为

$$[a_{(0)}(k), a_{(0)}^+(k)] = -1 \quad (6.2.93)$$

它所引起的后果将在下面多次提到。

把式 (6.2.89) 代入式 (6.2.68) 和式 (6.2.69), 经过一些代数运算后可得到电磁场的能量、动量在动量表象中的表达式, 统一表示成四矢量形式为

$$: p^\nu := \int d^3 k k^\nu [a_{(i)}^+(k) a_{(i)}(k) - a_{(0)}^+(k) a_{(0)}(k)] = -\delta^3(k - k') \quad (6.2.94)$$

初看之下, 能量似乎不是正定的。然而考虑到式 (6.2.93) 中的负号, 应定义粒子数密度算符为

$$N_{(\sigma)}(k) = \begin{cases} a_{(i)}^+(k) a_{(i)}(k), (i=1, 2, 3, \text{不对 } i \text{ 求和}) \\ -a_{(0)}^+(k) a_{(0)}(k) \end{cases} \quad (6.2.95)$$

这样有

$$\begin{aligned} N_{(0)}(k) a_{(0)}^+(k) |0\rangle &= -a_{(0)}^+(k) a_{(0)}(k) a_{(0)}^+(k) |0\rangle \stackrel{N|n\rangle=n|n\rangle}{=} -a_{(0)}^+(k) [a_{(0)}(k), a_{(0)}^+(k)] |0\rangle \\ &= a_{(0)}^+(k) |0\rangle \end{aligned} \quad (6.2.96)$$

得到的  $N_{(0)}(k)$  本征值为+1, 从而有

$$: p^\nu := \int d^3 k k^\nu \sum_{\sigma=0}^3 N_{(\sigma)}(k) \quad (6.2.97)$$

可见, 能量是正定的。

在式 (6.2.95) 下, 仍能求得 (类似于式 (3.2.22)):

$$\begin{cases} [N_{(\sigma)}(k), a_{(\sigma)}^+(k)] = a_{(\sigma)}^+(k), (\sigma=0, 1, 2, 3) \\ [N_{(\sigma)}(k), a_{(\sigma)}(k)] = -a_{(\sigma)}(k) \end{cases} \quad (6.2.98)$$

因此, 可以做如下解释:

$a_{(1)}(k), a_{(2)}(k)$  是动量为  $k$  的横光子湮灭算符;

$a_{(1)}^+(k), a_{(2)}^+(k)$  是动量为  $k$  的横光子产生算符;

$a_{(3)}(k), (a_{(3)}^+(k))$  是动量为  $k$  的纵光子湮灭 (产生) 算符;

$a_{(0)}(k), (a_{(0)}^+(k))$  是动量为  $k$  的标光子湮灭 (产生) 算符。

## 2. 不定度规与洛伦兹附加条件的作用

标光子的对易子是负的, 所引起的另一后果是导致在粒子态的希尔伯特空间 (福克空

间)中出现“负模态”,即

$$\begin{cases} \langle 1_0 | 1_0 \rangle = \langle 0 | a_{(0)}(k) a_{(0)}^+(k) | 0 \rangle = \langle 0 | [a_{(0)}(k), a_{(0)}^+(k)] | 0 \rangle = -1 \\ \langle 2_0 | 2_0 \rangle = \frac{1}{2!} \langle 0 | (a_{(0)}(k))^2 (a_{(0)}^+(k))^2 | 0 \rangle = \langle 0 | (a_{(0)}(k))^2 \sqrt{(1+0)(0+2)} | 0+2 \rangle = 1 \\ \dots\dots \\ \langle n_0 | n_0 \rangle = \frac{1}{n!} \langle 0 | (a_{(0)}(k))^n (a_{(0)}^+(k))^n | 0 \rangle = (-1)^n \end{cases} \quad (6.2.99)$$

这种情形通常称为不定度规(即希尔伯特空间中态矢的模方不是正定的)。这里,不定度规与标光子密切相关,也使哈密顿量对标光子态的平均值可正可负,即利用式(6.2.97),可得

$$\langle n_0(k) | H | n_0(k) \rangle = k^0 n_0(k) \langle n_0(k) | n_0(k) \rangle = (-1)^{n_0(k)} k^0 n_0(k) \quad (6.2.100)$$

这些使理论陷于严重困境。历史上,人们为此花费了大量精力和时间,最后发现了洛伦兹附加条件的重要作用,它既去掉了上述负度规效应,也去掉了多余的非物理自由度,使物理上出现的全是正定的标光子。

前面已提到,电磁场量子化后,洛伦兹条件不能简单地当作算符方程,而只要求对物理允许的态 $|\varphi\rangle$ ,其期望值为零[参见表达式(6.2.82)]。

$$\langle \varphi | \partial_\mu A^\mu | \varphi \rangle = 0$$

把 $\partial_\mu A^\mu$ 分解为正、负频部分:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu(x) &= -i \int d^3 k k_\sigma \varepsilon_{(\sigma)}^\mu [a_{(\sigma)}(k) f_k(x) - a_{(\sigma)}^+(k) f_k^*(x)] \\ &\equiv (\partial_\mu A^\mu)^{(+)} + (\partial_\mu A^\mu)^{(-)} \end{aligned} \quad (6.2.101)$$

容易看出

$$[(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}]^+ = (\partial_\mu A^\mu)^{(-)}$$

于是得到

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \partial_\mu A^\mu | \varphi \rangle &= \langle \varphi | (\partial_\mu A^\mu)^{(+)} | \varphi \rangle + \langle \varphi | (\partial_\mu A^\mu)^{(-)} | \varphi \rangle \\ &= \langle \varphi | (\partial_\mu A^\mu)^{(+)} | \varphi \rangle + \langle \varphi | [(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}]^+ | \varphi \rangle \\ &= \langle \varphi | (\partial_\mu A^\mu)^{(+)} | \varphi \rangle + \langle \varphi | (\partial_\mu A^\mu)^{(+)} | \varphi \rangle^* \end{aligned} \quad (6.2.102)$$

可见,要使式(6.2.82)成立,只要求

$$(\partial_\mu A^\mu)^{(+)} | \varphi \rangle = 0 \quad (6.2.103)$$

这立即导致

$$k_\mu \varepsilon_{(\sigma)}^\mu a_{(\sigma)}(k) | \varphi \rangle = 0 \quad (6.2.104)$$

利用 $\varepsilon_{(\sigma)}$ 的横向性条件式(6.2.87),上式变为

$$[k_\mu \varepsilon_{(0)}^\mu a_{(0)}(k) + k_\mu \varepsilon_{(3)}^\mu a_{(3)}(k)] | \varphi \rangle = 0 \quad (6.2.105)$$

注意到

$$k_\mu \varepsilon_{(0)}^\mu = -k_\mu \varepsilon_{(3)}^\mu$$

得到

$$[a_{(0)}(k) - a_{(3)}(k)]|\varphi\rangle = 0 \quad (6.2.106)$$

这表示物理态 $|0\rangle$ 是纵光子和标光子的满足上式的一种混合，仅有标光子的态不可能是物理态。因此，物理上既不可能出现负模态，也不可能出现负的能量平均值。又从式(6.2.106)可直接推得

$$\langle\varphi|a_{(0)}^+(k)a_{(0)}(k)|\varphi\rangle = \langle\varphi|a_{(0)}^+(k)a_{(3)}(k)|\varphi\rangle \quad (6.2.107)$$

由此可以看出，在式(6.2.94)中，对能量动量有贡献的只是物理的横光子，纵光子和标光子的贡献互相抵消。

### 3. 洛伦兹条件与规范不变性

在经典电理论中，Lorentz 条件是加于场的状态函数 $A_\mu(x)$ 的；而在二次量子化之后， $A_\mu(x)$ 是场算符，因此量子场的 Lorentz 条件应当是对场态矢量（物理态）所加的限制。Lorentz 条件改为

$$\partial_\mu A_\mu(x)|a\rangle = 0 \quad (6.2.108)$$

其中， $|a\rangle$ 是量子化电磁场的任意态矢量。但由于 $\partial_\mu A_\mu^{(-)}(x)|0\rangle \neq 0$ ，故真空态不满足式(6.2.108)。但真空态无疑是量子场的一个可以允许的状态（物理态），因此应将式(6.2.108)进一步修改为

$$\partial_\mu A_\mu^{(+)}(x)|a\rangle = 0 \quad (6.2.109)$$

此式就是量子电磁场应满足的洛伦兹条件。为了明确物理内容，需要把它转到动量空间。把式(6.2.83)的正频率部分代入上式得

$$\sum_{\lambda=1}^4 k \cdot \mathbf{e}_{k\lambda} a_{k\lambda} |a\rangle = 0 \quad (6.2.110)$$

因 $\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k}1} = \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k}2} = 0$ ，应有

$$k \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k}1} = k \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k}2} = 0$$

而且这一正交条件与参考系无关。式(6.2.110)简化为

$$\sum_{\lambda=3}^4 k \cdot \mathbf{e}_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} |a\rangle = 0$$

把式(6.2.84)代入上式，便可得到动量空间的洛伦兹条件：

$$(a_{\vec{k}3} - ia_{\vec{k}4})|a\rangle = 0, \quad (\text{对于任意的 } \vec{k}) \quad (6.2.111)$$

为了进一步看出这一条件对量子场态矢量提出怎样的物理限制，还需要进行如下的推算。

将上式取厄米共轭得

$$\langle a | (a_{\vec{k}3}^+ + ia_{\vec{k}4}^+) = 0 \quad (6.2.112)$$

以 $\langle a | (a_{\vec{k}3}^+ + ia_{\vec{k}4}^+)$ 左乘式(6.2.111)，再以 $(a_{\vec{k}3} - ia_{\vec{k}4})|a\rangle$ 右乘式(6.2.112)，然后将所得结果相加而得下式：

$$\langle a | \pi_{\vec{k}3} + \pi_{\vec{k}4} | a \rangle = 0, \quad (\text{对于任意的 } \vec{k}) \quad (6.2.113)$$

以模方  $\langle a|a \rangle$  除上式就得到洛伦兹条件对量子场态矢量所加的物理限制:

$$\langle \pi_{\vec{k}3} + \pi_{\vec{k}4} \rangle = \frac{\langle a | \pi_{\vec{k}3} + \pi_{\vec{k}4} | a \rangle}{\langle a | a \rangle} = 0 \quad (6.2.114)$$

此式的意思是对于量子场的任意一个物理态  $|a\rangle$  而言, 算符  $\pi_{\vec{k}3}$  和  $\pi_{\vec{k}4}$  的期望值或者等于大反号, 或者全都为零。因此, 洛伦兹条件限制量子场态矢量是希尔伯特空间的这样一些矢量: 在这些矢量所描写的状态下, 纵光子和时间光子对场的能量的贡献总和为零, 以致从物理观察的效果看来, 量子电磁场只有横光子而无纵光子和时间光子。

# 第 7 章 轻子的图像

由标准模型理论得知，构成宇宙万物最基本的粒子就是轻子和夸克。弄清轻子的结构至关重要，本章的目标是在真空场基础上建立符合现有理论及实验观测的粒子内禀结构图像。

目前的量子场理论因对其内禀结构的无知而把轻子和夸克视为点粒子，认为轻子为类点粒子，由  $e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  及其相应的反粒子构成。轻子自旋为  $\hbar/2$ ，不参加强作用力，其他力都参加。轻子分为两类： $e, \mu, \tau$  带单位电荷，存在静质量；中微子  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  不带电荷，其静止质量为零。反轻子为轻子的对偶粒子，有相反的电荷。轻子和反轻子的具体性质见表 7.0.1 和表 7.0.2。

表 7.0.1 轻子

电荷数	轻子数	自旋	I 代轻子	II 代轻子	III 代轻子	静质量
-1	1	$\hbar/2$	$e$	$\mu$	$\tau$	有
0	1	$\hbar/2$	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	无

表 7.0.2 反轻子

电荷数	轻子数	自旋	I 代轻子	II 代轻子	III 代轻子
+1	-1	$\hbar/2$	$e^+$	$\mu^+$	$\tau^+$
0	-1	$\hbar/2$	$\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_\tau$

本章的任务是由真空场的应变得得到电子的内禀结构图像，并由该模型解释轻子质量、电荷、自旋等内禀自由度，涉及以下几方面的内容：

- (1) 电子的形成和内禀结构；
- (2) 电力线的成因及电场和磁场的本质；
- (3) 从真空场的角度来理解电子自旋；
- (4) 从真空场的角度来理解质量的成因；
- (5) 电子的波粒二象性。

## 7.1 轻子的纤维结构

现在来看电子是如何从满足四条基本假设的真空中产生出来的。要实现这一过程，真空必须受到强扰动，电子才有可能被激发出来。

### 1. 电子 ( $e^-$ )

如图 7.1.1 所示，考虑真空场的区域 A 受到激发，有一场基本单元从原有的位置飞脱出来，并在原来的地方留下一个空穴，这样就会对周围的真空场产生影响。类似装满水的洗澡盆，当我们把底部的木塞突然拔掉而出现了一个空洞，会形成一个围绕空洞汇聚流动的漩



涡。于是周围的小的场基本单元就会自旋汇聚填充这个空穴，这种效应就产生了电子。把激发态场基本单元对周围场所造成的整个形变区域定义为电子的内禀空间，所产生的整体的效应称为电子。电子 $e^-$ 具有“自旋”、“汇”的结构。

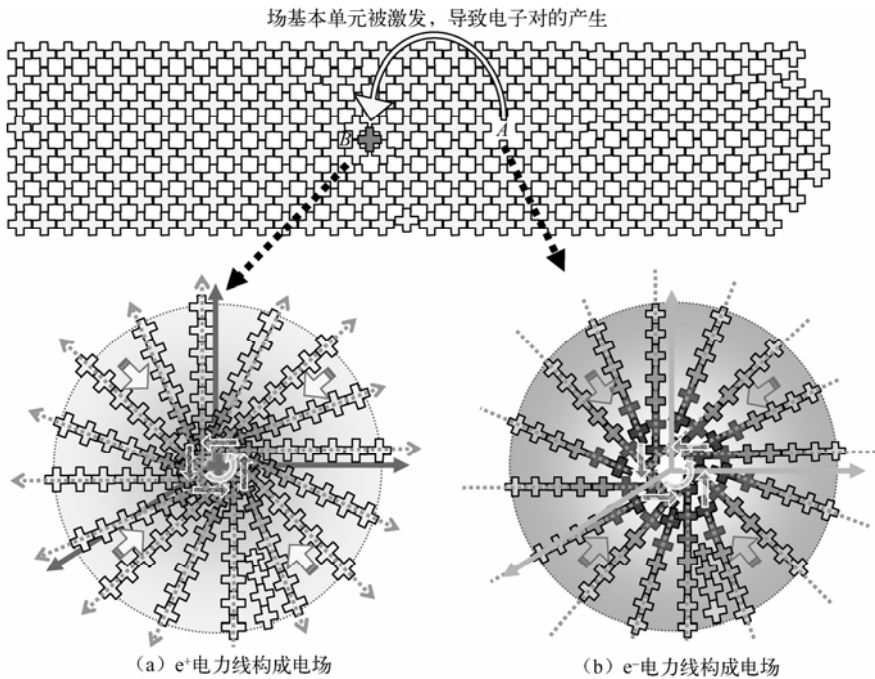


图 7.1.1 电子对的真空激发产生示意图

2. 正电子 ( $e^+$ )

如图 7.1.1 所示，真空场的区域 A 受到激发，一场基本单元从原有的位置飞脱出来，飞脱出来的场基本单元则又会压缩它周围的真空场，并产生具有反向自旋的源，形成反电子。正电子有“自旋”、“源”的结构。

7.1.1 单电子内禀场的应变

现在来讨论电子的情况，不考虑自旋效应。当真空场丢失一基本单元质时，则形成空穴，造成轻子中心附近的场形变，形变要分部分来考虑。

1.  $\vec{r}$  方向的应变

由于真空丢失一场基本单元，这种极度弯曲使真空场在沿  $\vec{r}$  方向达到压缩极限时，仍不能满足弯曲的曲率，于是便使真空产生间隙（这种间隙使电子具有纤维化的结构），真空场就会填充这部分场真空。指向空穴方向场基本单元的这个维度  $\xi^i$  就会向空穴方向发生一个微小的  $\varepsilon$  量移动，和其紧密相连的场基本单元也会发生  $\xi^i$  维的真空场向后移动一个小量，这样一直持续下去，所以这个维度的移动会延伸至无穷远，就在  $\xi^i$  方向上形成正电力线（如图 7.1.1 (a) 所示）。对于反电子（压缩），轻子场情况正好相反。正电子的中心多出一场基本单元，向外压缩形成正电力线（如图 7.1.1 (b) 所示）。在真空场里，电力线不再

是法拉第构想出来的图像，而是真实的物理实在。

## 2. $\theta$ , $\varphi$ 方向的应变

用球坐标系来讨论电子的形成，如图 7.1.2 (a) 所示，除了沿径向方向的形变之外，还存在沿  $\theta$ ,  $\varphi$  方向的应变。由第 1 章中 1.3 节真空场基本单元的静态分析可知，球对称中，径向  $r$  方向的形变  $\varepsilon_r$  和沿  $\theta$ ,  $\varphi$  方向的应变  $\varepsilon_\theta$  分别为<sup>①</sup>： $\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$ ,  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}$ ，剪应变项为 0，这里  $\xi^\mu = x^\mu$ ， $\theta$ ,  $\varphi$  方向的应变为  $\varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi$ 。电子对于间隙的填充效应使得沿  $\theta$ ,  $\varphi$  方向的应变  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi \rightarrow 0$ ，沿  $\theta$ ,  $\varphi$  方向的形变几乎为零，归根结底是由于真空具有颗粒结构造成的，这和连续介质是不同的。

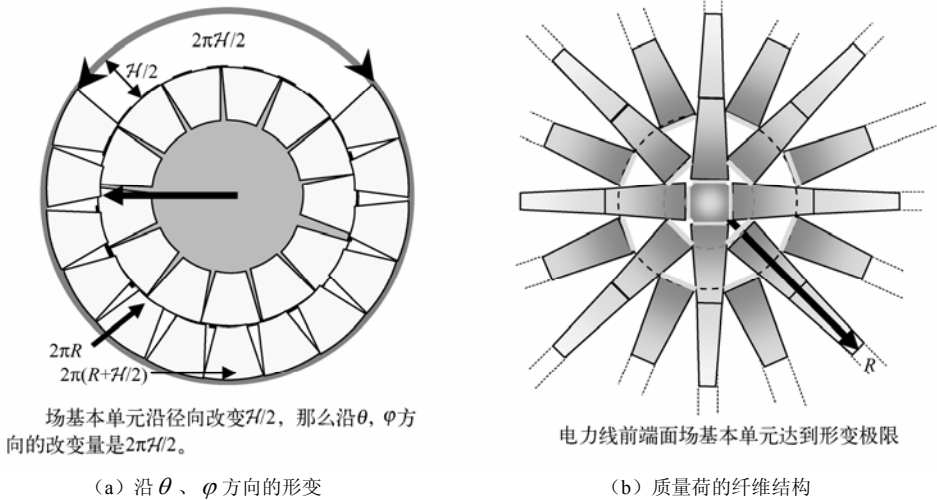


图 7.1.2 球坐标系中电子的形成示意图

在一个球坐标中，考虑一个半径为  $R$  的球体，沿径向膨胀了  $H/2$ ，那么球体的半径变为  $R + H/2$ ，球体短程线的长度由  $2\pi R$  变为  $2\pi(R + H/2)$ 。因场基本单元只有微弱的弹性，这样原来沿球体短程线需要  $2\pi R$  个场基本单元铺满，膨胀后则需要  $2\pi(R + H/2)$  个场基本单元才能铺满，就出现  $2\pi H/2$  个场基本单元空穴，需要新的场基本单元来填充，便出现裂纹，如图 7.1.2 (b) 所示。填充的总量是  $2\pi H/2$  个场基本单元。填充空穴的起始点处就是电力线（射线）的起始端点，该端点就是裂缝的起始点，沿  $\theta$ ,  $\varphi$  方向被拉出裂缝，该前端面处沿径向及  $\theta$ ,  $\varphi$  方向都达到拉伸极限。沿径向膨胀是由于受到一份场基本单元的挤压，那么场基本单元沿径向被挤压，而沿  $\theta$ ,  $\varphi$  方向被拉伸，电力线（正电荷电力线）前端的场基本单元达到了形变极限，这样的前端面就是构成质量荷的基本元素。沿径向膨胀这一情况对应于反轻子的情况。

当沿径向被拉伸  $H/2$ ，那么球体的半径变为  $R - H/2$ ，球体短程线的长度由  $2\pi R$  变为  $2\pi(R - H/2)$ 。因场基本单元只有微弱的弹性，这样原来沿球体短程线需要  $2\pi R$  个场基本单元铺满，收缩后则只需要  $2\pi(R - H/2)$  个场基本单元就能铺满，因此多出  $2\pi H/2$  个场基本单元。强烈的相互挤压超出了形变极限，便出现裂纹，挤压总量是  $2\pi H/2$  个场基本单元。该

① 徐秉业，刘信声. 应用弹性力学. 清华大学出版社，1995，p50.

端点就是裂缝的起始点，就是负电荷电力线（射线）的起始端点，沿  $\theta$ ， $\varphi$  方向被挤压，沿径向被拉伸。同样，该前端面处场基本单元沿径向及  $\theta$ ， $\varphi$  方向都达到拉伸极限。

对于代表每一个场基本单元的小立方体而言，形变导致由大正方体变为小正方体。形变满足  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ，主应变面的法线方向沿  $\vec{r}$ ，使得场基本单元的剪应变为 0。那么应变张量

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}}_{\text{静质量项}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{21} & 0 & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{自旋项}} \tag{7.1.1}$$

这里电力线的端点沿  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  维度方向都达到形变极限，这一效应也使得时间变满，时空总形变量是  $\mathcal{H}/2$ ，因而沿  $\theta$ ， $\varphi$  方向的形变都是相同的，与荷电轻子的类型无关。由此，我们可以简化处理，只考虑径向形变，而无须单独对沿  $\theta$ ， $\varphi$  方向进行研究。

7.1.2 单电子内禀场径向部分的形变

1. 电子内禀空间内单根电力线  $\xi^1$  轴位移函数

先来看一下轻子场  $\xi^1$  维的情况，如图 7.1.3 所示。如果把某一场基本单元，强加入另一维平直真空场中，则  $AB$  一维真空场由于失去一场基本单元，于是场的两边被  $\bar{O}$  点拉伸，而形成拉伸轻子场；在压缩区，由于强加入一场基本单元，真空场中的  $O$  点向两边压缩，形成压缩轻子场，这种场的形变不会破坏轻子中心区的场的维度性质。拉伸区也同样，在  $\bar{O}$  区域，真空场处于拉伸态，若  $AB$  点的距离再大，则轻子中心区会达到拉伸极限；在  $O$  区域，真空场则处于压缩态，若  $CD$  再靠近，则会达到压缩极限。

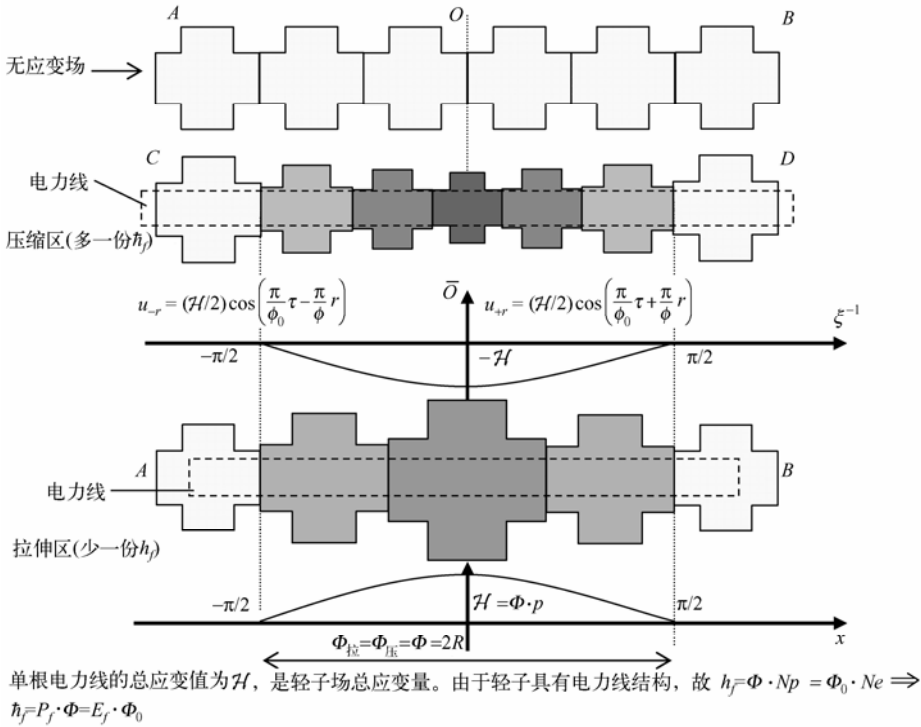


图 7.1.3 轻子场  $\xi^1$  维

## 2. 内禀场位移函数

由  $A$  至  $B$  称为拉伸轻子场的内禀直径，记为  $\Phi_{\text{拉}}$ ，类似于光子  $\xi^1$  维的拉伸区的情况  $A \cdot \bar{O} \cdot p = \mathcal{H}/2$ ，有  $\Phi_{\text{拉}} \cdot p = \mathcal{H}$ ，和拉伸区一样，对于压缩区来说，有  $\Phi_{\text{压}} \cdot p = \mathcal{H}$  而

$$\lim_{\mathcal{H} \rightarrow 0} (\Phi_{\text{拉}} - \mathcal{H}) = \lim_{\mathcal{H} \rightarrow 0} (\Phi_{\text{压}} + \mathcal{H}) = \Phi \quad (7.1.2)$$

上式考虑了维度移动的效应，对于压缩场，沿“汇”方向收缩  $\mathcal{H}$ ；对压缩场而言，则沿“源”的方向扩张  $\mathcal{H}$ 。由于  $\mathcal{H} \square \Phi$ （在其高能量情况下，该条件不满足），因此，对于拉伸区和压缩区均有

$$\Phi \cdot p = \mathcal{H} \quad (7.1.3)$$

我们可以画出真空场应变的示意图。这个示意图表示了真空场四维时空由平直态变为形变态的情况。

$$\xi^\mu \rightarrow \xi'^\mu$$

这里， $\xi^\mu$  为形变态真空场四维坐标架，真空场形变的位移分量为

$$u^\mu = \xi'^\mu - \xi^\mu$$

时间项：

$$u^0(\tau) = (\mathcal{H}/2) \cos\left(\frac{\pi}{\Phi_0} \xi^0\right) = (\mathcal{H}/2) \cos(k_0 \xi^0) \quad (7.1.4a)$$

空间项：

$$u(\vec{r}) = (\mathcal{H}/2) \cos\left(\frac{\pi}{\Phi} r\right) = (\mathcal{H}/2) \cos k(\xi^1 \mathbf{i} + \xi^2 \mathbf{j} + \xi^3 \mathbf{k}) \quad (7.1.4b)$$

采用闵氏空间度规，可统一写为

$$u^\mu(\xi) = (\mathcal{H}/2) \cos(k_0 \xi^0 - k_1 \xi^1 - k_2 \xi^2 - k_3 \xi^3) \quad (7.1.4c)$$

这里， $0 \leq \xi_0 \leq \Phi_0$ ； $0 \leq \xi_i \leq \Phi_i$ ， $i=1,2,3$ ； $k^\mu = \frac{\pi}{\Phi^\mu}$ ， $\mu=0,1,2,3$ 。把真空场形变的位移分量  $u_\mu(u_0, u_1, u_2, u_3)$  称为量子场的内禀场位移函数。

## 3. 内禀空间标架

对于内禀空间中的观测者而言，所有的应变都要产生波动，而所有的波动均以光速传播，因而内禀空间标架满足

$$(\mathrm{d}c\xi^0)^2 - (\mathrm{d}\xi^1)^2 - (\mathrm{d}\xi^2)^2 - (\mathrm{d}\xi^3)^2 = 0 \quad (7.1.5)$$

即  $\mathrm{d}s^2 = 0$ ，内禀空间处于光锥面上，其中  $\xi^0 = \tau$ 。

### 7.1.3 无自旋电子的纤维场的分区结构

电子完整的电力线表述包含内禀空间部分和内禀空间之外的电力线。内禀空间部分可以用轻子  $u^1$  来构造出轻子场，取  $\xi^1$  维的正半轴，在球坐标系中沿  $\varphi$  转  $2\pi$ ，然后再沿  $\theta$  转  $\pi$ ，这样便构成一个球体，这便是无自旋的轻子结构。

轻子由纤维场构成，这种纤维构成轻子的内禀场。内禀空间的纤维具有形变效应，定义内禀空间内具有形变效应的纤维为动量线。

考虑单一的一根纤维，这根电力线由以下三个区域构成。

## 1. 动量线生成区

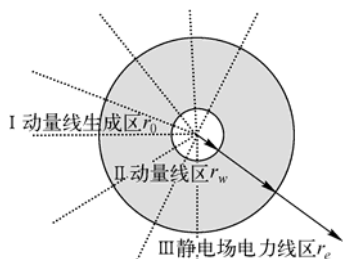


图 7.1.4 力线区域的划分

0 到  $r_0$ ，为动量线生成区，该区域就是后面提到的质量荷球体。生成区动量线数  $e(r) = k \cdot 4\pi r^2$ ，球面越小，则纤维数就越少，如图 7.1.4 所示，在这个小区域中，动量线形成。设力线的总数为  $e$ ，力线数正比于球面面积  $4\pi r^2$ 。当球面为  $4\pi r_0^2$  时，力线全部形成，共形成  $e$  根力线。单位球面积的穿过的力线数为常数，纤维的强度为

$$E = e \frac{4\pi r^2}{4\pi r_0^2} \vec{p} = e \frac{r^2}{r_0^2} \vec{p} \quad (7.1.6)$$

在纤维生成区中，当  $r \rightarrow 0$  时， $E \rightarrow 0$ 。和经典理论不一样， $E$  不是无穷大，而是随  $r$  也趋于 0。显然，库仑定律也只适用于  $r > r_0$  的范围。这里要注意的是， $r_0$  是一个极小的量，比内禀空间半径要小得多。从实验的角度来看，估计  $r_0 < 10^{-16} \text{cm}$ 。当  $r$  小于某一数值时，库仑定理将失效。

内禀空间内的纤维具有形变，纤维形变满足

$$u_\mu = (\mathcal{H}/2) \cos(k^\mu \xi_\mu)$$

考虑空间项。在一个封闭的球面 ( $4\pi r^2$ ) 内，单电子纤维总数为  $e$ ，则在动量场形成区域中，在  $r$  处穿过单位球面面积的动量线数构成了动量线强度。 $u_{0 \sim r_0}(r)/S_{\text{ball}}$  则构成动量场纤维生成区域的形变分布。

$$A_{0 \sim r_0} = \frac{u_{0 \sim r_0}(r)}{S_{\text{ball}}} = e \frac{r^2}{r_0^2} \frac{\mathcal{H}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\phi^\mu} r^\mu\right) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (7.1.7)$$

把场形变理解为轻子的内禀波函数， $e \frac{r^2}{r_0^2}$  为纤维生成区域波的振幅。

$u_\mu$  为电子单根形变力线，而  $\partial u_\mu / \partial \xi_\nu$  构成电子场的四动量纤维丛，形变区中电子的单根动量纤维为

$$p_\mu(\xi) = \frac{\partial u_\mu}{\partial \xi_\mu} = \frac{\mathcal{H}}{2} \frac{\pi}{\phi^\mu} \sin\left(\frac{\pi}{\phi^\mu} \xi_\mu\right) \quad (7.1.8)$$

该区域是轻子中心点达到场应变极限的区域，应变极限构成质量效应。该区域的分裂构成质量荷改变，并以弱相互作用表现出来。可以认为这个区域是弱作用空间。

## 2. 动量线区

$r_0$  到  $R$ ，为动量线区。在动量线区中，有  $e$  根纤维，总形变量为

$$u(\xi) = e u_\mu(\xi)$$

单位面积的动量线（形变纤维密度）为  $u_r(\xi)$ 。

$$u_{r_0 \sim R}(\xi) = \frac{u_{r_0 \sim R}(\xi)}{S_{\text{ball}}} = \frac{e}{4\pi r^2} \frac{\mathcal{H}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\phi_\mu} \xi_\mu\right) \quad (7.1.9)$$

下角标  $r_0 \sim R$  表示弱力区。

轻子的内禀动量线被封闭在半径为  $R$  的球体内。考虑整个球体，总形变为

$$u(\xi) = 4\pi r^2 \frac{e}{4\pi r^2} \frac{\mathcal{H}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\phi_\mu} \xi_\mu\right) = \frac{e\mathcal{H}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\phi_\mu} \xi_\mu\right) = h_f \cos k_\mu \xi_\mu$$

这就是我们所熟知的轻子内禀场的位移函数。

动量线是纤维，动量线除具有弱作用性质以外，动量线的纤维丛构成电力线，电力线是无限长的，可以被 Maxwell 方程描述。换言之，Maxwell 方程可以表述动量线形成区域以外的所有区域，即轻子内禀空间（动量线区域）和内禀空间以外的所有区域（宏观区域）的电磁场。

在三维球坐标中，三重积分  $I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta,\varphi)} F(r, \theta, \varphi) r^2 \sin\varphi dr$ ，半径  $r = r(\theta, \varphi)$  的应变变量是一个函数  $\frac{\partial u(r)}{\partial r} = \bar{p}_w = \frac{e\pi\mathcal{H}}{8\pi r^2 \phi} \sin\frac{\pi r}{\phi} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ ，是球对称的，与  $\theta, \varphi$  无关。轻子动量线区域的动量场四维总形变的形变率为

$$F(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial^2}{\partial r \partial \tau} = \frac{e\pi\mathcal{H}}{8\pi r^2 \phi} \cdot \frac{-\pi}{\phi_0} \sin\left(\frac{\pi r}{\phi} - \frac{\pi \tau}{\phi_0}\right)$$

时空形变总量  $h_f$  为

$$\begin{aligned} h_f &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\varphi \int_0^{R_0} d\tau \int_0^R \left( \frac{-e}{4\pi r^2} \frac{\mathcal{H}}{2} \frac{\pi}{\phi} \frac{\pi}{\phi_0} \cos\left(\frac{\pi r}{\phi} - \frac{\pi \tau}{\phi_0}\right) \right) r^2 dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\varphi \int_0^{R_0} \frac{-e}{4\pi} \frac{\mathcal{H}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi \tau}{\phi_0}\right) d\frac{\pi \tau}{\phi} = \frac{e\mathcal{H}}{2} \end{aligned}$$

可以得到

$$h_f = \frac{e\mathcal{H}}{2} \quad (7.1.10)$$

$h_f$  定义为有静质量轻子的场总应变变量，是一个常数，同时  $h_f$  也表征了场基本单元的大小。要特别说明的是有静质量费米子的场总应变变量  $h_f$  和光子的普朗克常数  $h$  是两个并不完全一致的概念， $h = \frac{1}{2} h_f$ 。要注意的是对于我们的实验来说，我们只能通过某种粒子，或者采用光子与靶粒子间的相互作用来判断靶粒子的静态四动量（静质量）及粒子的时空位置。而粒子传递动量总是通过交换玻色子来进行的。实验中动量传递只能在某一方向进行，不可能确定其靶粒子的内禀体积，因而  $h_f$  并不具有直接可观测效应。

### 3. 场基本单元的大小

现在来看一下场基本单元的大小。场基本单元是极其微小的，从上面轻子的形成来看，真空场基本单元的得失构成一对偶轻子（例如一对偶电子  $e^+, e^-$ ），轻子的场应变是限制在内禀空间的（考虑拉伸态轻子出现一基本单元空穴），并且最终场应变几乎能填满基本单元真空场丢失造成的空洞，使轻子中心无空穴存在，那么无应变的场基本单元的大小就应该等于轻子场的总应变变量，即

$$l^3 = h_f \quad (7.1.11)$$

$h_f$  为一个新的常数， $l^3$  是场基本单元的大小。式 (7.1.9) 和式 (7.1.10) 给出了轻子的总应

变量，以及场基本单元的大小，我们把  $h_f$  称为一场基本单元。单电子中弱电力线的四动量为

$$p_\mu = \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_\mu} = \frac{h_f}{R_\mu} \quad (7.1.12)$$

动量线的形变构成质量荷，该质量荷压弯背景时空形成引力场，压弯背景纤维场形成静电场。关于这一概念我们会在以后的章节陆续谈到。

#### 4. 静电场电力线区

$r \dots R$  ( $R$  为电子的内禀空间半径)，形变限制在内禀空间，场在内禀空间以外无定义，因而在内禀空间以外有

$$u(\xi) \equiv \Delta \varepsilon_r = \text{const}, \quad \partial u_\mu / \partial \xi_\mu = p_\mu = 0 \quad (7.1.13)$$

应变量为零，或者说  $u_r$  不随  $r$  变化， $u_r$  是一个恒定量，对时空无影响。电力线是射线，电力线构成静电场，静电场的空间半径  $r$  在  $0 \sim \infty$  之间。

#### 7.1.4 轻子内禀结构的简化

以我们现在的实验手段是无法观测到轻子的内禀空间的，我们所观测到的动量是轻子整体所表现出来的效应，量子理论是上述理论的简化。为了进行简化，我们只考虑轻子最主要的动量线部分，即  $A_{0 \sim R}$ ，轻子具有纤维性，电力线总数为  $e$ ，因而可以把球对称分布的形变区内电力线的形变率取一个平均值

$$p_r(r) = \frac{\partial A_{0 \sim R}}{\partial r} \cdot S_{\text{球面}} = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{R} \frac{e\mathcal{H}}{8\pi r^2} \int_0^R -\sin \frac{\pi r}{\phi} d\left(\frac{\pi}{\phi} r\right) = \frac{e\mathcal{H}}{2R} = \frac{h_f}{R},$$

取  $p_f = p_r/2$ ，则有

$$h_f = \Phi \cdot p_f = t_\phi \cdot E_f \quad (7.1.14)$$

这里  $p_f = \bar{p}_{f1} + \bar{p}_{f2} + \bar{p}_{f3}$  就是电子的内禀动量，是所有电力线在内禀空间内的应变量的平均值，简化之后  $p_f$  变为一维结构。 $E_f$  是电子的静态能量，这里电子也达到了传播条件，但和光子不同的是静态轻子波不是以直线传播的方式存在，而以自旋的源或汇的形态存在。因而电子能量和动量封闭在内部，无法传递给其他粒子，电子静态能量满足爱因斯坦质能关系  $E_f = m_0 c^2$ 。 $\Phi$  为电子的内禀直径。由场的应变关系可知

$$u(\xi) = \frac{h_f}{2} \cos[k_\mu \xi^\mu] \quad (7.1.15)$$

其中， $0 \leq \xi_\mu \leq R_\mu$ ， $k_\mu = \frac{\pi}{\phi_\mu}$ ， $k_\mu$  是内禀空间中的波矢。内禀空间波矢  $k_\mu$  满足

$$\frac{h_f}{2} \cdot k_\mu = p_\mu \quad (7.1.16)$$

与我们熟知的波矢  $k_\mu$  与 4 动量的关系相差一个系数 1/2（为了与粒子空间的波矢一致，可将系数差异归入到  $\xi^\mu$ ，即  $\xi^\mu \rightarrow 2\xi^\mu$ ）。

利用欧拉公式： $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ ，可将轻子的内禀波函数  $\varphi(\xi)$  写为

$$\varphi(\xi) = u_e \exp i k_\mu \xi^\mu = u_e \exp i \begin{pmatrix} k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \quad (7.1.17)$$

这就是单电子场的内禀波函数。内禀波构成“汇”或“源”，这种波动效应对于我们的观测而言是一个有静质量的点。此处有特别说明的是内禀动量没有直接的可观测性，粒子运动才存在动量。如电子运动就是静态电子和光子的耦合，因而电子沿运动方向（一维）的时空总形变量为  $h$ ，而非  $h_f$ 。上述的纤维场的简化是动量线空间纤维的简化，动量线空间构成质量自由度。

### 7.1.5 内禀空间基和粒子空间基的自相似性

在量子力学中，我们熟知的泡利矩阵为

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

这3个矩阵可以理解为自旋空间的3个坐标基，如图7.1.5所示。在量子场论中，我们面对复杂的情况，要扩大描述范围，把自旋空间扩充到粒子  $n$  维自由度空间中： $\sigma_i \rightarrow \gamma_i$ ，如图7.1.6所示。

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_j \\ i\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j=1,2,3; \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}; \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

这里  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，这里  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  对应粒子自由度空间中的三维空间坐标基，还要考虑时间维度，规定  $\gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$  为时间维度坐标基。 $\gamma_4$  为质量自由度坐标基（投影到四维时空中，对应于时间维度）， $\gamma_5$  为强作用自由度坐标基。还有更多的自由度空间基，这一问题在后面还要进一步讨论。

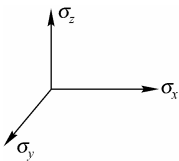


图 7.1.5 自旋空间的3个坐标基

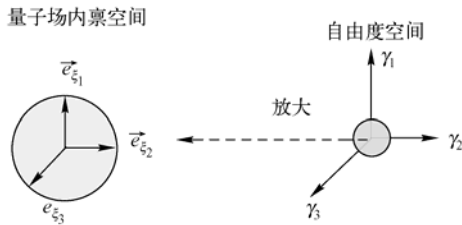


图 7.1.6 量子场内禀空间到自由度空间的扩展

令人惊异的是  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  和  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$  具有严格的对应关系。现在来看一个例子。在某一粒子内禀空间中，

$$E/c = \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} = \vec{p} \cdot \vec{\xi} + m_0 c \xi_0$$

内禀空间无可观测性，这种标架显然无法满足实验观测。因而要从实验观测的角度来考虑问题。



实际实验中首先用两个粒子相撞,然后用粒子探测器探测粒子相撞后所产生的粒子几率分布。这样的空间称为粒子空间。在粒子空间中,粒子探测器不可能对单一粒子进行分析,粒子探测器上只测到一个亮点,粒子的物理性质由粒子出现的位置和对轨迹的分析来判断粒子的性质。实验自由度空间中量子场理论找到了一种标架能描述粒子物理性质,每一种自由度可以投影到一个相应的坐标基上:

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 = \beta。$$

$$\sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4} = c \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \gamma_4 m_0 c^2$$

粒子的内禀动量空间拓展为具有可观察的一种新的标架。这种标架就是由  $\gamma_\mu$  矩阵构成的坐标基。因这种坐标基在本质上对粒子的自由度进行分类,为矩阵,所以要求其系数为旋量振幅。 $\gamma_\mu \partial_\mu \varphi$  为电子第  $\mu$  项自由度在粒子空间  $\gamma_\mu$  方向的投影值。

内禀空间坐标可延伸到粒子空间,内禀空间坐标和粒子空间坐标之间的关系为

$$x = 2\xi \quad (7.1.18)$$

坐标基的对应关系为

$$\gamma_\mu \Leftrightarrow e_{\xi_\mu} \quad (7.1.19)$$

$$\varphi(2\xi) = h \exp i[k_\mu 2\xi_\mu]$$

时空自由度空间中的波函数为:  $\varphi_\mu(x) = \exp i[k_\mu x_\mu]$

对单一粒子而言,内禀空间波函数和时空自由度空间的波函数具有相同的表达式。考虑电子的多种自由度(如粒子体系),

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \\ \varphi_4(x) \end{pmatrix}, \quad \varphi_i(x) = \gamma_\mu \exp \{-i[\varepsilon_\nu k_\nu x^\mu]\} \quad (7.1.20)$$

是我们熟悉的波函数形式,这里  $\varepsilon_\nu = \begin{cases} +1, \nu=1,2 \\ -1, \nu=3,4 \end{cases}$ 。由于  $\gamma$  矩阵的重要性,因而有必要了解  $\gamma$  的性质。

### $\gamma$ 的性质和表示

通常取  $\gamma^\mu$  的标准表示(分块形式):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.21)$$

其中  $I(I_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta})$  为  $4 \times 4$  单位矩阵,往往略去不写。 $\sigma^i$  为泡利矩阵

$$\sigma_1 = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.1.22)$$

$\gamma$  矩阵满足:

$$a. \gamma \text{ 反对易关系: } \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (7.1.23)$$

$$b. \gamma \text{ 矩阵的平方性质: } (\gamma^0)^2 = 1, (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1 \quad (7.1.24)$$

c.  $\gamma$  矩阵的么正性:  $\gamma^\nu \gamma^{\nu+} = \gamma^{\nu+} \gamma^\nu = I$  (不对  $\nu$  求和) (7.1.25)

d.  $\gamma$  的厄米性质:  $(\gamma^0)^+ = \gamma^0$ ,  $(\gamma^i)^+ = -\gamma^i$  (7.1.26)

即  $\gamma^0$  是厄米的而  $\gamma^i$  是反厄米的。上式可统一表为

$$\gamma^{\nu+} = \gamma_\nu \quad (7.1.27)$$

$$\gamma^0 \gamma^{\nu+} \gamma^0 = \gamma^\nu \quad (7.1.28)$$

e.  $\gamma$  矩阵协变性质:  $\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu$  (7.1.29)

### 7.1.6 轻子和光子的耦合构成德布罗意波

轻子的传播可以理解为光子和静态轻子的耦合, 如图 7.1.7 所示。或者说, 光子内禀场和轻子内禀场进行叠加, 光子和轻子的中心点重合。

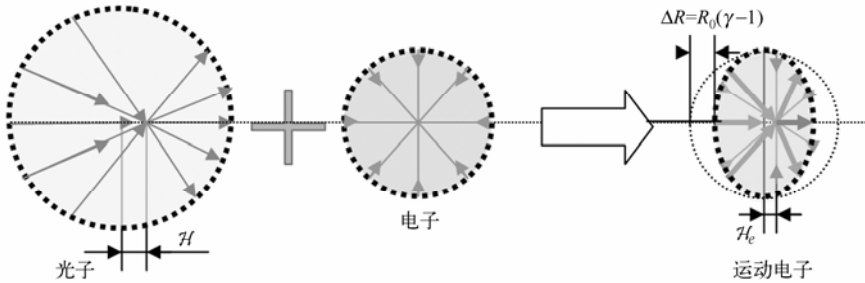


图 7.1.7 光子和静态轻子的耦合构成运动电子

先来看一下光子的内禀波函数的物理意义:

$$\phi_\gamma(\xi) = \exp i \left[ \begin{pmatrix} E_0 \xi^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 \xi^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \xi^3 \end{pmatrix} \right] \quad (7.1.30)$$

↑ 总能量 ( $\hbar k_0$ ) 项;

↑ 光子的纵向动量 ( $\hbar k_3$ ), 导致光子沿

$\vec{k}_3$  方向传播

光子的角动量 ( $\hbar \vec{k}_2 \times \vec{r} = \hbar$ ), 导致光子具有自旋

光子的横向动量, 导致光子在与  $\vec{k}_3$  垂直的面上具有动量, 即横向动量。这使光子具有波动性

$$\varphi_e(0) = \exp i \left[ m_0 c^2 \begin{pmatrix} \xi^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - m_0 c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi^3 \end{pmatrix} \right] \quad (7.1.31)$$

静能量项

静质量项

静态轻子和光子的耦合波函数为

$$\varphi(x) = \phi_\gamma(x) \varphi_e(0)$$

$$\begin{aligned}
&= u_\gamma u_e \exp i \left[ E_\gamma \begin{pmatrix} \xi^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - p_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - p_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \right. \\
&\quad \left. p_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi^3 \end{pmatrix} + m_0 \begin{pmatrix} c^2 \xi^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c \xi^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c \xi^3 \end{pmatrix} \right] \\
&= u \exp i \frac{1}{2} [Et - px - m_0 x_m] \quad (7.1.32)
\end{aligned}$$

这里  $E = E_\gamma + m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 + m_0 c^2$ ，光子的能量被电子完整地吸收了， $E_\gamma = \hbar k_0 = \frac{1}{2} m_0 v^2$ ，全部转化为电子的动量。

波函数被理解为静态轻子和光子的耦合所产生的结果。静态电子获得光子的能量之后，成为具有动量自由运动的电子，描述这种具有低能动量的粒子用的是 Schrödinger 方程。电子和光子耦合，叠加后的电子波函数具有静质量，以及光子的一切特性自旋（光子自旋变为电子自旋）、波动性、纵向动量。

叠加后光子在 3 个维度方向上均被压缩，压缩后的光子仍保持原光子所具有的特性。光子进入电子内禀空间，总时空形变量  $\mathcal{H}$  被压缩为  $\mathcal{H}_0$ ，轻子场的传播速度  $v$  变慢。轻子场的传播本质就是轻子场和光子的耦合。

① 轻子中心处的时空被冻结使得耦合后的量子场具有质量效应。

② 耦合后的轻子中心点和光子中心点为同一点且轻子电力线和量子波的电力线耦合成同一电力线，电力线的数量和单量子场相同。

③ 光子和轻子耦合后，并没有改变光子的特性，耦合后的光子和自由态光子的传播性质一样，由于在  $yz$  面上，耦合光子的场形变最小，所以在受到扰动后要沿  $yz$  面振动，光子中心点和轻子中心点是同一点，所以轻子中心轨迹和光子中心点的轨迹是同一轨迹，为正弦波，如图 7.1.8 所示。

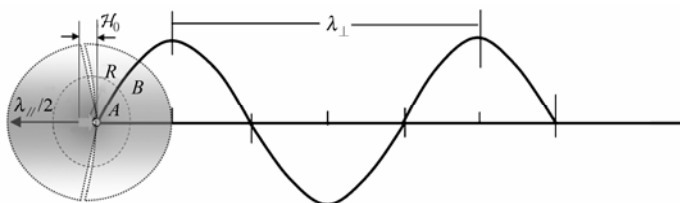


图 7.1.8 轻子传播中心点的波动轨迹

光子中心时空形变量被压缩， $H_\xi \Rightarrow H_e$ ；光子运动速度为  $c = \frac{H_\xi}{t_h} \Rightarrow v = \frac{H_e}{t_h}$ 。

耦合以后的轻子场传播的横波为

$$\Psi_\perp = \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - k_0 t] \quad (7.1.33)$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \frac{\pi}{\phi_i}, \quad k_0 = \frac{2\pi}{t_\lambda} = \frac{\pi}{\phi_0} = \omega \quad (7.1.34)$$

$$\vec{p} = \frac{h}{\lambda} \vec{n} = \hbar \vec{k}$$

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

把式 (7.1.33) 写成复数形式:

$$\Psi = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

对于多个动量相同的粒子设  $A$  为波的恒定振幅, 有

$$\Psi = A e^{i(k \cdot r - k_0 t)} = A e^{h(P \cdot r - Et)} \quad (7.1.35)$$

这便是轻子场的横波, 即德布罗意波。对于以任意速度运动的电子  $E = \frac{p^2}{2m_E}$ , 德布罗意波

$$\text{长为 } \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}}。$$

### 7.1.7 电子的电力线

#### 1. 电场的基本特性

具有纤维结构的真空场就是我们熟知的电场。宏观地把电子视为一个点, 由前面我们知道电力线具有方向性, 因而具有电力线的真空场为矢量场, 并把这种场定义为电场, 并用  $\vec{E}$  来表示。电力线的真空场可由场论来表述。对于电力线来说, 电子的电力线在内禀空间以外的结构如图 7.1.9 所示。电子内禀空间的电力线结构延伸至外部粒子空间, 由式 (7.1.19) 知, 可以用  $x^\mu$  来统一表述内禀时空和外部时空的电场性质。

根据最基本的场论, 已知向量场  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x^1, x^2, x^3)$ , 在  $R_e$  以外, 设  $M(x^1, x^2, x^3)$  为向量线上的任意一点, 其矢径为

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + x^3 \mathbf{k} \quad (7.1.36)$$

则微分

$$d\mathbf{r} = dx^1 \mathbf{i} + dx^2 \mathbf{j} + dx^3 \mathbf{k} \quad (7.1.37)$$

为点在  $M$  处与向量线相切的向量, 按向量线的定义, 它必定与  $M$  处场的向量

$$\mathbf{A} = Ax^1 \mathbf{i} + Ax^2 \mathbf{j} + Ax^3 \mathbf{k} \quad (7.1.38)$$

共线, 因此有

$$\frac{dx^1}{Ax^1} = \frac{dx^2}{Ax^2} = \frac{dx^3}{Ax^3} \quad (7.1.39)$$

这就是向量线所满足的微分方程。解之, 可得向量线族, 即为图 7.1.9 所画的向量线族, 电力线是各向同性的。

$|Ax^1| = |Ax^2| = |Ax^3|$  具有相同的性质, 设  $Ax^1$ ,  $Ax^2$ ,  $Ax^3$ ,  $A$  为场参数, 则有

$$\frac{dx^1}{Ax^1} = \frac{dx^2}{Ax^2} = \frac{dx^3}{Ax^3}$$

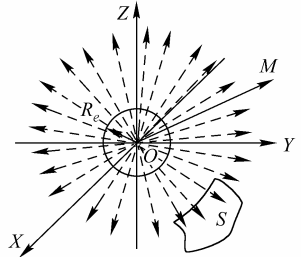


图 7.1.9 静电场电力线

即

$$\frac{dx^1}{x^1} = \frac{dx^2}{x^2} = \frac{dx^3}{x^3} \tag{7.1.40}$$

这就是电力线的数学表达式。

设电场强度穿过单位表面积  $S$  的电力线的数量为场密度。这个强度称为电场强度，用  $\vec{E}$  表示。而总电力线数定为  $e^{①}$ ，总的封闭的球面积  $S_{\text{球}} = 4\pi r^2$ ，那么  $r$  处的场强为

$$\vec{E} = k \frac{e}{r^3} \vec{r} \tag{7.1.41}$$

这里， $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ，表征了静电场相互作用的强度。 $r \geq R_e$ ， $R_e$  为电力线生成区的半径。不考虑点电荷内禀空间，从外部宏观来看， $\vec{E}$  是一个有源无旋的场。

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{7.1.42}$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \tag{7.1.43}$$

电子由电力线构成，因而有必要进一步考查电力线结构。

2. 电力线的形成

如图 7.1.10 (a) 所示，对于压缩区附近的场由场基本单元排列而构成的某一条纤维化的场在  $\xi^1 \xi^2 \xi^3$  方向被压缩或拉伸，但在环向的形变具有球对称性质，而沿径向方向的形变存在指向。考虑  $\xi^1$  轴穿过轻子中心点，于是沿  $\xi^1$  方向的真空场会向前移动一个量  $\epsilon_r$ ，如图 7.1.10 (b) 所示，这并不改变场基本单元三维特性。和其紧密相连的场基本单元也会发生  $\xi^1$  维的真空场向前移动一个小量  $\epsilon_r$ ，这样一直持续下去，就在  $\xi^1$  方向上形成电力线。在压缩区则形成压缩电力线；在拉伸区则形成拉伸电力线。

3. 电力线对时空的影响

这里，我们要注意电力线在内禀空间区域的形变具有维度独立性。我们说某点真空场具有完备的三维特性，由  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  三维的场构成，当  $\xi^1$  维真空场沿  $\xi^1$  移动一个小量  $\epsilon_r$ ，并不改变  $\xi^2, \xi^3$  维真空场的性质，彼此是独立的，即真空场具有维度的独立性。由于三个维度是独立的，这种小的维度“梭动”并不改变其他两维真空场的性质，对整个真空场都没有影响，因而光子的存在对周围时空没有影响。

**电荷** 电子内禀空间之外，真空场基本单元  $O'$  具有完备的三维特性，如图 7.1.10 所示。考虑  $e$  电力线，轻子的电荷为

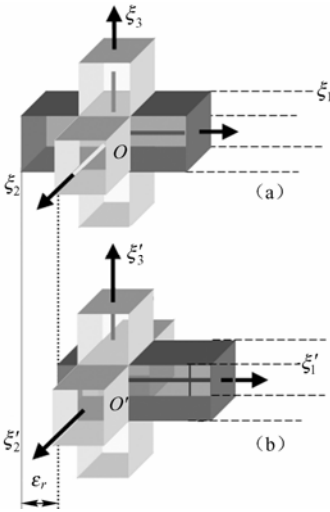


图 7.1.10 电力线的形成

① 这里的电力线数不是任意给定的一个数，而是特指我们所能观测到的电力线数。那么这个数量如何确定？对于实验而言，是通过一个检验电荷来进行测量的。相互作用越强，表明电力线数量越多（即电荷越多），因而电力线的数量、电荷量和电子间相互作用的强弱是等价的。对于 1 个基本电荷而言，电荷（或电力线数）和相互作用强度（即耦合常数）之间相差一个常数  $\alpha_e = e/4\pi$ 。

$$\sum_i^e \frac{\varepsilon_i}{2} = e \frac{\varepsilon}{2} = \Delta h_f$$

该移动量将尽力填充整个空穴，使空穴变小。 $\Delta h_f \propto h_f$  是一个常量。由电力线族构成我们所熟知的静电场，电子的电力线形成的机制和光子是一致的。

#### 4. 电场的正反特性

这里给出电场的定义：电场就是存在电力线的真空场。电场有正电场和负电场两类。而对于正电力线场和反电力线场相遇，真空场有一种恢复平直状态的趋势，力图使两者结合在一起，反之则相斥。表现为异性相吸，同性相斥，如图 7.1.11 所示。

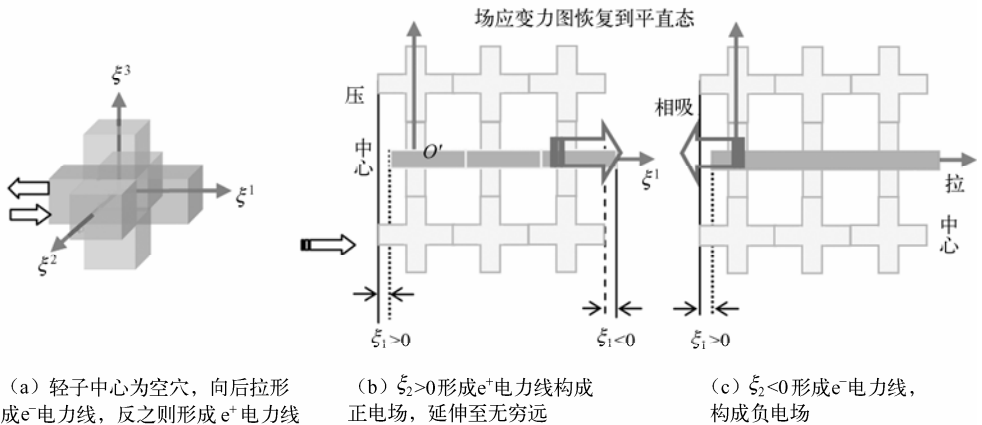


图 7.1.11 单根电力线

这里要特别注意的是，所填充的真空的量就决定了电力线的数量。真空的量越大，所需填充的真空的量就越多，反之则越少。由于所丢失真空场是一场基本单元，因而电力线的量是一个定数。对偶轻子场的情况正好相反。

#### 5. 真空激化电荷云

场基本单元纤维的移动可以构成电力线。从另一个角度来理解，静电场本身就是真空激化电荷云。可以把每一个场基本单元维度的移动理解为真空中感生的弱  $e^+, e^-$  对，如图 7.1.12 所示。

#### 6. 时空转动效应构成电力线

由于电子中心点时间相对于电子内禀空间外的时间慢，空间的一个维度沿电子中心点方向向内或向外移动，总移动量为  $u = e \cdot \varepsilon_r = \Delta h_f$ ，具体在某一维度方向的移动量为  $u_i = A_i$ 。这样构成一个电磁空间的应变场，应变量为

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{01} & \varepsilon_{02} & \varepsilon_{03} \\ \varepsilon_{10} & 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{20} & \varepsilon_{21} & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{30} & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.44)$$

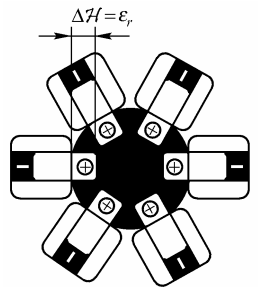


图 7.1.12 电子的真空激化

维度移动造成时间和空间之间存在一个“转动”。转动可以用旋量场表述。在电动力学中，定义

$$F_{0\mu} = -F_{\mu 0} = iE_{\mu} \quad (7.1.45)$$

就是四维时空的空间与时间的旋量，正是电场。具体的表达式为（参见图 7.1.13）

$$\varepsilon_{01} = \frac{\partial u_0}{\partial \xi^1} - \frac{\partial u_1}{\partial t} = \alpha - \beta = F_{01}$$

$$\varepsilon_{02} = \frac{\partial u_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u_2}{\partial t} = F_{02}$$

$$\varepsilon_{03} = \frac{\partial u_0}{\partial \xi^3} - \frac{\partial u_3}{\partial t} = F_{03}$$

$$\varepsilon_{10} = \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial \xi^1} = F_{10}$$

$$\varepsilon_{20} = \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial \xi^2} = F_{20}$$

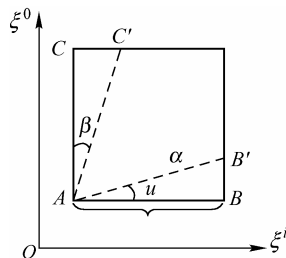


图 7.1.13 时空的转动产生电场

$$\varepsilon_{30} = \frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial \xi^3} = F_{30}$$

电场是时空旋量  $\varepsilon_{0\nu}$ ，这表明时间和空间之间存在一个“转动”。这样的转动产生电场。静电场电力线在真空场论中： $F_{0\mu}$  为正电场； $F_{\mu 0}$  为负电场。可见，转动方向的不同，导致出现正反电场。

电场的应变变量表述为： $i\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{01} & \varepsilon_{02} & \varepsilon_{03} \\ \varepsilon_{10} & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{20} & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{30} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，满足： $\bar{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$ 。可见电力线“源”

或“汇”的分布构成电荷。这里的  $\rho$  对应的就是电荷  $e$ 。

## 7. 矢势 $A$ 和标势 $A_0$

电力线形变量为  $e(\mathcal{H}/2) = \hbar_f$ ，电子内禀总能量为  $m_0 c^2 = \hbar_f / cR$ ，它们构成电子静质量。要特别注意的是每根电力线的形变总量  $u$  是一个常量  $\mathcal{H}/2$ ，维度移动量  $e\Delta\mathcal{H} = \Delta\hbar_f$ 。由于  $\Delta\hbar_f$  仅仅是维度的“梭动”，不是应变，不影响时空，因而静电荷（电力线）的总能量不是由应变造成的，而是电力线的分布构成的，“源”或“汇”的分布构成电荷。考虑球体空间电子形变量的  $\Delta\hbar_f$  分布，位移（形变量）函数  $u(r)$  满足

$$u(r) = \frac{\Delta\hbar_f}{4\pi r^2} = \frac{e\Delta\mathcal{H}}{4\pi r^2}$$

就是矢势

$$\mathbf{A} = u(r) = \frac{\Delta\hbar_f}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi r} \left( \frac{\Delta\hbar_f}{r} \right) = \frac{1}{4\pi r} \left( \frac{\Delta\hbar_f}{cr_0} \right) = \frac{E}{4\pi cr} = \frac{e}{4\pi rc\varepsilon_0} \quad (7.1.46a)$$

这里的位移量  $\Delta\hbar_f$  透过电力线分布在整个宏观的四维空间中， $r$  是宏观量， $r \ll R_{\text{内}}$ （内部

空间半径), 这样电荷的能量  $e/\varepsilon_0$  就远小于静质量能  $m_e c^2$ , 即

$$E_e = \frac{e}{\varepsilon_0} \ll m_0 c^2$$

考虑球体空间电子时空维度形变量的分布, 就是标势

$$A_0 = u_{r0} = \frac{\Delta h_f}{4\pi r r_0} = \frac{1}{4\pi r} \left( \frac{h_f}{r_0} \right) = \frac{E}{4\pi r} = \frac{e}{4\pi r \varepsilon_0} \quad (7.1.46b)$$

四维矢量的“旋度”  $F^{0\mu} = -F^{\mu 0}$  构成电场。具体看一下单电子的电力线。

$$F^{0\mu} = E = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} - \nabla A^0 \quad (7.1.47)$$

单电子静电场:

$$\vec{E} = F^{0\mu} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{e}{4\pi r c \varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{e}{4\pi r \varepsilon_0} = -\frac{e}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \vec{r}$$

这就是库仑定律。

## 8. 标势 $A_0$ 的物理意义

经典电磁场理论中, 标势  $A_0$  具有这样一种物理意义: 它是一单位电荷从某一参考点被移至指定点时所拥有的势能:  $A_0(x, y, z) = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r}$

真空中  $r'$  处的矢势和标势为<sup>①</sup>

$$\phi(r, t) = \int \frac{\rho(r', t')}{4\pi \varepsilon_0 R} dV' \Rightarrow \text{能量}; \quad A(r, t) = \int \frac{j(r', t')}{4\pi \varepsilon_0 c^2 R} dV' \Rightarrow \text{动量} \quad (7.1.48)$$

式中,  $R = |r - r'|$ ,  $t' = t - R/v$ ,  $v = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = c$ 。这里研究的是单电荷, 取  $r = 0, t = 0$ 。

对于实验观测, 我们能直接观测到内禀空间以外的电力线性质。满足库仑定律

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (7.1.49)$$

描述了点电荷静电的性质。当  $r \rightarrow 0$  时, 我们会得到电子的电场强度  $E \rightarrow \infty$  的结论, 这显然是不合理的, 没有考虑  $r_0$  (电力线生成区半径) 电力线生成区的情况。电场起源于电荷, 是有源场,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$ ; 磁场是无源场,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ 。

动量线是电力线的前端, 电力线是场基本单元维度发生移动构成的, 这种维度移动是由于动量场存在所导致的。

## 9. 真空介电常数

从真空场基本单元的性质来看, 纤维的移动不会对背景真空场造成任何影响。但纤维也就是电力线, 电力线空间会因为电荷的存在而被压弯。

荷电粒子本身具有纤维结构, 纤维为射线, 这些射线构成了荷电粒子的纤维场背景空间。质量荷的存在会压弯背景时空, 弯曲的时空就是引力场; 荷电粒子的存在产生纤维场, 并使得纤维场形变, 形变的纤维场就使电力线背景空间弯曲, 弯曲的电力线空间就是电磁

① 虞福春, 郑春开. 电动力学. 北京大学出版社, 1992, p135.



场。换言之，也可理解为电力线是荷电粒子压弯电磁场空间所产生的结果，平直的电磁空间没有观测效应（即无电磁场），对应于平直的空间没有引力存在。

电磁场和引力的确非常相似。轻子场内禀空间内的纤维结构的动量线场形变量很大，这种大的形变 $\mathcal{H}$ 被封闭在内禀空间以内。但这种形变对背景纤维会产生一个小的影响，使得背景场产生形变 $\Delta\epsilon_r$ ，如图 7.1.14 所示。

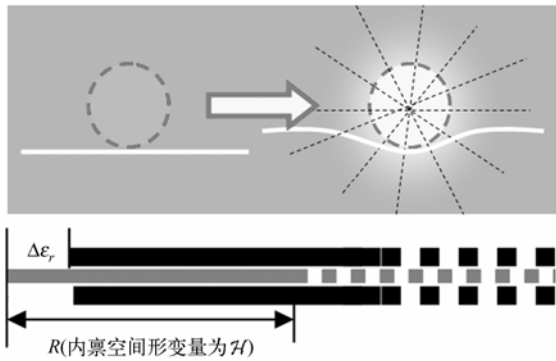


图 7.1.14 具有纤维结构的内禀空间使得背景纤维场空间弯曲形成电磁场

和引力场（质量有不同的大小）不同的是宇宙中最基本的电荷为 $\pm e$ ，因而在真空环境中对背景纤维场压弯的程度是严格相等的。但是如果存在介质，背景场变硬，那么要想把背景纤维场压弯就相对困难，对观测而言，电磁场变弱。衡量压弯电场效应的系数就是 $1/\mu$ （真空中为 $1/\mu_0$ ，是最大值）；衡量压弯磁场效应的系数则是 $1/\epsilon$ （真空中为 $1/\epsilon_0$ ，是最大值）。电磁场的传播速度 $c=1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ ， $c$ 为光速， $1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 则是在相应介质中的速度。单电子电场的总能量为 $e/\epsilon_0$ ，总静态动量为 $e/c\epsilon_0$ 。维度移动量 $\Delta\mathcal{H}$ 被认为是由内禀空间传递出来的效应，或者说是内禀空间之外观测到的场形变量。维度移动量 $\Delta\mathcal{H}$ 与背景真空场的“软硬”有关，因而传递出效应与背景介质有关，这一与介质有关的系数用 $\epsilon$ 表示。对于真空介质而言： $\epsilon_0=10^7/4\pi c^2 F\cdot m^{-1}$ 。

10. 电子电荷的全同性

电子电荷取决于电子电力线的数量。电力线的数量是由轻子中心丢失真空场的量决定的，轻子中心丢失的真空场最初要由轻子中心点 $O$ 周围的真空场通过移动三维中的一维真空场来填充真空，与轻子场的四动量无关，直到真空场的形变能填满真空场弯曲所产生的间隙为止。所有这一切全部取决于轻子中心丢失的真空场的量。

由电力线结构的模型，我们知道对于单根电力线，无论电力线多长，电力线的总形变量都是沿 $r$ 移动 $\epsilon$ ，电力线的存在本身并不引起背景场的变化，所以电力线本身是无质量的。换言之，在强大的电场中时钟不会变慢。电力线的总数为 $e$ ，而每根电力线的移动量为 $\epsilon$ ， $\epsilon$ 为填充真空间隙而发生的场移动量。所以空穴的总量就是

$$e\cdot\epsilon=h_f \tag{7.1.50}$$

$h_f$ 为空穴总量。对于真空场来说， $h_f$ 就是基本单元真空场的量。轻子的质量是由轻子内禀空间场形变决定的，与电力线无关。

真空场中，保持场三维性质的最小单元为场基本单元，构成真空中一个基本的“点”。一基本单元  $1h_f$  场的激发是最简单的也是稳定的。所以，对于费米场来说轻子中心丢失的真空场只有一个场基本单元，因而电力线数的总量就被决定了。这种费米场的电力线总量就是一个基本电荷  $e$ ，是一个与费米场内禀四动量无关的量，所以基本电荷的本质是基本单元的真空场得失所造成的。这表明所有稳定的费米子具有相同的一基本单元的电荷  $e$ 。费米子都是荷电粒子，由费米子内禀空间内形变的电力线构成的向量场就定义为费米子的内禀动量场。

## 11. 光子和轻子的差异

光子和轻子均具有电力线场结构，电力线的应变均限制在相应的内禀空间内且数量一致。光子的电力线也是由维度移动所造成的，因而其长度延伸至无穷远，光子无真空场得失，正电场电力线和负电场电力线的数量严格相等，因而无电荷存在，光子的结构类似于半个正电子和半个反电子的结合体；轻子有一基本单元真空场得失，有一电荷存在，其电力线有维度移动，电力线长度为无穷远。

轻子内禀场的形态不同于光子，为球对称场，具有三维空间结构，轻子有静态 4 动量，内禀能量  $E = m_0 c^2$ ，满足  $m_0 c^2 \cdot \tau = m_0 c \cdot R = h_f$ 。内禀场动量没有直接的可观测效应。轻子也具有波动性  $\hbar = \lambda_0 m_0 c$ ， $\lambda_0$  是我们熟知的康普顿波长。

光子内禀场是轴对称的，可简化为具有一维性质的空间结构体。光子具有波动性，内禀能量动量可直接观测到。光子没有静质量，只有动态 4 动量。光子的能量动量为  $E \cdot \Delta t = h = p \cdot \lambda$ 。

### 7.1.8 电子的磁力线

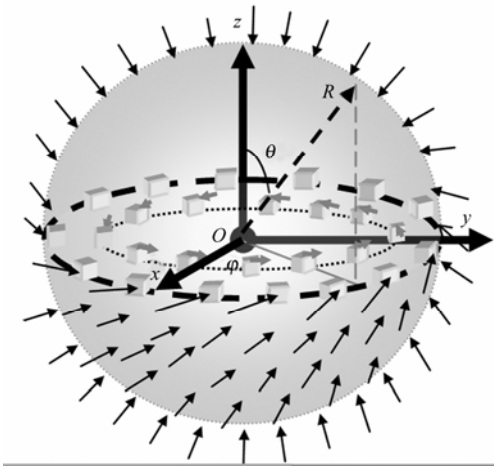
为什么电场和磁场总是如影随形？为什么磁力线总是封闭的？磁单极存在吗？现在就来看看磁场的真空场图像是什么。

#### 1. 磁力线源自于维度的微小分裂

轻子由电力线场构成，而轻子场的内禀空间中又存在着自旋波，自旋光子在电力线的应变场中传播使得电力线发生动态形变，这种形变产生一种力线称为磁力线。磁力线就其本质而言是由三维的场基本单元的零点移动造成的。现在来分析一下磁力线的成因。

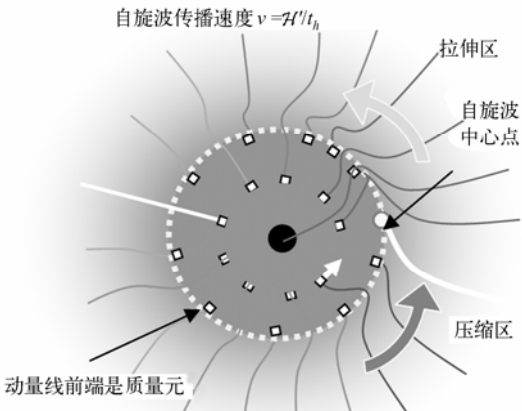
如图 7.1.15 所示，考虑荷电轻子质量荷球内侧边缘的某一场基本单元  $O$ ，该场基本单元就是动量线的前端达到形变极限，即为质量元。在弹性形变区，维度具有独立性，在塑性形变区，形变会造成三维分裂，而三个维度之间的形变存在关联。

自旋波对动量线的影响如图 7.1.16 所示。具体考虑自旋波对某一根动量线质量元的影响。设质量元原点正好和自旋光子的中心点重合， $y$  维指向光子自旋的切线方向，有一个小的移动，构成压缩和拉伸的自旋光子电力线。当任意维度塑性形变时，就会造成原点基本单元的维度分裂。形变使三维零点产生移动，就会对另一维度产生影响，如图 7.1.17 (a) 所示。 $y$  维的形变对  $z$  维产生影响，产生小的维度移动，形成新的力线——磁力线。这一效应本质是微小的维度分裂。



每一个小立方体代表一个达到形变极限的场基本单元，是力线的起始端

图 7.1.15 自旋量子场内禀结构



自旋波的另一半存在于质量荷球体内，没有可观测性。被封闭在球体内的自旋波的传播使质量元波动，沿传播方向产生一个微小的形变，该形变造成微小的维度分裂，形成磁力线

图 7.1.16 质量荷内的自旋波

2. 磁力线的封闭性

电子内禀空间为半向空间，对于内禀空间中的场基本单元，维度没有对称性，只有一个方向，所以  $z$  维的偏移对于同种轻子场（同是正轻子场或同是反轻子场）只可能沿一个方向，而不存在两个方向，如图 7.1.17（b）所示。维度分裂使  $z$  维出现一个极小的偏移而形成了  $z$  维纤维。这和电力线不同：在  $z$  维上没有真空场得失，所以当  $z$  轴向下移  $\varepsilon'$  时，必然出现  $\varepsilon'$  的真空，如图 7.1.17（c）所示，必须由相邻真空场的一维真空场来填充，如此一直持续下去最终要形成一个封闭的电力线才能保持真空场不出现真空场缺损真空，所形成的纤维结构的场是封闭的，这种封闭的具有和电力线相同结构的纤维化场定义为磁场。

3. 磁力的特性

在半向空间中，自旋也只有一种指向，当自旋相同且同是轻子（或同是反轻子）时，如图 7.1.13 中的  $A$ ， $z$  维向上移， $B$  也是  $z$  维向上移，于是  $A$  和  $B$  为了恢复场的平直态，出现了吸引力，这便是磁力。电力线走最近的路径耦合。在两磁体相遇时，由原来的单一磁体的磁力线路径 1 变为直接通过 2 的路径耦合，而通过路径 3 来构成封闭磁力线。若自旋相反时， $B$  的下端和  $A$  的下端相遇，会加大真空场的形变量，而出现斥力。值得一提的是真空场的磁场图像否定了磁单极的存在。静磁场是一个有旋无源的场， $\text{div}\mathbf{B} = 0$ ，用通常的方式引入一个矢势  $\mathbf{A}$ ，使得

$$\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$$

新理论中，磁场是这样定义的：静电力线射线端点场基本单元的维度在移动的过程中，对另外两个维度产生微小的偏移而形成的具有封闭结构的力线，定义为磁力线。具有磁力线的真空场定义为磁场，磁力线具有方向性，为矢量场，用符号  $\vec{B}$  表示。

#### 4. 自旋波的传播速度

在  $x, y, z$  维都达到形变极限时, 即

$$u_y(\text{压缩}) = u_z(\text{压缩}) = u_x(\text{拉伸}) = \mathcal{H}$$

构成维度分裂的基本条件。

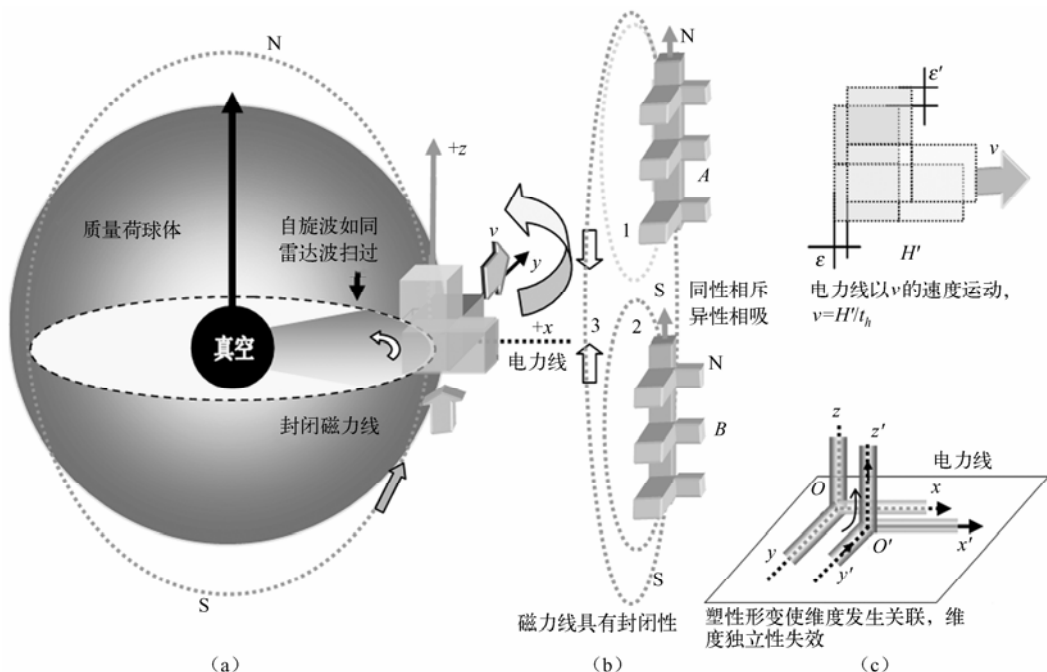


图 7.1.17 磁电力线的形成

对于  $O'$  单元真空场来说, 场时空形变量成为塑性形变, 塑性形变使该场基本元具有不可压缩性, 具有液体性质。我们可以把场基本单元的塑性形变用液体性质表述。这样, 三个维度相互关联。  $y$  形变塑性形变量  $\Delta u_y$  转移到  $z$  维满足

$$\Delta u_y = \Delta u_z$$

$y$  形变塑性形变越大,  $z$  维时空形变量也就越大, 磁力也就越强。

自由光子的时空形变量最大为  $h$ , 但对于轻子场来说, 自旋光子绕质量荷球内侧边缘传播, 如同雷达波扫过圆面屏幕。扫到之处, 时空形变量接近形变极限, 自旋光子背景时空变硬, 时空形变量由  $h$  变为  $h'$ ,  $h' \square h$ , 如果四维时空形变量达到形变极限, 就不存在自旋光子。轻子场四动量越大 (即静质量越大), 时空形变量  $h'$  越小。考虑测量协变效应, 设想我们变小进入到质量荷球边缘, 我们所看到的自旋光子的时空形变量仍然是  $h$ 。

设自旋光子中心点沿切线方向的单纤维形变量是  $\mathcal{H}'$ , 那么自旋光子的传播速度为  $v = \mathcal{H}'/t_h$ , 自旋光子的动量为  $p = h'/2\pi R$ 。

磁力线源自于质量元的运动, 因而只有质量荷运动产生磁力线。

#### 5. 三维空间的应变场的旋量构成磁场

塑性形变使维度发生关联, 这是由自旋造成的。例如在  $xy$  面上场的转动会造成  $z$  方向产生一个场, 这样的特性构成旋量场。

内禀矢势和标矢：通过前面的讨论，我们知道  $A^\mu = (A^0, \vec{A})$  为电力线的形变量，是通过电力线把内禀空间的 4 动量传递出来的。

$$\varepsilon_{\mu\mu} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A^3 \end{pmatrix} \quad (7.1.51)$$

就是我们所熟知的矢势  $\mathbf{A}$  和标势  $A^\mu$ ， $A^{\mu*} = A^\mu$ 。

电子的电磁场自由度：电荷空间场的应变构成电磁场。

$$\text{curl } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A^3}{\partial \xi^2} - \frac{\partial A^2}{\partial \xi^3} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A^1}{\partial \xi^3} - \frac{\partial A^3}{\partial \xi^1} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A^2}{\partial \xi^1} - \frac{\partial A^1}{\partial \xi^2} \right) \mathbf{k} \quad (7.1.52)$$

$$\text{curl } \mathbf{A} = B_1 \mathbf{i} + B_2 \mathbf{j} + B_3 \mathbf{k} = \mathbf{B}$$

考虑空间与时间的转动产生电场，我们可以引入  $F_{\mu\nu}$  对电磁场进行统一的表述

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu \quad (7.1.53)$$

称为四维 2 阶电磁场强张量

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{01} & \varepsilon_{02} & \varepsilon_{03} \\ \varepsilon_{10} & 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{20} & \varepsilon_{21} & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{30} & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.1.54)$$

电磁场源自于场基本单元达到应变极限时四维时空维度间的关联移动，从更广义的角度来理解，真空物质的任何形式的形变都会构成相应具有可观测效应的场，因而电荷的存在使电荷空间发生弯曲，曲率  $F_{\mu\nu}$  构成了电磁场。时空维度的曲率  $F_{0\nu} = -F_{\nu 0}$  构成电场；纯空间维度的曲率  $F_{ij} = -F_{ji}$  构成磁场。

## 6. 磁矩

对于轻子场来说，场的相互作用力正比于耦合常数和场形变率，所以自旋波引起的磁力  $F_B = e \cdot H' / H$ 。力矩为  $F \times \vec{r}$ ，那么磁矩就为（以电子为例）

$$\mu_e = F_B \times \vec{r} = e \cdot \frac{H'}{H} \times r = e \cdot \frac{H' / t_h}{H / t_h} \cdot \frac{m_e}{m_e} \times r = e \cdot \frac{p_e}{m_e \cdot c} \times r$$

而  $p \times r = \frac{1}{2} \hbar$ ,

所以

$$\mu_e = \frac{e}{2m_e c} \hbar \quad (7.1.55)$$

这正是我们所熟知的电子磁矩的表达式。

## 7. 轻子的电磁场自由度

$$\varphi_{EB}(\xi) = \exp i \left\{ \begin{pmatrix} A^0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & -A^1 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & -A^2 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & -A^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{EB}(\xi) &= \exp i \left\{ \begin{pmatrix} A^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & -A^1 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & -A^2 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & -A^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \exp i \{ A\xi + F_{\mu\nu}\xi \} = \exp i \{ [A + F_{\mu\nu}] \xi \} \quad (7.1.56)
\end{aligned}$$

综合上述, 电子在电磁场方面表现出来的自由度有: 电荷  $e$  自由度 (电荷空间的改变表现为电荷的改变), 电荷空间有分数电荷、正负电荷 ( $\pm e, \pm e/3, 0$ ), 规范场  $A$  自由度。对于电子而言, 这一量值由电荷量决定, 因而有随电荷空间改变; 电磁场自由度  $F_{\mu\nu}$  是电荷和自旋产生的, 对于电子而言是一个定值。这三种自由度是描述电子电力线特性的。上述自由度在电子改变为其他粒子时, 该自由度空间才会发生改变。

### 7.1.9 轻子的麦克斯韦方程

电场起源于电荷, 是有源场,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ 。磁场是无源场, 具有  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  的性质。由电力线模型知道, 磁场是由于电场的运动所造成的, 对于运动的电场则有  $|\mathbf{E}| \propto |\mathbf{B}|$ , 电场和磁场相互正交,  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ 。电磁场之间的关系由麦克斯韦方程表述。麦克斯韦方程的标准形式 (c.g.s 单位制) 如下:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (7.1.57)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (7.1.58)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.1.59)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (7.1.60)$$

式 (7.1.57) 表明了电力线的分布形式, 而电力线的分布形式决定了库仑定理的形式, 同时还表明了电荷的单极子存在。式 (7.1.60) 对轻子场而言 (即对轻子) 表达了磁场产生的机制, 便有了自旋磁矩。  $\nabla \times \mathbf{E}$  即  $\varepsilon_{lmn} \partial E_n / \partial x_m$  是涡旋向量, 是由自旋造成的。式 (7.1.58) 没有直接表述轻子内禀空间电力线的性质, 但表述了内禀空间以外的宏观的电力线场性质。式 (7.1.57)、式 (7.1.59)、式 (7.1.60) 不仅表述了轻子场电力线场在轻子内禀空间的性质, 还表述了内禀空间以外的宏观电力线场的性质。

我们可以把麦克斯韦方程可重新表述为下列简单且明显的协变形式

$$\nabla^2 A_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad (7.1.61)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (7.1.62)$$

两式相减得

$$\nabla^2 (A_0 - \mathbf{A}) + \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} (A_0 + \mathbf{A}) = -4\pi \left( \rho + \frac{\mathbf{J}}{c} \right) \Rightarrow \square A_\mu = -4\pi J$$

构成四维电磁场强张量与其自身的张量积, 我们就得到四维 4 阶张量  $F_{\kappa\lambda} F_{\mu\nu}$ 。把这个张量对于  $k$  和  $\lambda$ , 以及  $\mu$  和  $\nu$  缩并, 就得到下列标量:

$$F_{kv}F_{kv} = 2(|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2) \quad (7.1.63)$$

因此，磁场能量密度与电场能量密度之间的差  $(|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2)/8\pi$  是一个相对论不变量。

## 7.2 轻子自旋

### 7.2.1 轻子自旋波

#### 轻子自旋波的产生

轻子具有自旋，自旋为  $\hbar/2$ 。Dirac 方程从数学的角度导出了轻子具有自旋，其值为  $\hbar/2$ （参见第 8 章），但 Dirac 方程并没有给出自旋的成因，为什么电子会有自旋？这里我们给出成因。前面所研究的静态轻子场并没有考虑自旋问题，而实际上作为一种场应变总要以波的形式进行传播。前面只考虑了向轻子中心点传播的球面波，波前被冻结于中心点区域。另外还要考虑自旋。

无自旋波的轻子是不稳定的，只有形成自旋波才符合真空场的传播特性。在轻子的内禀空间  $R$  以外，背景场无形变，因此无波可言。自旋波被封闭在半径为  $R$  的球壳以内的内禀空间中，构成轻子内禀自由度。

由前面的内容可知，电子的中心无论是多出一场基本单元还是出现一个空穴都会造成周围场达到形变极限，而达到形变极限之后，就必然要以波形式进行传播。如果有一个空穴会出现什么样的情况呢？在轻子产生的瞬间，一场基本单元被激发出来，留下一基本单元空穴，则以空穴为中心拉伸真空场（反轻子场则向轻子中心压缩真空场），于是轻子内禀空间中便形成一个向中心汇聚的波，如图 7.2.1 所示，环形波不可能精确地汇于中心点，而出现偏心，于是动量波就以汇聚点为光子中心点，形成纵光子波，沿半径为  $r$  的圆环形成自旋波，并永不停息地传播。这有点像洗澡盆里的水，当把底部的木塞突然拔掉时，便出现了一个空洞，水便会形成一个围绕空洞流动的漩涡。当真空出现一基本单元空穴时，空穴周围的场形变达到传播条件，就会形成一个像漩涡一样由外向中心传播的波，这就是电子自旋波；相反，如果真空多出一场基本单元，就会形成一个由中心向外传播的波，这就是反电子的自旋波。电子的自旋波效应定义为电子自旋。电子自旋角动量为  $\hbar/2$ 。

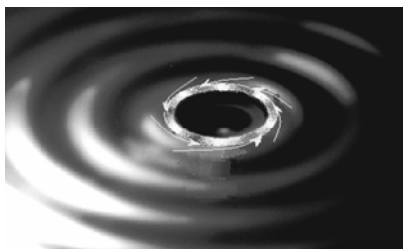


图 7.2.1 质量波的二维球面波示意图

显然带有自旋的轻子场是一个更为复杂的真空场，但我们可以把电子自旋分为如下两部分。

① 静态轻子场：由于场  $h_f$  的得失，轻子形成一个局域的电力线场（即静电场）。

② 纯态自旋波：在电场中，存在一个以  $r$  为半径绕轻子中心传播的自旋波， $r$  很接近轻子中心。我们可以把自旋波理解为一个绕轻子中心转动的纵光子，所以可以把自旋波称为自旋光子。由于自旋波为一个绕轻子中心转动的纵光子，因而有必要考虑波在轻子内禀时空中的传播效应。

### 7.2.2 自旋波在轻子内禀时空中的传播特性

自旋会超光速吗？这一概念只存在于经典物理学概念中，但如果把电子自旋看成机械

的自转显然是错误的<sup>①</sup>，因为如果把电子设想为均匀分布电荷的小球，电子经典半径  $r_e = e^2 / mc^2 = 2.8 \times 10^{-13} \text{ cm}$ ，若要它的磁矩达到一个Bohr磁子，则其表面旋转的速度将超过光速。因为容易估算出  $p \sim \Delta p \sim \hbar / r_e = \frac{\hbar mc^2}{c^2} = mc / \alpha$ ， $\alpha = e^2 / \hbar c \approx 1/137$ ，所有速度  $v \sim 137c$ ，远远超过光速。问题是严重的，这使得自旋没有物理学图像。

从真空场的角度来看，这个问题会迎刃而解。现在我们来解答这一问题。轻子的内禀时空应变是限制在内禀球壳以内的，即在半径  $R$  以内的范围，在  $R$  以外，对时空几乎没有任何影响（注：这种微乎其微的场形变产生的力场就是引力场，这里我们不考虑），时空保持平直。

轻子具有纤维结构。在内禀空间内，轻子的电力线具有应变，电力线本身并不转动，转动的是自旋波，而这种纤维结构的场形变会降低传播性质。

轻子的内禀时空中，由于场的形变，波的传播速率降低，从而使“时钟”变慢。自旋光子在轻子的内禀空间中传播速率为： $v = \cos \frac{\pi}{2R} (R-r) \cdot c$ ，其中  $R$  为内禀空间半径。在中心点附近， $r \rightarrow 0$  时，光子中心点的传播速度趋于零，因而自旋不存在超光速的情况。如果我们能小到进入电子的内禀空间，那么就会发生

时间膨胀： $t = t_0 / \cos \frac{\pi}{2R} (R-r)$ ；

尺度缩小： $l = l_0 \cdot \cos \frac{\pi}{2R} (R-r)$ 。

所测量到的光速仍然是  $c$ ，是一个不变量。

### 7.2.3 自旋量子场的时空形变量

自旋量子场就是一个环绕自旋轴转动传播的光量子。光子动量场纤维为

$$p_\gamma = \frac{er}{4\pi r^3} \frac{\hbar\pi}{2\phi} \sin\theta \cos\varphi \sin \frac{\pi r}{\phi} \cdot \frac{\pi}{\phi_0} \cos \frac{\pi r}{\phi_0}$$

环绕自旋轴转动传播的光量子的场应变如下。

① 沿  $\theta$  方向，考虑环绕传播的光量子场弯曲构成圆环胎（如图 7.2.2 所示），所以有

$$u_{s_\gamma}(\theta) = \frac{\mathcal{H}}{2} \sin\theta \cos \frac{\pi r}{\phi_0} \quad (7.2.1)$$

② 沿  $\varphi$  方向，对于绕圆环运动的光子，可理解为光子被弯曲成一个圆胎。光子中心点传播轨迹在圆胎中心构成一个圆环，光子中心从  $\xi_2$  轴出发转到  $\varphi=0$  处，场形变量最大（取  $L=2\pi r$ ， $l=\Delta\theta \cdot r$ ）。

$$u_{s_\gamma}(\theta, \varphi) = \frac{\mathcal{H}}{2} \sin\theta \cos\varphi \cos \frac{\pi r_0}{\phi_0} = \frac{\mathcal{H}}{2} \sin\theta \cos \frac{\pi}{L} l \cos \frac{\pi r_0}{\phi_0}$$

$$u_{s_\gamma}(\theta, \varphi) = \frac{\mathcal{H}}{2} \sin\theta \cos \frac{\pi}{\pi r} \theta \cdot r \cos \frac{\pi r_0}{\phi_0} \quad (7.2.2)$$

③ 沿  $r$  方向，在  $r=\frac{R}{2}$  时，圆胎中心形变量最大， $r \rightarrow 0$  最小，趋近于零。这里  $0 \leq |r| \leq R$ 。

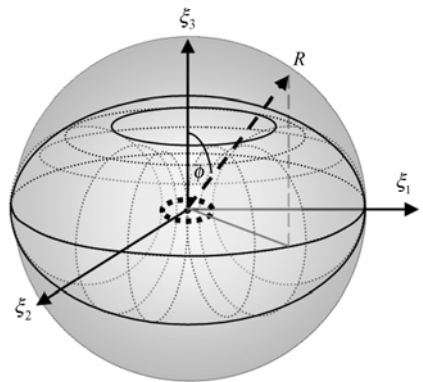


图 7.2.2 自旋量子场内禀结构

① 曾谨言，量子力学. 科学出版社. 1999 年第一版，p339.



④ 圆球的表面积为  $S = 4\pi^2 Rr$ ，圆球的表面所包含的场纤维的总数为  $e$ ，因而单位面积内纤维数（自旋量子纤维场场强）为  $\frac{e}{4\pi r^2}$ ，这里， $r$  为量子波径向半径。

考虑上述 4 点，自旋量子波的纤维场形变为

$$u_s(\theta, \varphi, r) = \frac{e}{4\pi r^2} \frac{\mathcal{H}}{2} \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \sin \frac{\pi}{2R} r \cdot \cos \frac{\pi r_0}{\phi_0} \tag{7.2.3}$$

$$p_s = \frac{\partial u_s}{\partial r} \frac{\partial u_s}{\partial r_0} = \frac{e}{4\pi r^2} \cdot \frac{\mathcal{H}\pi}{2R} \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \sin \frac{\pi}{2R} r \cdot \frac{\pi}{\phi_0} \cos \frac{\pi r_0}{\phi_0} \tag{7.2.4}$$

现在求自旋量子场的总形变量。对于弯成圆胎状的光子在圆胎内的体积积分应和光子一致，场总形变量为  $h$ 。自旋量子场的总形变量为自旋量子波圆环胎的内禀空间体积积分，得到整体球体内所包含的力线的总的形变量为

$$\begin{aligned} u_s &= \int_0^{R_0} dr_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R p_{s\gamma}(\theta, \varphi, r) r^2 dr \\ &= \int_0^{R_0} \frac{\pi}{\phi_0} \cos \frac{\pi r_0}{\phi_0} dr_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr \frac{e}{4\pi r^2} \cdot \frac{\mathcal{H}\pi}{2R} \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \sin \frac{\pi}{2R} r \\ &= e \left( \frac{\mathcal{H}}{4} \right) = h \end{aligned}$$

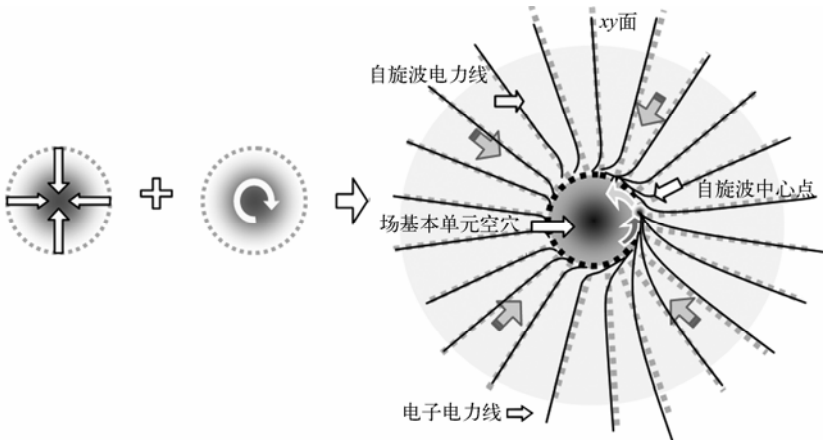
从整个球体积内来看，自旋量子波的总形变为  $h$ 。把上述自旋光子的圆胎结构简化为一个圆环，可以更方便地讨论轻子自旋。

7.2.4 自旋角动量

1. 自旋角动量的大小

上面讲述了自旋量子波的纵波的内禀空间结构。现在来看自旋波横波的情况。对于实验观察来说，纵波没有可观测性，横波才具有可观测性。这种观测性是以几率波的形式表现出来。

把图 7.2.3 中的中心部分加以放大和简化。在轻子内禀空间中，设  $r$  为自旋光子中心点转动传播的平均半径， $r < R, r \geq 0$ ， $O$  为轻子内禀空间中心，由于内禀空间存在场应变，自旋波传播能力下降。



自旋波沿质量荷球表面传播，由拉伸场（深箭头所示）和压缩场（浅箭头所示）构成。对电力线而言都是被拉伸

图 7.2.3 电子的自旋波

这里要特别注意的是，轻子内禀空间的真空场本身相对于自旋波是静止的，自旋波是在内禀空间中进行传播的波。

令  $k = \cos \frac{\pi}{2R}(R-r)$  为空间压缩系数，电子内禀空间的外缘长度为

$$2\pi R = ct_0$$

自旋光子的传播速度为  $c$ ，进入到内禀空间后，

$$2\pi(R \cdot k) = (c \cdot k) t_0$$

明显地发生测量协变。换言之，在内禀空间的外缘的测量结果和在内禀空间  $r \rightarrow 0$  处测到的结果是相同的。自旋光子的动量与  $r$  无关。

光子沿半径为  $r$  的轨道波动传播，自旋光子的中心点轨道如图 7.2.4 中虚线所示，光子中心点所走的路径为一个圆环，圆环的长度为  $2\pi r$ ，当自旋光子横波的波长  $\lambda = 2\pi r$  时，是光子的低能稳定态。沿圆弧方向，整个圆环光子的总形变量为  $h$ ，因而自旋波满足

$$2\pi|r \times p_s| = h \quad (7.2.5)$$

即

$$|\vec{r} \times \vec{p}_s| = r p_s \sin(\vec{r} \wedge \vec{p}_s) \frac{h}{2\pi} = \hbar \quad (7.2.6)$$

这里， $\vec{r} \perp \vec{p}_s$ 。轻子自旋角动量是由自旋光子波的轨道角动量构成的。由于自旋光子沿轻子中心点处的场基本单元空穴构成的球的表面传播，在空穴区域是真正的真空，没有纤维场存在，因而只有空穴球外侧才有电力线，自旋光子总电力线只有原来的一半，即  $S = \frac{1}{2}\hbar$ 。

另外，从观测方面考虑，我们不可能进入内禀空间轻子中心由里向外进行观测，只能由外向内进行观测。光子中心点的外侧是可观测的，如图 7.2.4 中的眼睛所示。由里至外，靠轻子中心的内侧则是轻子的中心点场基本单元，是质量点，是微小的球体，无电力线存在。这样，自旋量子波只有一半电力线存在于空穴球之外，对于我们的实验来说自旋角动量  $S = \frac{1}{2}\hbar$ 。

## 2. 自旋角动量的方向

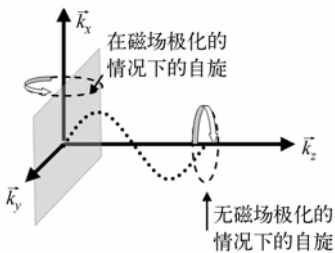


图 7.2.5 电子中心点的轨迹及自旋方向

现在来简单地看一下轻子自旋场的内禀动量分布。轻子的运动源自于轻子中心点和光子中心点耦合，耦合的结果使得轻子中心点运动轨迹和光子的一样，具有了波动性和自旋，如图 7.2.5 所示，设电子沿  $z$  轴传播。在此基础上，轻子中心点的波矢有  $\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z$ 。

从场应变的角度来看， $\varepsilon_z > \varepsilon_x$ ，否则轻子将沿  $x$  方向传播。动量分布在  $z$  方向上最大，而在  $x$  轴上最小。真空场是弹性场，真空场应变越小，使之再形变就越容易。处于自由状态的场发生应变是最容易的。在  $x, y, z$  三个维度中，显然对于沿  $z$  方向运动的轻子场来说沿  $y$  轴是场应变变量最小的方向，若还要发生场形变则是沿  $y$  轴方向，应变  $\varepsilon_y$

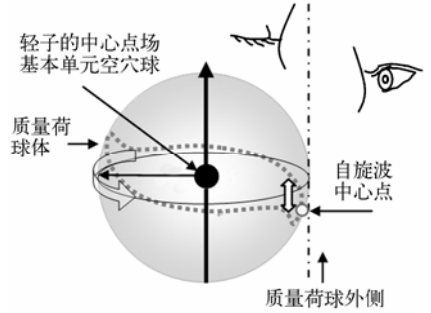


图 7.2.4 自旋波的几率驻波

的存在使电子具有了自旋，自旋角动量的指向沿  $z$  轴方向。

在不存在磁场极化的情况下，自旋波角动量在  $z$  轴传播方向上的投影为  $\pm\hbar/2$  的混合态，相对于  $x$  轴的投影值为 0。如果我们要观测粒子自旋角动量，采用的手段是利用磁场来观测。在磁场极化的情况下， $z$  轴方向上的投影发生分裂，自旋方向指向磁场，在垂直于传播方向的  $x$  轴上的投影值为  $+\hbar/2$  或  $-\hbar/2$ 。要注意的是自旋角动量不是天生就垂直于传播方向的，而是测量手段的本身导致自旋角动量垂直于传播方向。

## 7.2.5 转动应变变量构成自旋动量

上述讨论可以用环量表述。自旋波空间总形变量如下：

$$u_S = \oint_l u(r) dl = h$$

$$u(r) = h \cos \frac{\pi}{2\pi r_0} \cdot r_0 \cdot \Delta\theta = h \cos \frac{\Delta\theta}{2}$$

$$p_S(r) = \Delta u(r) = \frac{1}{2\pi r} h \cos \frac{\Delta\theta}{2}$$

由此可见，自旋波的时空总形变量与自旋波转动传播的半径无关。剪应变如图 7.2.6 所示。

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta \xi^1} = \frac{CC'}{\Delta \xi^1} = \frac{\Delta u(\theta')}{\Delta \xi^1}, \quad \frac{\Delta u_1}{\Delta \xi^2} = \frac{BB'}{\Delta \xi^2} = \frac{\Delta u(\theta)}{\Delta \xi^1}$$

考虑当  $\Delta u \rightarrow 0$ ,  $\Delta \xi^i \rightarrow 0$  时，

$$\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta \xi \rightarrow 0}} \frac{\Delta u_2}{\Delta \xi^1} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi^1} = \frac{\partial u(\theta')}{\partial \xi^1}, \quad \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta \xi \rightarrow 0}} \frac{\Delta u_1}{\Delta \xi^2} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial u(\theta)}{\partial \xi^2}$$

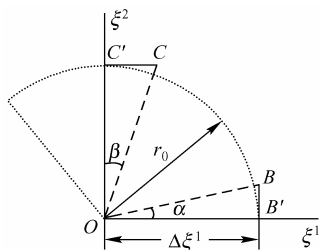


图 7.2.6 剪应变

$BC$  之间的形变量为

$$\frac{\partial u_2}{\partial \xi^1} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{h \cos(\theta'/2)}{2\pi r} \right] = -\frac{h \cos(\theta'/2)}{2\pi r^2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi^2} = -\frac{h \cos(\theta/2)}{2\pi r^2}$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial \xi^1} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi^2} = \frac{h}{2\pi r^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \right]$$

转动一圈，转动角度由  $\theta \rightarrow \theta'$  变为  $0 \rightarrow 2\pi$ ，于是由上式得

$$\text{curl } \Delta u = \frac{\partial u_2}{\partial \xi^1} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi^2} = \frac{h}{\pi r^2}$$

$$u_S = \oint_l \Delta u \, dl = \iint_S (\text{rot } \Delta u) \cdot dS = \frac{h}{2\pi r^2} \pi r^2 = h$$

由上述讨论我们可以理解自旋波的时空应变变量可以用剪应变变量表述。推广到四维一般情况，自旋应变场（即自旋动量场）为

$$S_{\mu\nu} = \varepsilon'_{\mu\nu} = \left( \frac{\partial u_\mu}{\partial \xi^\nu} - \frac{\partial u_\nu}{\partial \xi^\mu} \right), \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (7.2.7)$$

电子的自旋和磁场是一体的，磁场源自于自旋， $\varepsilon_{\mu\nu}$  和  $F_{\mu\nu}$  有相同的表述形式，相差一个系

数。不同的是自旋场在粒子内禀空间内。 $u(u_0, \mathbf{u})$  为自旋波的位移函数, 对应于粒子空间的普通光子波函数。考虑一种最简单的情况, 自旋转动轴为  $\xi^3$ , 那么有

$$\mathbf{x}_s = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon'_{01} & \varepsilon'_{02} & \varepsilon'_{03} \\ \varepsilon'_{10} & 0 & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{20} & \varepsilon'_{21} & 0 & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{30} & \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon'_{10}, \varepsilon'_{20}, \varepsilon'_{01}, \varepsilon'_{02}$  表明时空之间存在一个转动, 表征了自旋波的能量场, 是产生静电场效应的根源;  $\varepsilon'_{12}, \varepsilon'_{21}$  分别表示绕  $\xi^3$  左旋和右旋的角动量场, 是产生磁场效应的根源。

### 7.2.6 电子的自旋自由度

任何应变都会产生质量效应, 自旋也不例外。自旋波的动量和粒子内禀动量是不可分的, 确切地说, 自旋波的能量含在粒子的静质量中。设  $m_s$  为自旋质量, 是一个 2 维应变, 不能产生独立的静质量效应, 应变所给出的质量效应被封闭在内禀空间中, 自旋质量可归在轻子总静质量中 (如图 7.2.7 所示)

$$m_0 = |\vec{m}_e + \vec{m}_s| \quad (7.2.8)$$



图 7.2.7 轻子总静质量

考虑到在平直空间中, 内禀时间和测量时间相同  $\tau = t$ , 可得到静止电子的自旋波函数为

$$\begin{aligned} \psi_{\frac{1}{2}}^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left[ -i \left( \frac{E_0}{\hbar} t - \frac{m_0 c}{\hbar} x_4 - \frac{1}{2} x_5 \right) \right] \\ \psi_{-\frac{1}{2}}^2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left[ -i \left( \frac{E_0}{\hbar} t - \frac{m_0 c}{\hbar} x_4 - \frac{1}{2} x_5 \right) \right] \\ \psi_{\frac{1}{2}}^3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left[ i \left( \frac{E_0}{\hbar} t - \frac{m_0 c}{\hbar} x_4 - \frac{1}{2} x_5 \right) \right] \\ \psi_{-\frac{1}{2}}^4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp \left[ i \left( \frac{E_0}{\hbar} t - \frac{m_0 c}{\hbar} x_4 - \frac{1}{2} x_5 \right) \right] \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

这和电子质量波函数的形式是相同的，同样都是电子的内禀自由度。定义

$$x_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ 0 & \varepsilon'_{21} & 0 & \varepsilon'_{23} \\ 0 & \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \quad (7.2.10)$$

我们可以在量子力学的基础上来建立真空场的自旋算符。在量子力学中<sup>①</sup>，用一个线性厄密算符 $\hat{S}$ 来描写电子自旋角动量。按照角动量的一般定义，它满足如下关系式：

$$\hat{S} \times \hat{S} = i\hbar \hat{S} \quad (7.2.10a)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x &= i\hbar \hat{S}_z \\ \hat{S}_y \hat{S}_z - \hat{S}_z \hat{S}_y &= i\hbar \hat{S}_x \\ \hat{S}_z \hat{S}_x - \hat{S}_x \hat{S}_z &= i\hbar \hat{S}_y \end{aligned} \right\} \quad (7.2.10b)$$

同一种电子具有两种自旋态 $\pm \hbar/2$ ， $\hat{S}$ 在空间任意方向上的投影只能取两个数值 $\pm \hbar/2$ ，所以 $\hat{S}_x, \hat{S}_y$ 和 $\hat{S}_z$ 算符的本征值都应该是 $\pm \hbar/2$ ，这里要引进一个 $\hat{\sigma}$ 算符，它与 $\hat{S}$ 算符的关系是

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma} \quad (7.2.11)$$

其对应分量的关系为

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}_x &= \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_x \\ \hat{S}_y &= \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_y \\ \hat{S}_z &= \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z \end{aligned} \right\} \quad (7.2.12)$$

这里， $\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2, \sigma_z = \sigma_3$ 。轻子波函数可增加一个自旋变量来描述自旋态。这里把自旋视为一个独立的自由度。在内禀空间中，轻子自旋角动量平行于运动方向，转到粒子空间中，自旋垂直于运动方向。考虑粒子空间 $z$ 轴方向上的投影 $s_z$ ，轻子波函数为 $\psi = \psi(x, y, z, s_z, t)$ ，考虑4个分量，

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1(x, y, z, +\hbar/2, t) \\ \psi^2(x, y, z, -\hbar/2, t) \\ \psi^3(x, y, z, +\hbar/2, t) \\ \psi^4(x, y, z, -\hbar/2, t) \end{pmatrix} \quad (7.2.13)$$

由2分量波函数扩充至4分量波函数，相应的自旋投影算符变为

$$\hat{S}_i = \hbar \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}, \quad i=1, 2, 3 \quad (7.2.14)$$

系数 $1/2$ 写在波函数中， $\psi = \psi\left(k_0 x^0, k_1 x^1, k_2 x^2, k_3 x^3, \frac{mc}{\hbar} x^4, \frac{1}{2} x^5\right)$ 。把自旋设为第5自由度之

① 周世勋，量子力学教程。人民教育出版社，1979，p200.

后, 自旋算符变为

$$\hat{S} = \hat{S}_i \partial_5 = i\hbar \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_5} = i\hbar \gamma_s \frac{\partial}{\partial x_5} \quad (7.2.15)$$

规定  $\gamma_s = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$ , 只考虑  $z$  轴上的投影值,

$$\gamma_{sz} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (7.2.16)$$

被理解为第 5 自由度在粒子空间的基。因自旋动量被封闭在内禀空间中。在拉氏量中, 该项存在, 但在粒子空间中的积分为 0。

## 7.3 轻子的质量

前面一直没有谈及质量问题, 现在我们来解决质量问题。质量问题是目前最困扰物理学家的一个问题。物质都有质量, 大到宇宙, 小到夸克。由真空场的性质来看, 质量是容易理解的问题, 我们可以给出质量的自洽的物理学图像。要理解质量, 首先要理解轻子的传播特性。

### 7.3.1 轻子的传播特性

电子由一点到另一点的运动在本质上应该理解为电子由一点传播到另一点。既然是传播, 为什么电子能以任意的速度传播呢?

要了解轻子传播本质, 首先要看一下什么是传播速度。我们先回顾一下光子的情况。如图 7.3.1 (a) 所示, 随时间的推移,  $O$  点向前移动, 形变到达最大时空形变量  $\mathcal{H}/2$  时, 开始回复, 最终回到原位。 $O$  点的时空形变量达到  $\mathcal{H}/2$  才能形成波, 这是波的传播条件。达到传播条件时, 传播速度为  $c$ 。只考虑空间的时空形变量, 定义基本单元空间的时空形变量为  $\mathcal{H}_\xi$ ,

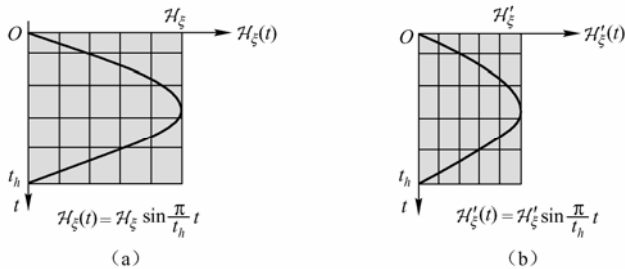


图 7.3.1 量子波的测量协变

$$c = \frac{\mathcal{H}_\xi}{t_h} \quad (7.3.1)$$

$O$  点的位移与时间的关系为

$$\mathcal{H}_\xi(t) = \mathcal{H}_\xi \sin \frac{\pi}{t_h} t, \quad 0 \leq t \leq t_h \quad (7.3.2)$$

它与光子的频率、波长无关。当整个背景场被压缩时, 如图 7.3.1 (b) 所示,  $\mathcal{H}_\xi$  被压缩为  $\mathcal{H}'_\xi$ , 对于拉伸场也一样, 由于场被拉伸, 弹性变小, 最大时空形变量也变小而成为  $\mathcal{H}'_\xi$ ,

传播速度变小， $c' = \mathcal{H}'_{\xi} / t_h$  ( $t_h$  是真空场的某点由自由状态开始形变，形变至最大量后，回到原位所需要的时间，为场基本单元应变周期时间)。由于场是弹性场，这使得场中的任意  $i$  的振动和单摆具有某种共性 (如图 7.3.2 所示)，与振幅无关，是一个恒量，定义  $t_h$  为基本单元时间，这是一个最基本的不变量。

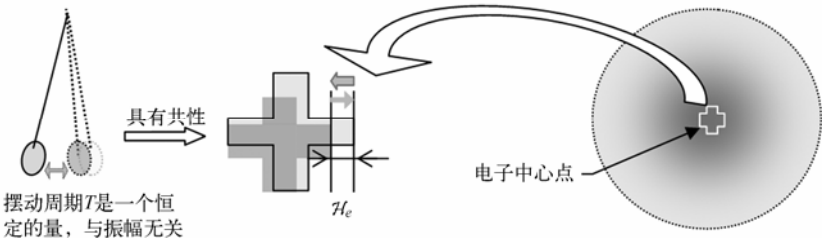


图 7.3.2 电子的传播性质

由简谐振动的知识可知由于惯性的性质， $i$  点的振动会出现停不下来的情况，而图 7.3.1 显然违反我们关于振动的常识，但不要忘记，我们所论述的是场，真空场本身只有弹性场的特性而没有质量概念，当然也无惯性可言。

类似于光子情况，对于电子的传播而言，中心场基本单元从形变到恢复自然状态，整个振动周期时间为  $t_h$ ，轻子的传播速度为  $v \equiv \mathcal{H}_e / t_h$ 。

$\mathcal{H}_e = u_{\max}$ ，是量子场中心点的最大空间形变量。轻子传播时是由轻子中心点质量荷的情况决定的。电子中心点的场基本单元形变由于达到形变极限而失去弹性，电子中心点的形变为塑性形变。形象地说，中心点的场失去弹性，是一个“硬”的小块，所以可形变的量  $\mathcal{H}_e \dots 0$ ，任意大小的场应变都能满足传播条件，传播速度  $v = \mathcal{H}_e / t_h$ 。当中心点真空场受迫而发生塑性形变时，强迫  $O$  点偏移， $O$  点压缩前面的真空场，形变量  $\mathcal{H}_0$  加大，传播速度变大。和光子不一样，电子具有内禀结构，中心总存在形变，强迫移动量越大，越困难，所以它的传播特性不如光子好，当  $\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$  时，由于轻子场的存在， $O$  点的偏移极限量不可能超过自由态光子的时空形变量。传播速度  $V \rightarrow c$ ，接近光速，但无法超过光速，于是轻子有了这种特性，能以任意小于光的速度  $c$  进行传播。这就是为什么光子总是以光速传播，而费米子则能以任意的速度传播。轻子的传播速度为

$$V \equiv \frac{\mathcal{H}_e}{t_h} \tag{7.3.3}$$

上式称为轻子传播速度定义式。

轻子的传播特性使得轻子在以任意速度运动时，在中心点看来，中心点的传播速度都为光速。因而，轻子在做加速运动时，会有超光速效应而辐射电磁波和引力波。

### 7.3.2 轻子的惯性质量

质量分为惯性质量和引力质量。在真空场中我们建立了场的质量概念，首先来认识惯性质量。

#### 1. 经典惯性质量

如图 7.3.3 所示，考虑有两个宏观物体，处于无摩擦和静止状态，如果我们用相同的力同

时来推动这两个物体，由  $F = ma$  可知，重的物体加速小，轻的物体加速大，撤销这个力之后，两物体的运动速度不一样，速度小的就说是惯性质量大，速度大的就说是惯性质量小。

对物体施加一个动量总有一个过程，这个过程表现为

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (7.3.4)$$

$$dp = dv \cdot m$$

$$F = ma \quad (7.3.5)$$

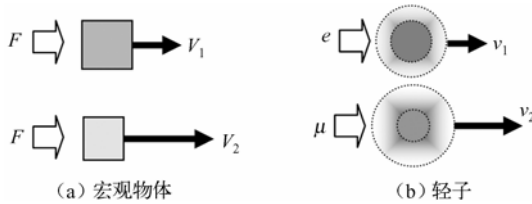


图 7.3.3 惯性质量

对于微观基本粒子来说，惯性质量本质就是费米子传播性质的一种可观测的表现形式，也就是费米子内禀四动量的一种间接的测量效应。

由  $h_f = P_f \Phi$  可知，粒子静动量  $P_f$  越大，直径越小。换言之，粒子越“硬”则静态能量越大。当外部施加一个场形变时（和光子耦合），轻子开始传播。中心点沿前进方向时空形变量  $H_0$  与费米子的“硬度”成反比，则费米子越“硬”， $H_0$  也就越小，表现为传播速度越小。反之四动量越小，轻子越“软”，内禀空间  $\Omega$  也就越大，相应的传播速度越大。轻子总的平均应变率的强弱决定了其轻子中心的“软硬”，与场应变的形式无关。而“软”和“硬”决定了费米子场的传播能力，对某一费米子施加的动量  $p$  变大时， $H_0$  就变大，传播速度变大， $p \propto V$ 。

轻子的内禀动量本质上就是轻子的质量，

$$p_f \propto m \quad (7.3.6a)$$

只有通过变速运动才能表现出来。轻子的内禀动量  $p_f$  和其传播速度成反比，即

$$p_f \propto \frac{1}{V} \quad (7.3.6b)$$

对于某一内禀动量为  $p_f$  的轻子施加的动量  $p$  变大时， $H_0$  就变大，传播速度变大，

$$p \propto V \quad (7.3.6c)$$

由完全相同的外部动量施加在不同的轻子场上，将得到不同的速度，由动量守恒知：

$$P = V_1 m_1 = V_2 m_2 = \dots \quad (7.3.7)$$

我们得知不同粒子存在着不同速度，必须乘上不同的系数  $m_n$  才能满足动量守恒。这个系数的大小正好反映了轻子内禀四动量的大小。换言之，这个系数的大小正好反映了费米子的“软”和“硬”（用物理学的术语说则是费米子内禀四动量的大小）。由式（7.3.6a）和式（7.3.6b）知，这个量就是我们对内禀四动量的间接测量值。这个测量值称为费米子惯性质量，本质上就是费米子的静质量  $E_f = m_0 c^2$ 。

例如电子和  $\mu$  子， $\mu$  子中心区域的场基本单元变硬的数量比电子多，由真空场基本假设知，真空场发生形变后，会降低其传播能力，因而  $\mu$  子的传播能力比电子差，再对两个



粒子施加相同的场形变时，两粒子的传播速度就存在差异，这个差异正好反映了它们的惯性质量，如图 7.3.3 (b) 所示。换言之， $\mu$  子比电子质量大，但中心点的空穴和电子的空穴相同，所以它们有相同的电荷量。

惯性质量就是静质量不为 0 的量子场传播状态所表现出的宏观效应。我们给出费米子惯性质量的定义：由于费米子中心达到形变极限，使得费米子能以任意小于光速的速度传播，且粒子内部场形变率决定了粒子传播性能好坏，这种宏观的可观测传播效应定义为费米子惯性质量。

## 2. 质量的无方向性

由真空场基本假设 IV 知：真空场的任何形变都会导致场的传播能力下降，量子场整体形变对传播的影响效应就是质量，时间维的总应变  $E = mc^2$ ，因而质量无方向性。

### 7.3.3 真空点的四维平移

对于某一静止态轻子场的产生可以理解为某点沿真空的四维  $\xi^\mu$  平移  $p_\mu$

$$\varphi_e(\xi) = T(\xi)\varphi(0) = \exp[ip_\mu \xi^\mu] \quad (7.3.8)$$

真空的四维平移，对应的就是场球对称形变，内禀时空 4 个坐标为

$$\xi^0 = (\xi^0, 0, 0, 0); \quad \xi^1 = (0, \xi^1, 0, 0); \quad \xi^2 = (0, 0, \xi^2, 0); \quad \xi^3 = (0, 0, 0, \xi^3)$$

单根动量线场的四维形变量为

$$u_{r_0 \sim R} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\mathcal{H}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\phi_\mu} \xi^\mu\right)$$

构成动量场。单根动量线四维形变率为

$$\varepsilon_\mu(\xi) = \frac{u_{r_0 \sim R}}{\partial \xi^\mu} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\mathcal{H}}{2} \frac{\pi}{\xi^\mu} \sin\left(\frac{\pi}{\phi_\mu} \xi^\mu\right)$$

平均值为

$$\varepsilon_\mu = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\mathcal{H}}{2\phi_\mu}$$

对于  $e$  根电力线：

$$e\varepsilon_\mu = \frac{e}{4\pi r^2} \frac{\mathcal{H}}{2\phi_\mu} = \frac{h_f}{\phi_\mu} = p_\mu$$

$$p_\mu \xi = \begin{pmatrix} h_f / \phi_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_f / \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_f / \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_f / \phi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \quad (7.3.9)$$

式中， $p_\mu = h_f / \phi_\mu$ ，内禀波函数为

$$\varphi_e(\xi) = \exp \left[ i \begin{pmatrix} h_f / \phi_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_f / \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_f / \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_f / \phi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \right] \quad (7.3.10a)$$

对于反粒子

$$\bar{\varphi}_e(\xi) = \exp[-ip_\mu \xi^\mu] \quad (7.3.10b)$$

真空场的四维平移产生“汇”和“源”结构的波。从纤维场的角度考虑，则

$$\varphi(\xi) = \exp \left\{ i \frac{1}{\hbar} \left[ \frac{\hbar_f}{\Phi} \begin{pmatrix} e\Xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ep_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ep_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ep_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \right] \right\} \quad (7.3.11)$$

这里， $\hbar_f = \Phi \cdot ep = \Phi \cdot m_0 c$ ，从力线的角度看是  $m_i = ep_i$ ， $p_i$  某一维度方向的单纤维应变（即动量）； $\Xi = c\bar{p}_i$  单纤维能量， $\bar{p}_i = (p_1 + p_2 + p_3)/3$  是三个维度方向单纤维的平均应变变量。如发生维度分裂，每一个维度方向的力线数量为  $e/3$ ，即出现  $e/3$  的分数电荷（具体可参见第 10 章“强子结构”）。

这里要求内禀空间具有严格的球对称性质，因而由

$$\Phi_1 \equiv \Phi_2 \equiv \Phi_3 \quad (7.3.12)$$

对于粒子的中心点要求三个维度交会于一点，这里规定

$$\xi_m = \begin{bmatrix} \xi^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2\theta(\xi_2 - 0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi_3\theta(\xi_3 - 0) \end{bmatrix} \delta^3(\xi^i - \xi^j), \quad (7.3.13)$$

为质量自由度空间标架。引入  $\delta^3(\xi^i - \xi^j)$ ,  $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ 。上述式 (7.3.9) 和式 (7.3.10) 给出了质量荷空间的特性。这里还引入  $\theta$  函数是为了构造出电子内禀空间具有半向空间性质。

### 7.3.4 质量会聚波

真空点的四维向内平移构成轻子的 4 维聚波。由球面会聚波和自旋波共同构成，两者是不可分的。把向轻子中心点传播的波动效应简化构成球面质量波，把自旋波视为另一个独立的自由度。

真空场形变达到形变极限时就必然形成以光速传播的量子波。当轻子内禀场应变到达极限态时，就构成了以光速运动的量子波。这里的量子波由一个球面向中心点传播，当趋近于中心点时，场应变趋近于形变极限，向内传播的球面波被“冻结”于中心区（如果我们能乘坐一艘足够小的飞船，跟随会聚波向轻子中心传播，虽然我们被“冻结”于中心区，但我们仍然认为自己以光速向中心点靠近），构成特别的质量效应的量子波。

量子场的应变场波函数为  $u_r(\xi_\mu)$ ，球对称正轻子场  $u_r(\xi_\mu)$  可以理解为在内禀空间中，一个以光速传播的球面波向中心会聚（反轻子场则是一个球面波源），并绕中心轴沿一极小的圆环传播，构成环状纵波，极小的圆环的总体构成一个具有质量效应的硬点（见图 7.3.4）。把圆环近似看成一个点，球面波波动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \varphi(\tau, r) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\tau, r)}{\partial \tau^2} = 0 \quad (7.3.14)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \varphi(\tau, r) = (mc)^2 \varphi(\tau, r)$$

由上述两式得：

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\tau, r)}{\partial \tau^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar_f} \varphi(\tau, r) = 0$$

这就是轻子质量效应的量子波，该方程表述了球对称量子场的质量效应。上式的特解

$$\varphi(\tau, r) = \exp\left\{i \frac{1}{\hbar} [E\tau - m_0 c r]\right\} \tag{7.3.15}$$
$$r = \xi^1 + \xi^2 + \xi^3$$

质量荷的概念：式 (7.3.15) 满足

$$i\hbar_f \nabla \varphi(\xi) = m_0 c \tag{7.3.16}$$

也可以理解为动量场源自于质量荷。这种形态的质量定义为质量荷，把“汇”质量波定义为正质量荷，把“源”的质量波定义为反质量荷。

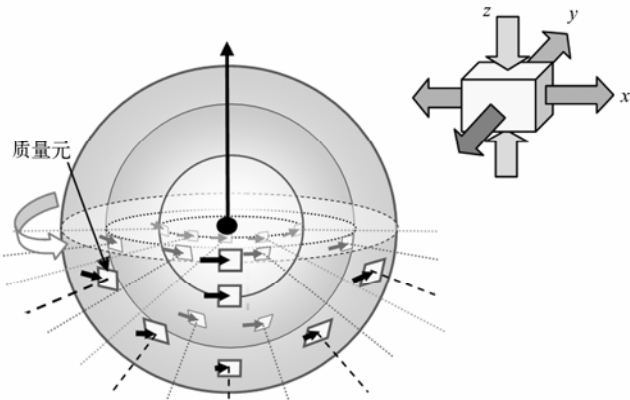
7.3.5 静态轻子质量荷的精细结构

质量荷是由达到塑性形变的纤维构成的。如图 7.1.2 (c) 所示，每一个小长方形表示一个场基本单元三个维度中形变的那个维度，该维度构成动量线（即电力线的前端）。质量荷可以说成是由动量线前端面场基本单元构成，如图 7.3.4 所示，把达到形变极限的电力线前端面场基本单元在一个球体内的分布定义为质量荷。由质量荷的结构可知，质量荷具有三维结构。质量荷是由达到形变极限的“质量元”构成的三维球体，“质量元”的大小严格相等。

动量线的长度为  $R$ ，即内禀空间半径，满足

$$m_e c \cdot R_e = m_\mu c \cdot R_\mu = m_\tau c \cdot R_\tau = e \frac{H}{2} = h_f \tag{7.3.17}$$

动量线的长度各不相同，具有如下关系：



反轻子质量元的形变沿径向被压缩，沿  $yx$  方向被拉伸。正轻子质量元形变的情况正好相反。沿 3 个维度方向的形变都达到了形变极限  
达到形变极限的电力线前端面场基本单元交错分布在不同的球壳面上，这些小面存在于一个球体内，该球体就构成质量荷。电力线本身是不动的，意味着质量元相对于球心静止

图 7.3.4 质量荷的结构

$R_e : R_\mu : R_\tau = \frac{1}{m_e} : \frac{1}{m_\mu} : \frac{1}{m_\tau}$  半径之间具有固定的比例关系，这是目前一个未解之谜。虽然这一关系在后面要进行讨论，但笔者认为这仅仅是一种探讨。

动量线只有靠中心的前端面才达到 3 维形变极限。但任何形变会降低传播速度，因而

整根动量线都存在质量效应，质量为  $m_{0i}$ ， $i$  表示第  $i$  根电力线。考虑轻子的某根动量线。对于单根长度为  $R$  的动量线，动量线的形变产生质量效应，该质量满足  $E_i = m_{0i}c^2$ 。

对于塑性形变而言，一场基本单元径向塑性形变量为  $\Delta l$ （这里力线端面沿球坐标系  $\theta, \varphi$  方向的形变已达到形变极限，场基本单元 3 维都达到形变极限是塑性形变存在的基本条件），那么静止质量是  $E = \Delta l \cdot T$ ，静质量是  $m = \Delta l \cdot T / c^2$ 。 $T$  是塑性形变单位长度的能量。

两种都具有静质量效应，这样为了简化，我们把长度为  $R$  的动量线的质量归并在长度为  $\Delta l$  的塑性形变，这里  $R \gg \Delta l$ 。轻子能量越高，动量线越短，相应归并后的塑性形变长度越长，如图 7.3.5 所示。

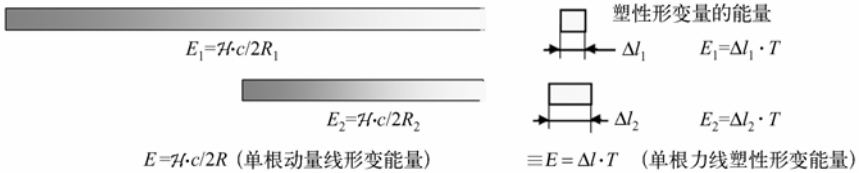


图 7.3.5 动量线的形变质量效应可用塑性形变表述

对于整个有静质量的轻子而言，轻子有  $e$  根动量线，那么上式变为

$$E_0 = h_f \cdot c/R \equiv E_0 = e\Delta l \cdot T$$

规定  $l = e\Delta l$ ， $l$  就是一维力线总的塑性形变的长度。由此可见，我们可以把轻子动量线简化为长为  $l = e\Delta l$  的单根力线的塑性形变，这正是质量荷塑性形变的简化。

荷电轻子内禀空间沿球坐标系  $\theta, \varphi$  方向的形变是相同的（因所要填充的空穴都是一基本单元，反轻子相反），3 种轻子的电力线的总数都是  $e$ ，达到形变极限的是电力线前端面场基本单元。轻子动量线的生成区相同，生成区就是质量荷空间。定义  $R_m$  为质量荷球壳的半径。考虑电力线是有粗细的，端面的面积是  $s$ ，所有的  $e$  个端面尽管离中心点的位置不同，但都分布在质量荷空间内。在弱作用中粒子分裂，质量荷球壳由一个分裂为两个。

### 7.3.6 电子的内禀空间场函数

根据前面的讨论，我们要对荷电轻子进行一下小结。轻子具有的以下特性：

- ① 带有电荷及电磁场；
- ② 有静质量、自旋  $\hbar/2$ 、四动量。

所有这些特性都是由于弹性应变造成的，因此我们可以统一的用一个简单式子来表述电子的内禀空间性质（不考虑量纲）：

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \exp i \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_{00} & \varepsilon_{01} & \varepsilon_{02} & \varepsilon_{03} \\ \varepsilon_{10} & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{20} & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{30} & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \exp i \begin{pmatrix} \varepsilon_{00} & -\varepsilon_{01} & -\varepsilon_{02} & -\varepsilon_{03} \\ \varepsilon_{10} & -\varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{20} & -\varepsilon_{21} & -\varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{30} & -\varepsilon_{31} & -\varepsilon_{32} & -\varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \exp i (\varepsilon_{ab} \eta_{\mu\nu} \xi) \end{aligned} \quad (7.3.18)$$

这就是电子内禀空间场函数的完整表述形式。

场形变参见式 (1.4.9), 可知  $du = \varepsilon_{11}d\xi_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{21}d\xi_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{31}d\xi_3 + \frac{1}{2}\varepsilon'_{21}d\xi_2 + \frac{1}{2}\varepsilon'_{31}d\xi_3$ , 对于电子的剪应变项  $\varepsilon_{\mu\nu} = \frac{\partial u_\nu}{\partial \xi_\mu} + \frac{\partial u_\mu}{\partial \xi_\nu}$ ;  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  为零 (参见 7.1 节), 留下自旋项  $\varepsilon'_{\mu\nu} = \frac{\partial u_\nu}{\partial \xi_\mu} - \frac{\partial u_\mu}{\partial \xi_\nu}$  不为零。自旋项分为时空自旋  $\varepsilon'_{0\nu}$  和空间自旋两部分  $\varepsilon'_{ij}$ , 这两部分共同构成自旋时空应变。时空总形变量为  $h/2$ 。我们可以把  $\varepsilon$  应变矩阵进行分解:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ab}\eta_{\mu\nu}x = & \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{00}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{能量 } p_0 \text{ 项}} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{动量 } p_1 \text{ 项}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{动量 } p_1 \text{ 项}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \xi^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{动量 } p_2 \text{ 项}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{动量 } p_2 \text{ 项}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{动量 } p_3 \text{ 项}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}}_{\text{动量 } p_3 \text{ 项}} \\
 & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi^3 \end{pmatrix}}_{\text{静质量}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix}}_{\text{静质量}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}}_{\text{静质量}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon'_{01} & -\varepsilon'_{02} & -\varepsilon'_{03} \\ 0 & 0 & -\varepsilon'_{12} & -\varepsilon'_{13} \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon'_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{自旋项(向上)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}}_{\text{自旋项(向上)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon'_{10} & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon'_{20} & -\varepsilon'_{21} & 0 & 0 \\ \varepsilon'_{30} & -\varepsilon'_{31} & -\varepsilon'_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{自旋项(向下)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}}_{\text{自旋项(向下)}} \\
 & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}}_{\text{标势、矢势项}} + \underbrace{\begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}}_{\text{标势、矢势项}} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}}_{\text{标势、矢势项}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon''_{01} & -\varepsilon''_{02} & -\varepsilon''_{03} \\ \varepsilon''_{10} & 0 & -\varepsilon''_{12} & -\varepsilon''_{13} \\ \varepsilon''_{20} & -\varepsilon''_{21} & 0 & -\varepsilon''_{23} \\ \varepsilon''_{30} & -\varepsilon''_{31} & -\varepsilon''_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{电磁项}} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}}_{\text{电磁项}} \quad (7.3.19)
 \end{aligned}$$

经过前面的讨论, 我们终于可以放心地说电子是真空中场发生弹性应变的产物。

### 7.3.7 e, $\mu$ , $\tau$ 的内禀结构和质量

我们已经建立了轻子的基本概念及理论。轻子有三种质量态, 分别是  $e, \mu, \tau$ 。由轻子的电力线场概念, 我们知道轻子的总电荷为  $e$ , 与内禀四动量无关。所以  $e, \mu, \tau$  表现为质量不同、电荷相同。但为什么会出现三个能级而不是连续变化呢? 我们来看它们的内禀结构。

#### 1. $e$ 的内禀结构

平直场中, 多出或丢失一基本单元的真空场形成一对偶轻子 (考虑出现空穴的情况), 于是场向轻子中心形变, 产生汇聚波。刚好能形成稳定的汇聚波为最低能态。对于相同的背景场来说, 这是一个恒量。因而电子的静质量是一个恒量 (低能情况)。在轻子中心区和中心点相邻的基本单元的真空场, 如图 7.3.6 中的  $A$  ( $A$  场基本单元) 在沿  $\vec{r}$  方向处于形变极限态, 而  $B$  和  $C$  也为场基本单元, 但没有达到形变极限态。这是轻子场的最低能态, 所以是最稳定的结构态, 只要轻子中心真空场缺少或多出基本单元真空场, 则电子就永远存在下去。电子的能级最小, 但体积最大。

## 2. $\mu$ 子的内禀结构

对于  $\mu$  来说，轻子中心得失同样是一基本单元真空场，但内禀四动量比电子  $e$  大，沿  $\vec{r}$  向轻子中心的形变率更大。从真空场的角度来看是电子的背景场发生进一步的弯曲而构成  $\mu$  子。除了和轻子中心点相邻的单元真空场  $A$  达到形变极限外，第二级真空场  $B$  也达到了场形变极限，如图 7.3.6 (a) 所示，轻子中心形变极限区变大，沿  $\vec{r}$  的一维场时空形变量如图 7.3.6 (b) 的  $\tau$  所示， $R_\mu < R_e$ ， $P_\mu > P_e$ ， $P$  为四动量。 $\mu$  轻子中心区域  $A$ 、 $B$  两层基本单元真空场都达到应变极限，内禀空间内场应变增加， $\mu$  轻子传播能力大为降低，表现为静质量大为增加， $m_\mu c = h_f / \Phi_\mu$ 。

## 3. $\tau$ 的内禀结构

对于  $\tau$  来说，情况和  $\mu$  相似，第三层基本单元真空场  $C$  也达到了形变极限，如图 7.3.6 (b) 所示，沿  $\vec{r}$  的一维场时空形变量如图 7.3.6 (c) 所示，可见  $A$ 、 $B$ 、 $C$  都达到了形变极限。

这里要特别注意的是  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的大小和  $R$  相比小得多得多， $l_A = l_B = l_C \ll R$ ，所以图 7.3.6 中所画的是夸大了的情况，目的是为了读者更容易理解。

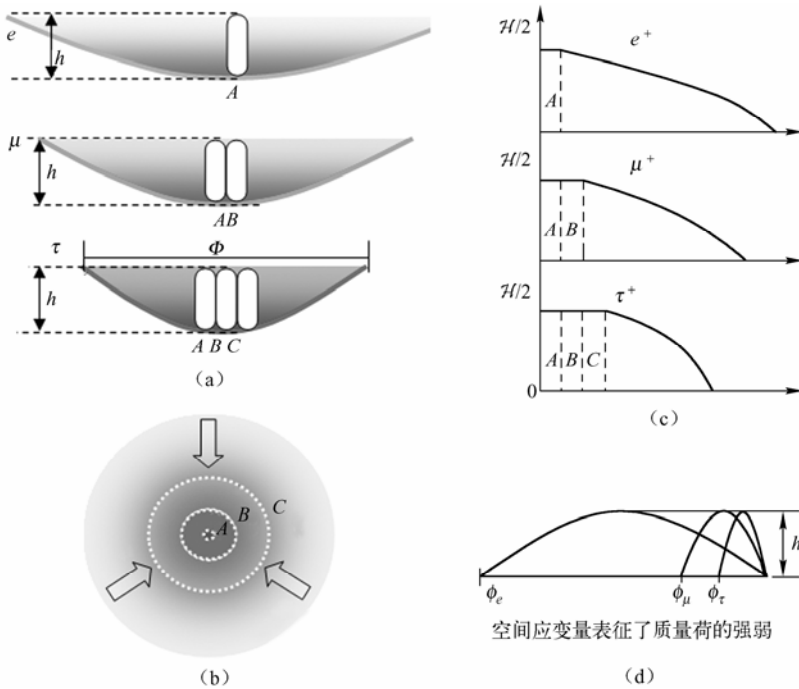


图 7.3.6 内禀空间  $\phi^i$  关系示意图

在图 7.3.6 (a)、(b) 中，我们可以看出  $A$ 、 $B$ 、 $C$  分别为一基本单元真空场，当  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三层都达到形变极限时，并不影响轻子中心区电力线的形成。对于基本单元的真空场，维度是独立的，沿  $x$  方向的形变并不影响  $y$  和  $z$  维场的性质， $yz$  维场的形变极限由  $yz$  方向的形变决定。决定电力线场的总量以性质最终是由轻子中心真空场得失的量决定。

综合上述，我们能理解为什么  $e, \mu, \tau$  具有相同电荷、相同自旋而质量却不同这一基本问题，电子为最低能级，显然是最稳定的。

对于质量我们知道  $m_0 c = h_f / \phi$ ，质量的差异是由内禀空间直径不同造成的。现在我们

来考察一下内禀空间直径为什么会如此不同。根据上述模型图像中场形变叠加效应，我们可以对轻子内禀空间直径作出估算。

由前面得知内禀空间中纤维场应变  $u(r)$  的存在会造成内禀空间发生改变，内禀空间的改变见式 (1.5.1)，其函数关系为  $\phi' = \exp[u\vec{r}]\phi$ ，可得

$$\frac{\phi'}{\phi} = \exp[u\vec{r}]$$

规定  $K = \phi' / \phi$ ，称为内禀空间扩张系数。得到质量的表达式

$$m_0c = h_f / K\phi_{\min} \tag{7.3.20}$$

为了确定内禀空间扩张系数  $K$ ，要研究  $u(r)$ 。

首先我们考虑汇聚波（确切的讲是球面汇聚波）。由于真空场是弹性介质， $u(r)$  所描述的是空间弹性形变量

$$u(r) = A \cos\left(\frac{\pi}{\phi_{\max}} \cdot r_i\right), \quad 0 \leq r_i \leq R \tag{7.3.21}$$

表述汇聚波。这里  $\phi_{\max}$  最低能级汇聚波的直径， $r_i$  汇聚波直径，分为  $r_e$ ， $r_\mu$ ， $r_\tau$ 。 $A$  汇聚波振幅。规定： $\frac{\pi}{\phi_{\max}} r_i = \theta_i$ ，于是汇聚波的表达式是

$$u(\theta) = A \cos \theta, \quad \theta = \sum_{n=1}^3 \theta_i, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \tag{7.3.22}$$

当  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，无汇聚波，即粒子不存在， $\theta \rightarrow 0$  汇聚波为理论极大值。对于电子汇聚波收缩  $\theta_1$  形成电子；对于  $\mu$  子，可以理解为电子的背景空间发生收缩，表示原来在  $\theta_1$  基础上的收缩  $\theta_2$ ；对于  $\tau$  子而言， $\mu$  子的背景空间发生弯曲，表示在  $\theta_2$  形变的背景空间的基础上再次被压缩  $\theta_3$ ，显然空间已硬化，压缩变得更为困难，这种变化可以用余弦函数来近似描述。

空间形变以“汇”的形式收缩，构成汇聚波；以“源”的形式扩张，称为扩展波。无论是“汇”或“源”，内禀空间半径越小，形变越强。如果以形变理论极大值为起始点，那么，随着  $\theta$  的增加，汇聚波扩张，因此称  $\theta$  是扩张角。参见图 7.3.7 (b)。总之可以统称为球面波角  $\theta$ 。轻子场形变程度为 1，球面波扩张角度为  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$  时，是电子  $e$ ；球面波扩张角为  $\theta_1 + \theta_2$  时，轻子场形变程度为 2，是  $\mu$  子；当扩张角为  $\theta_1$  时，轻子场硬化程度为 3，是

$\tau$  子。这里  $\theta$  的极限  $\sum_{n=1}^n \theta_i = \pi/2$ ，显然有如下关系

$$\sum_{n=1}^n \theta_i < 90^\circ \tag{7.3.23}$$

表 7.3.1 轻子的代和质量

代	轻 子		
	符号	电荷 $Q$	质量 Mev
I	e	-1	0.511
II	$\mu$	-1	105.66
III	$\tau$	-1	1784.1

最后得到质量的表达式

$$m_i c = \frac{h_f}{\phi_{\min} \cdot \exp\left[A \cos \sum_{n=1}^n \theta_i\right]} \tag{7.3.24}$$

当  $\theta = 0$  时， $u(\theta) = 0$ ，处于应变极限， $m_i = m_{\max}$ ，在轻子中， $\tau$  轻子最重；当  $\theta = \pi/2$  时， $u(\theta) = A$ ， $m_i = m_{\min}$ ，电子最轻。具体的轻子质量可以用如下公式近似表述：

$$m_\tau = \frac{h_f}{c\phi_{\min} \cdot \exp[0]}, \quad m_e = \frac{h_f}{c\phi_{\min} \cdot \exp[A]}, \quad m_\mu = \frac{h_f}{c\phi_{\min} \cdot \exp[A \cos \theta]}$$

$m_\tau : m_e = \exp A$ ，可得  $A = 8.158$ ，

$$m_\mu : m_e = \exp[A \cos \theta_2] = \exp[8.158 \cos 49.2^\circ] \quad (7.3.25)$$

这是根据真空场模型估算出来的  $e, \mu, \tau$  三种轻子的质量关系，为我们理解三代轻子质量关系提供了一个图像，但要真正精确计算出参数  $A$  和  $\theta$ ，还有很长的路要走。

### 7.3.8 轻子的背景场及轻子的引力

轻子向轻子中心拉伸，而反轻子向轻子中心压缩。任何达到应变极限的场都要以波的形式存在，这是场的基本性质，根本不存在绝对的静态轻子场。由于轻子中心对于正轻子场多出一场基本单元，而轻子场则少一场基本单元，因而达到应变极限的轻子场是向轻子中心自旋传播的波，不可能消失。这种向轻子中心传播的动态特性使得背景场发生一个极微小的应变。无论这种应变是正或是负都会造成光子传播能力下降，宏观表现为时空弯曲。这种弯曲的量和轻子场的内禀四动量相关，内禀四动量越大，造成的背景形变就越严重。

考虑单一轻子内禀空间以外的引力效应，三维静态轻子对背景场的影响是球对称的，即把一个轻子视为一个球对称的引力体。由我们熟知的史瓦西解得知：

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m_0}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m_0}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (7.3.26)$$

式中， $m_0$  就是轻子静质量，满足  $E_f = m_0 c^2$ 。

$$E_f = h_f / t_\phi \quad (7.3.27)$$

对于轻子场来说， $r \leq R$ ，为内禀空间。当  $r \geq R$  时，为轻子场背景场，是连续应变场，为三维连续场。一个轻子场静质量是非常微小的，对背景场的影响是非常微弱的，所以近似于平直场，其时空性质由式 (7.3.26) 表述。正是这种非常微弱的背景场应变构成了我们熟知的万有引力场。

### 7.3.9 运动轻子质量、动量的正交性

当光子和电子耦合的时候，电子获得动能并沿着某一个方向进行传播。电子在运动方向上具有了动量，动量的本质在真空场里就是应变率，因而电子在运动的时候，内禀空间半径  $R_0$  沿运动的  $x$  方向进行收缩，收缩为  $R_x$ ，收缩的量满足狭义相对论，即

$$R_x = R_0 \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (7.3.28)$$

内禀空间方向和  $\vec{v}$  一致。

轻子的运动造成内禀空间的收缩，考虑一个单粒子，参见式 (7.3.28)，内禀空间电力线为

$$p_0(r) = -\frac{e\mathcal{H}\pi \vec{r}}{8\pi r^3 \Phi} \sin \frac{\pi}{\Phi} r, \quad 0 \leq r \leq R$$

粒子沿内禀空间的  $x$  方向运动，那么就要考虑  $R$  在  $\sigma_1$  方向的投影值  $R$ ：

$$R = R_0 \cos \varphi \sin \theta$$

轻子的运动造成内禀空间的收缩满足狭义相对论：



$$p_0 \cdot R_0 \cos \varphi \sin \theta = p \cdot R_0 \cos \varphi \sin \theta \cdot \gamma$$

$$\left| -\frac{e\mathcal{H}\pi}{8\pi r^3\Phi} \sin \frac{\pi}{\Phi} r \right| \cdot 2R_0 \cos \varphi \sin \theta = h \quad (7.3.29)$$

参见第2章中关于光子电力线的普朗克常数的部分，可得到上式的结论。

$$p_0 \cdot \Phi_0 = p \cdot \Phi \gamma = h$$

$$m_0 c \cdot \Phi_0 = h = mc \cdot \Phi \gamma \quad (7.3.30a)$$

当  $\varphi = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$  时，内禀空间方向  $\xi$  和  $\bar{v}$  一致。  $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ ，  $\Phi = \Phi_0 \gamma$ 。

为了对问题进行简化，考虑一个轻子场沿内禀空间的  $\xi$  方向运动，对  $R$  沿  $\xi$  方向求平均得

$$\bar{R} = R_0 \sqrt{1-(v/c)^2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4R_0}{\pi^2 \gamma}$$

$$\bar{R} = \frac{4R_0}{\pi^2} \sqrt{1-(v/c)^2} = R_{0x} \sqrt{1-(v/c)^2}$$

$$\text{取 } R_{0x} = \frac{4R_0}{\pi^2}。$$

$$mc \cdot \bar{R} = h_f = m_0 \gamma c \cdot R_{0x} \quad (7.3.30b)$$

$\Phi_0$  是静态粒子的内禀空间半径，粒子的速度越大，则粒子沿运动方向的形状越扁。这里，  $\Phi_0 \dots \Phi$ 。轻子沿  $x$  方向运动，沿  $x$  方向的内禀空间半径发生收缩，如图 7.3.7 所示即

$$\Phi = \Phi_0 / \gamma$$

$$p = p_0 \gamma \quad (7.3.31)$$

$$m = \gamma m_0$$

沿  $x$  方向的内禀空间质量  $m_{0x}$  要发生膨胀，满足如下关系式：

$$m_x = m_{x0} / \sqrt{1-(v/c)^2}$$

粒子质量的狭义相对论力学关系为

$$E/c = \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

该关系式可由场应变的概念得到，证明如下。

$$R_x m_x = h/2 = R_{0x} m_{0x}$$

在  $x$  方向应变区总的长度为

$$R = R_m + R_{\Delta p} \quad (7.3.32)$$

其中，  $R_m$  为静质量应变区的长度平均值，  $R_{\Delta p}$  为动量应变区的长度平均值。

静质量应变区的动量为

$$p_m(r) = -\frac{e\mathcal{H}\pi}{8\pi r^3\Phi} \sin \frac{\pi}{\Phi} R_m$$

负号表明动量的方向指向原点。

动量应变区的动量函数为

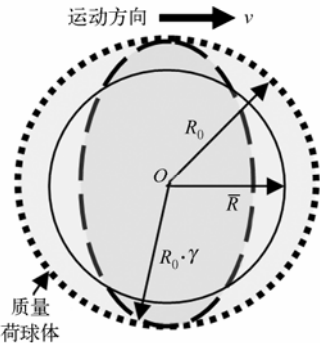


图 7.3.7 运动导致量子场内禀形变

$$\bar{p}(r) = -\frac{e\mathcal{H}\pi \bar{r}}{8\pi r^3\Phi} \sin \frac{\pi}{\Phi} R_{\Delta p}$$

在  $x$  方向应变区总的动量为

$$\vec{p}(r) = \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial r} = -\frac{e\mathcal{H}\pi \bar{r}}{8\pi r^3\Phi} \sin \frac{\pi}{\Phi} \bar{R}$$

$$\bar{R} = \bar{\Phi} / 2 \quad (\text{应变区总长度})$$

$$p = \bar{p}(r) = -\mathcal{H} \frac{\pi}{\bar{\Phi}}$$

总动量和静质量应变及动量应变间的关系可以通过如下方式得到:

$$\begin{aligned} p = \bar{p}(r) &= -\frac{e\mathcal{H}\pi \bar{r}}{8\pi r^3\Phi} \sin \frac{\pi r}{\Phi} = -\frac{e\mathcal{H}\pi \bar{r}}{8\pi r^3\Phi} \sin \left[ \frac{\pi}{\Phi} (R_m + R_{\Delta p}) \right] \\ &= -\frac{e\mathcal{H}\pi \bar{r}}{8\pi r^3\Phi} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{\Phi} R_m \right) \cos \left( \frac{\pi}{\Phi} R_{\Delta p} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{\Phi} R_{\Delta p} \right) \cos \left( \frac{\pi}{\Phi} R_m \right) \right] \end{aligned}$$

这里,

$$\bar{X} = \bar{\Phi} / 2 = R_m + R_{\Delta p}$$

$$\bar{R}_{\Delta p} = \bar{\Phi} / 2 - R_m$$

$$R_m = \bar{\Phi} / 2 - R_{\Delta p} \quad (7.3.33)$$

$$p = -\frac{e\mathcal{H}\pi \bar{r}}{8\pi r^3\Phi} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{\Phi} R_m \right) \cos \frac{\pi}{\Phi} \left( \frac{\Phi}{2} - R_m \right) + \sin \left( \frac{\pi}{\Phi} R_{\Delta p} \right) \cos \frac{\pi}{\Phi} \left( \frac{\Phi}{2} - R_{\Delta p} \right) \right]$$

$$p = -\frac{e\mathcal{H}\pi \bar{r}}{8\pi r^3\Phi} \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi}{\Phi} R_m \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi}{\Phi} R_{\Delta p} \right) \right]$$

同乘因子  $-\frac{e\mathcal{H}\pi \bar{r}}{8\pi r^3\Phi}$ , 得到

$$\left( -\frac{e\mathcal{H}\pi \bar{r}}{8\pi r^3\Phi} \right)^2 = \left[ -\frac{e\mathcal{H}\pi \bar{r}}{8\pi r^3\Phi} \sin \left( \frac{\pi}{\Phi} R_m \right) \right]^2 + \left[ -\frac{e\mathcal{H}\pi \bar{r}}{8\pi r^3\Phi} \sin \left( \frac{\pi}{\Phi} R_{\Delta p} \right) \right]^2 \quad (7.3.34)$$

$p^2 = p_m^2 + \Delta p^2$ , 即:

$$m_0^2 c^2 + p^2 = (E/c)^2$$

$$E/c = \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \quad (7.3.35)$$

这是我们所熟知的粒子的狭义相对论力学关系。

按照狭义相对论, 总能量  $E$  和动量  $(p_x, p_y, p_z)$  像具有不变长度的逆变 4 矢量的分量那样变换<sup>①</sup>

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left( \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)$$

这个不变长度是

$$\sum_{\mu=0}^3 p_\mu p^\mu \equiv p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} \equiv m_0^2 c^2 \quad (7.3.36)$$

① [美] J. D. 比约肯, S. D. 德雷尔 著. 纪哲锐, 苏大春 译. 相对论量子力学. 北京: 科学出版社, p4.

在真空场理论中，质量的本质就是应变所产生的效应，静质量和动质量的本质是一样的，只是观察的状态不同，我们要淡化静质量的概念。

轻子和纵光子的耦合使得内禀空间  $\xi_a$  ( $a=0,1,2,3$ ) 和自由度空间  $x_\mu$  ( $\mu=0,1,2,3$ ) 两个参照系之间满足 Lorentz 变换：

$$\Delta \xi_\mu = \gamma \Delta x_\mu, \quad \mu=0,1,2,3 \quad (7.3.37)$$

粒子质量由内禀空间标架  $\xi_a$  变换到自由度空间标架  $x_\mu$ ，质量之间的关系满足 Lorentz 变换：

$$m = \gamma \Delta m_0 \quad (7.3.38)$$

粒子的总能量为

$$E = \gamma mc = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (7.3.39)$$

$$E_0 = m_0 c^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

$$\text{粒子的动量为 } p^\nu = \frac{m_0 \dot{x}^\nu}{\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}, \quad \dot{p}^\nu = 0$$

$$\text{轻子的动能为 } E = \frac{p^2}{2m_E}, \quad \text{动量为 } p = \sqrt{2m_e E}.$$

## 7.4 真自由粒子Dirac方程

前面我们对电子结构的物理图像有了一个整体的理解，对于电子的这些性质，理论是如何描述的呢？最早 Dirac 用旋量场来描写电子，故称为 Dirac 场。按照 Lorentz 群的旋量表示变换的场称为旋量场。Dirac 场为半整数自旋的粒子。最简单的旋量场是自旋为 1/2 的粒子。前面讨论了粒子的内禀性质，现在我们来描述轻子的整体性质。旋量粒子的场函数用  $\psi(x(\xi))$  表示。

### 7.4.1 Klein-Gordon方程

最简单的量子场是实标量场，只有 5 个自由度（四动量和质量自由度）。标量场由标量粒子构成。对于一个实标量粒子，它具有静质量  $m_0$ ，自旋为 0，无电荷。运动的标量粒子有动量和动能。粒子在内禀空间和自由度空间均满足相对论的能量动量关系：

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4} \quad (7.4.1)$$

粒子在内禀空间的坐标基为  $(\mathbf{e}_{\xi_0}, \mathbf{e}_{\xi_1}, \mathbf{e}_{\xi_2}, \mathbf{e}_{\xi_3})$ ；在自由度空间中，坐标基为  $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ 。于是相对论的能量动量在自由度空间中可以写成如下线性形式。

粒子内禀空间：

$$\sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4} = cp_1 \mathbf{e}_{\xi_1} + cp_2 \mathbf{e}_{\xi_2} + cp_3 \mathbf{e}_{\xi_3} + m_0 c^2 \mathbf{e}_{\xi_0} \quad (7.4.2a)$$

粒子（观测）空间：

$$\sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4} = cp_1\gamma_1 + cp_2\gamma_2 + cp_3\gamma_3 + m_0c^2\gamma_0 = cp\vec{\gamma} + m_0c^2\gamma_0 \quad (7.4.2b)$$

其中, 算符  $\vec{\gamma} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ ,  $\gamma_0 \equiv \gamma_M$  被理解为质量自由度维度的基矢,  $I = \gamma_E$  理解为能量自由度维度的基矢。假定存在如下的算符对应关系:

$$E \rightarrow \hat{E} = i\hbar I \partial_t; \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}; \quad \hat{m} \rightarrow -i\hbar \gamma_0 \partial_4 \quad (7.4.3)$$

$$E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \quad (c=1) \quad (7.4.4)$$

$$i\partial_t \phi(t(\xi), x(\xi)) = \sqrt{-\nabla^2 + m^2} \phi(t(\xi), x(\xi)) \quad (7.4.5)$$

对上式两边的算符均重复作用一次, 得到

$$(\nabla^2 - \partial_t^2 - m^2)\phi(t(\xi), x(\xi)) = 0$$

记  $\square = \nabla^2 - \partial_t^2$  (这里  $\square' = \partial_t^2 - \nabla^2 = -\square$ ), 可得到我们熟知的 Klein-Gordon 方程:

$$(\square' - m^2)\phi(x(\xi)) = 0 \quad (7.4.6)$$

$$\phi(x(\xi)) = A \exp i \left[ \vec{k}\vec{x}(\xi) - k_0 t(\tau) + \frac{mc^2}{\hbar} x_4(\xi(\tau, \sigma)) \right] \quad (7.4.7)$$

这里的  $x_M(\xi(\sigma^i)) \equiv x_4$ ,  $i=0,1$ 。下标  $M$  表示质量维度, 质量荷本身因塑性变形而存在更小的内禀结构  $\xi(\sigma^i)$ 。对于点粒子而言,  $x_M(\xi(\sigma^i)) \equiv x_M(\xi)$ 。

从前面对于轻子内禀结构的理解, 我们得知质量为轻子的内禀空间的三维平移。这里再强调一下。

$$x_M(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_1(\sigma^i) \\ \xi_2(\sigma^i) \\ \xi_3(\sigma^i) \end{pmatrix}; \quad x_0(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x_1(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x_2(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x_3(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

Klein-Gordon 方程可写为

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x(\xi)) = 0 \quad (7.4.8)$$

$\mu=0,1,2,3,M$ , 有 5 个自由度,  $\mu=M$  表示质量维度。

## 7.4.2 自由粒子的 Dirac 方程和 $\gamma$ 矩阵

四动量算符  $p_\mu$  记为

$$p_\mu = i\hbar \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\hbar \gamma_\mu \partial_\mu, \quad (\mu=0,1,2,3)$$

在真空场中, 四动量算符  $p_\mu$  被推广到自由度空间中, 自由度空间算符和四动量算符  $p_\mu$  形式一致, 统一用大写的  $P_\mu$  表示。

$$P_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\hbar \partial_\mu, \quad (\mu=0,1,2,3,\dots,N, \quad N \dots 3) \quad (7.4.9)$$

自由度空间维数为  $N$ ,  $\mu=0,1,2,3 \dots N$ ,  $N \dots 3$ , 自由度由 4 个自由度扩张为  $N$  自由度。量子场的四动量是量子场内禀空间最基本的 4 个自由度 (3 个动量自由度和 1 个时间自由度), 在这些自由度的基础上, 新增加了质量、电荷和自旋自由度。自旋自由度比较特殊,

自旋振幅含在量子场的旋量振幅  $u$  中, 自旋的能量含在静质量中。可以考虑把自旋角动量值  $\hbar/2$  直接放在  $e$  指数函数中, 写为

$$u \exp(-ik_\mu x^\mu + iJ_S x_S)$$

其中

$$x_S = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

这里,  $x_S$  具有 2 维结构;  $J_S = \frac{1}{2}$  是粒子自旋角动量, 粒子沿  $\xi^3$  传播, 自旋垂直于传播方向, 存在于内禀空间  $\xi^1 \xi^2$  面中。标量场自旋为  $J_S = 0$ , 该项可不写。

对于实标量场而言, 内禀空间只有 5 个自由度, 即四动量自由度和质量自由度。这里要特别强调的是前 4 个维度的坐标基为时空坐标。四动量之外的内禀自由度因被封闭在内禀空间中, 可以暂不考虑。

自由度算符可表示 Klein-Gordon 算符为

$$(\square' - m^2)\phi = (p_\mu p^\mu - \partial_m^2)\phi = (\hat{p}_0^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{m}^2)\phi = (\eta_{\mu\nu} P_\mu P^\nu)\phi \quad (7.4.10)$$

$\partial_m$  表示对质量维度求导。将上式分解为

$$p_\mu p^\mu - m^2 = (\hat{p} + m)(\hat{p} - m) \quad (7.4.11)$$

其中

$$\hat{p} = p_\mu \gamma^\mu \quad (7.4.12)$$

利用上述关系可得

$$(\square' - m^2) = -(i\gamma^\mu \partial_\mu + i\gamma^m \partial_m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - i\gamma^m \partial_m) \quad (7.4.13)$$

相对论的场函数应满足 Klein-Gordon 方程, 故设 Dirac 场函数为  $\psi(x)$ , 则应有

$$(\square' - m^2) \psi(x) = 0 \quad (7.4.14)$$

结合式 (7.4.13) 和式 (7.4.14), 可得到 Dirac 方程:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (7.4.15)$$

把质量视为一个独立自由度后, 可写成

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi = 0$$

定义  $\psi$  的 Dirac 共轭场  $\bar{\psi}$  为

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (7.4.16)$$

则对式 (7.4.15) 取厄米共轭并右乘  $\gamma^0$ , 可得到  $\bar{\psi}$  的 Dirac 方程:

$$\bar{\psi}(i\gamma^\nu \bar{\partial}_\nu - i\gamma^m \partial_m) = \bar{\psi}(i\gamma^\nu \bar{\partial}_\nu + m) = 0 \quad (7.4.17)$$

质量为一个独立自由度, 可写成

$$\bar{\psi}(i\gamma^\nu \bar{\partial}_\nu) = 0$$

$\bar{\partial}_\nu$  上的箭头表示它向前作用在  $\bar{\psi}$  上。这里,  $b\bar{\partial}_\mu \equiv -\partial_\mu b$ 。

Dirac 场  $\psi$  应是四分量的, 可表示为

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = (\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4)^T \quad (7.4.18)$$

其中，上角标 T 表示矩阵转置。这样，式 (7.4.15) 实际上包含了 4 个方程。

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - mI)_{\alpha\beta} \psi_\beta = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4) \quad (7.4.19a)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - i\gamma_M \partial_M)_{\alpha\beta} \psi_\beta = 0$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (7.4.19b)$$

这里， $i\gamma_M = I$ ， $\psi_i = u \exp i \left( k_0 t(\xi) - \bar{k}\bar{x}(\xi) - \frac{mc^2}{\hbar} x_M (\xi(\sigma^i)) - \frac{1}{2} x_S \right)$

$\gamma$  是粒子空间的坐标基，表达了量子场相互作用空间的性质，内禀空间自旋自由度的坐

标空间基  $\boldsymbol{\gamma}_S = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ 。

## 7.5 Dirac方程的性质

### 7.5.1 Dirac方程的Lorentz不变性

物理可观察量都是用双线型旋量表示的。Dirac 方程为双线型旋量表示，必须具有 Lorentz 不变性。从物理学的图像来看，Lorentz 不变性所对应的物理事实是轻子的背景空间发生改变，描述轻子运动特性的 Dirac 方程在形式上不变。即轻子的物理学运动物性与背景空间的改变无关。现来证明它具有 Lorentz 变换下的不变性。Lorentz 变换是 4 维时空中的变换，不是 5 维自由度空间变换（加上质量维），因而有必要把质量视为一个标量来考虑，把多余的维度归结为一个常数  $K$ 。最简单的考虑是回到传统量子场论的形式来考虑 Dirac 方程的 Lorentz 变不变性。考虑在 Lorentz 变换下，这时坐标变换如下：

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu, \quad a^\mu_\nu = g^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, \quad \partial'_\mu = (a^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu \quad (7.5.1)$$

在坐标变换之下，

$$K\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = L(a)\psi(x) \stackrel{\text{式(7.5.1)}}{=} L(\omega)\psi(x) \quad (7.5.2)$$

乘以一个常数不影响上述结论。对于多自由度的场量，

$$\psi_i = u \exp i \left( k_0 t(\xi) - \bar{k}\bar{x}(\xi) - \frac{mc^2}{\hbar} x_M (\xi(\sigma^i)) - k_j x_j \right)$$

可以把时空自由度、质量自由度和其他内禀自由度分开，写成

$$\begin{aligned} \psi_i &= u \exp i \left( k_0 t(\xi) - \bar{k}\bar{x}(\xi) - \frac{mc^2}{\hbar} x_M \right) \exp i (k_j x_j), \quad j = 4, 5, \dots, N \\ &= uK \exp i \left( k_0 t(\xi) - \bar{k}\bar{x}(\xi) - \frac{mc^2}{\hbar} x_M \right) \end{aligned}$$

这里， $K = \exp i(k_j x_j)$ ，其他自由度因被封闭在内禀空间中，与时空无关，可以视为一个常

数，从而有

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)K\psi(x) = 0 \rightarrow (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') \stackrel{\text{式(7.5.1)}}{=} \left( i\gamma^\mu (a^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu - m \right) L(\omega)\psi(x) = 0 \quad \text{式(7.5.2)}$$

上式第一项插入  $L(\omega)$   $L^{-1}(\omega)$  项，得到

$$L(\omega)[iL^{-1}(\omega)\gamma^\mu L(\omega)(a^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu - m]\psi(x) = 0 \quad (7.5.3)$$

Dirac 方程的 Lorentz 不变性是指变换后的波函数  $\psi'(x')$  和变换前的波函数  $\psi(x)$  满足形式相同的方程式，对比 Dirac 方程，要求

$$L^{-1}(\omega)\gamma^\mu L(\omega)(a^{-1})^\nu_\mu = \gamma^\nu$$

即

$$L^{-1}(\omega)\gamma^\mu L(\omega) = a^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (7.5.4)$$

证明 Dirac 方程具有 Lorentz 不变性的问题，转化为要证明是否存在满足式 (7.5.4) 的  $L(\omega)$ 。为了找到  $L(\omega)$  的具体形式，在  $\omega=0$  点，对  $L(\omega)$  用马克劳林 (Maclaurin) 公式展开。

$$L(\omega) = L(0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial L(\omega)}{\partial \omega_{\mu\nu}} \right)_{\omega=0} \cdot \omega_{\mu\nu} + o(\omega^2) \quad (7.5.5)$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \left( \frac{\partial L(\omega)}{\partial \omega_{\mu\nu}} \right)_{\omega=0} \cdot \omega_{\rho\sigma} = \left( \frac{\partial L(\omega)}{\partial \omega_{\nu\mu}} \right)_{\omega=0} \cdot \omega_{\nu\mu}, \text{ 需加 } \frac{1}{2} \text{ 消除多余求和项} \\ & \rightarrow \left( \frac{\partial L(\omega)}{\partial \omega_{\mu\nu}} \right)_{\omega=0} \cdot \omega_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \quad (7.5.6) \\ & \quad \text{在无穷小变换下} \end{aligned}$$

$$L(\omega) = L(0) - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \cdot \omega_{\mu\nu} + o(\omega^2), \quad (7.5.7)$$

旋量的变换矩阵  $L(\omega)$  化为

$$L(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}\right) = I - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \quad (7.5.8)$$

$$L^{-1}(\omega)\gamma^\mu L(\omega) = a^\mu_\nu \gamma^\nu \xrightarrow{\text{式(7.5.4)}} \left(1 - \frac{i}{4} \sigma^{\lambda\nu} \omega_{\lambda\nu}\right)^{-1} \gamma^\mu \left(1 - \frac{i}{4} \sigma^{\nu\lambda} \omega_{\mu\nu}\right) = a^\mu_\nu \gamma^\nu$$

$$\left(1 - \frac{i}{4} \sigma^{\lambda\nu} \omega_{\lambda\nu}\right)^{-1} \gamma^\mu \left(1 - \frac{i}{4} \sigma^{\nu\lambda} \omega_{\mu\nu}\right) = (g^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) \gamma^\nu$$

略去高阶无穷小项，有

$$(\gamma^\mu \sigma^{\nu\lambda} - \sigma^{\nu\lambda} \gamma^\mu) \omega_{\nu\lambda} = 2i \omega^\mu_\nu \gamma^\nu = 2ig^{\mu\nu} \omega_{\nu\lambda} \gamma^\lambda = i(g^{\mu\nu} \gamma^\lambda - g^{\mu\lambda} \gamma^\nu) \omega_{\nu\lambda}$$

或

$$[\gamma^\mu, \sigma^{\nu\lambda}] = i(g^{\mu\nu} \gamma^\lambda - g^{\mu\lambda} \gamma^\nu) \quad (7.5.9)$$

可以算出

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (7.5.10)$$

得到有限的转动变换  $L(\omega)$  的矩阵为

$$L(a) = \left[ L\left(\frac{\omega}{N}\right) \right]^N = \left( I - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \frac{\omega^{\mu\nu}}{N} \right)^N = \exp\left(-\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}\right)$$

$L(\omega)$  的存在表明 Dirac 方程具有 Lorentz 不变性。

从线性变换的主动观点出发来考虑, 令 4 维坐标系不动, 量子系统和时空经受无穷小转动, 则转动后的波函数在  $x$  点的值与转动前的波函数在  $a^{-1}x$  点的值由下式联系:

$$\psi'(x) = L(\omega)\psi(a^{-1}x) = L(\omega)\psi(x - \delta x) \quad (7.5.11)$$

其中,  $a_\nu^\mu = g_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu$ 。上式应与式 (7.5.2) 等效。把  $L(\omega) = I - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}$  即式 (7.5.8) 代入式 (7.5.11), 并将  $\psi(x - \delta x)$  在  $x$  点展开, 精确到一阶无穷小量, 可得  $\psi'(x)$  的展开式。

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \left( I - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \right) [\psi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \psi(x) + \underbrace{\frac{1}{2} \partial^\mu \partial^\mu \psi(x) + o(\sigma^4)}_{\text{略去}}] \\ &= \psi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \psi(x) + \underbrace{\frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \delta x^\mu \partial_\mu \psi(x)}_{\text{略去}} \\ &= \psi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \psi(x) \end{aligned} \quad (7.5.12)$$

波函数主动变分为

$$\delta \psi(x) = \psi'(x) - \psi(x) = -\delta x^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \psi(x) \quad (7.5.13)$$

将式 (7.5.12) 改写为

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \left( I - \frac{i}{4} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \right) \psi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \psi(x) = \psi'(x') - \delta x^\mu \partial_\mu \psi(x) \\ &= \psi'(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \psi'(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \psi(x) \end{aligned} \quad (7.5.14)$$

此时给出

$$\delta x^\mu \partial_\mu \psi'(x) = \delta x^\mu \partial_\mu \psi(x) \quad (7.5.15)$$

把算符  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m})$  作用于上式两边, 就得到

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m}) \psi'(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m}) \psi(x) = 0 \quad (7.5.16)$$

这样, 就证明了  $\psi'(x)$  的确满足 Dirac 方程。

### 7.5.2 自由电子相应的静止电子解

考虑一个自由电子及其相应的静止电子解<sup>①</sup>, 对于轻子的静止状态, 我们用一个旋量振幅  $w^1(0)$  来张成轻子的各种状态空间。粒子在自身参考系里, Dirac 方程的解按能量的符号分为两类: 正能解  $\psi^1$ ,  $\psi^2$  和负能解  $\psi^3$ ,  $\psi^4$ 。无论正能解或负能解都分为两种自旋态:  $\psi^1$ ,  $\psi^3$  描写自旋角动量在空间第三轴上的投影为  $\hbar/2$  的态,  $\psi^2$ ,  $\psi^4$  描写自旋角动量在空间第三轴上的投影为  $-\hbar/2$  的态。轻子的波函数为  $\varphi$ , 因而总的波函数可以写为

① J. D. 比约肯, S.D. 德雷尔 著. 纪哲锐, 苏大春 译. 黄念宁 审校. 《相对论量子力学》. 科学出版社, 1984, p10.



$$\psi^r(x) = w^r(0)e^{-(i\varepsilon_r mc^2/\hbar)t}, \quad \varepsilon_r = \begin{cases} +1 & r=1, 2 \\ -1 & r=3, 4 \end{cases} \quad (7.2.17)$$

旋量振幅  $w^r(0)$  表征了轻子的分类和自旋状态。

$$\left. \begin{aligned} \psi^1(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\left(\frac{mc^2}{\hbar}t - \frac{mc}{\hbar}x_m - \frac{1}{2}x_s\right)} \\ \text{轻子, 自旋 } 1/2 \text{ 态, } & \quad +m \\ \psi^2(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\left(\frac{mc^2}{\hbar}t - \frac{mc}{\hbar}x_m - \frac{1}{2}x_s\right)} \\ \text{轻子, 自旋 } -1/2 \text{ 态} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \psi^3(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\left(\frac{mc^2}{\hbar}t - \frac{mc}{\hbar}x_m - \frac{1}{2}x_s\right)} \\ \text{反轻子, 自旋 } 1/2 \text{ 态, } & \quad -m \\ \psi^4(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\left(\frac{mc^2}{\hbar}t - \frac{mc}{\hbar}x_m - \frac{1}{2}x_s\right)} \\ \text{反轻子, 自旋 } -1/2 \text{ 态} \end{aligned} \right\}$$

### 7.5.3 自由粒子Dirac方程的解<sup>①</sup>

对于自由粒子, 哈密顿算符是

$$\hat{H} = c\hat{\alpha} \cdot \hat{p} + \hat{\beta}mc^2 \quad (7.5.18)$$

动量算符  $\hat{p} = (\hat{p}^1, \hat{p}^2, \hat{p}^3) = -i\hbar\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$ , 首先, 算符  $\hat{p}$  和  $\hat{H}$  对易:

$$[\hat{p}, \hat{H}] = 0 \quad (7.5.19)$$

即动量是守恒量, 自由 Dirac 粒子动量守恒。为求解自由粒子的 Dirac 方程式, 令

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right) \quad (7.5.20)$$

使式 (7.5.20) 分离变量, 得出定态 Schördinger 方程:

$$(c\hat{\alpha} \cdot \hat{p} + \hat{\beta}mc^2)\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}) \quad (7.5.21)$$

进一步, 由于矩阵  $\alpha$  和  $\beta$  可以写成以泡利矩阵  $\vec{\sigma}$  和单位矩阵为元素的  $2 \times 2$  矩阵, 因此, 可以将 4 分量旋量波函数  $\psi$  分解为两个旋量波函数  $\varphi$  和  $\chi$ 。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (7.5.22)$$

将它代入式 (7.5.21), 得

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \hat{p} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (7.5.23)$$

即

① 苏汝铿. 理论物理学基础教程丛书《量子力学》. 复旦大学出版社, 1997, P559~566.

$$\begin{cases} E\varphi = c\hat{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}\chi + mc^2\varphi \\ E\chi = c\hat{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}\varphi - mc^2\chi \end{cases} \quad (7.5.24)$$

由于自由 Dirac 粒子动量守恒, 具有确定动量的态是

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}\right) \quad (7.5.25)$$

将式 (7.5.25) 代入式 (7.5.24), 得

$$\begin{cases} (E - mc^2)\varphi - c\hat{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}\chi_0 = 0 \\ -c\hat{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}\varphi_0 + (E + mc^2)\chi_0 = 0 \end{cases} \quad (7.5.26)$$

式 (7.5.26) 具有非零解的条件是其系数行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} E - mc^2 & -c\hat{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}} \\ -c\hat{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}} & E + mc^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.5.27)$$

利用泡利矩阵公式

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (7.5.28)$$

可求出式 (7.5.27) 的解为

$$E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \equiv \lambda \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \equiv \lambda E_p \quad (7.5.29)$$

式 (7.5.29) 中,  $\lambda = \pm 1$ ,  $\lambda$  的正、负号分别对应于 Dirac 方程的正能解和负能解。将  $E = \lambda E_p$  代入式 (7.5.26), 得

$$\chi_0 = \frac{c\hat{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}}{E + mc^2} \chi_0, \quad \varphi_0 = \frac{c\hat{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}}{E - mc^2} \varphi_0 \quad (7.5.30)$$

式 (7.5.30) 表明, 一旦  $\varphi_0$  给定,  $\chi_0$  就可求出。 $\varphi_0$  可由归一化条件确定。令  $\varphi_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ , 归一化的条件是

$$\varphi_0^\dagger \varphi_0 = u_1^* u_1 + u_2^* u_2 = 1 \quad (7.5.31)$$

$u_1, u_2$  是常数。因此, 自由 Dirac 方程的解是

$$\psi_{\vec{p}\lambda}(\vec{x}, t) = N_\lambda \left( \begin{array}{c} \varphi_0 \\ \frac{c\hat{\sigma} \cdot \vec{p}}{mc^2 + \lambda \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}} \varphi_0 \end{array} \right) \frac{\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - \lambda E_p t)\right]}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad (7.5.32)$$

式中,  $\lambda = \pm 1$ ,  $N_\lambda$  是归一化常数, 可由

$$\int \psi_{\vec{p}\lambda}^\dagger(\vec{x}, t) \psi_{\vec{p}'\lambda'}(\vec{x}, t) d^3x = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (7.5.33)$$

确定, 结果为

$$N_\lambda = \sqrt{\frac{m_0 c^2 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}} \quad (7.5.34)$$

对应于  $\psi_{\vec{p}\lambda}(\vec{x}, t)$  的能谱。

## 1. 角动量

Dirac 方程的神奇之处在于自动地包含了轻子具有  $\hbar/2$  自旋的特性。虽然 Dirac 方程并没有给出自旋成因, 但通过对 7.2 节轻子自旋的了解, 我们从真空动力学的角度认识了自旋的成因。这里我们从数学的角度来找出了自旋的成因。

轨道角动量  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  不是好量子数, 因为  $\hat{L}$  和  $\hat{H}$  不对易。可以证明

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{L}_x}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{L}_x, \hat{H}] = \frac{c}{i\hbar} [\hat{L}_x, \hat{\alpha}_x \hat{p}_x + \hat{\alpha}_y \hat{p}_y + \hat{\alpha}_z \hat{p}_z] \\ &= \frac{c}{i\hbar} \{ \hat{\alpha}_x [\hat{L}_x, \hat{p}_x] + \hat{\alpha}_y [\hat{L}_x, \hat{p}_y] + \hat{\alpha}_z [\hat{L}_x, \hat{p}_z] \} \\ &= c [\hat{\alpha}_y \hat{p}_z - \hat{\alpha}_z \hat{p}_y] = c (\vec{\alpha} \times \vec{p})_x \neq 0 \end{aligned} \quad (7.5.35)$$

即

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = c (\vec{\alpha} \times \vec{p}) \quad (7.5.36)$$

轨道角动量不守恒。这意味着 Dirac 粒子必然存在内禀角动量。它和轨道角动量一起构成的角动量才是守恒量。为了找出这个内禀角动量, 定义矩阵

$$\vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}, \quad (i = x, y, z) \quad (7.5.37)$$

直接利用 Pauli 算符的对易关系可以证明

$$[\vec{\Sigma}, \beta] = 0, \quad [\Sigma_i, \alpha_i] = 0 \quad (7.5.38)$$

$$[\Sigma_x, \alpha_y] = 2i\alpha_z, \quad [\Sigma_y, \alpha_z] = 2i\alpha_x, \quad [\Sigma_z, \alpha_x] = 2i\alpha_y \quad (7.5.39)$$

算符  $\Sigma$  和  $H$  的对易关系是

$$\begin{aligned} [\Sigma_x, H] &= [\Sigma_x, c\vec{\alpha} \cdot \vec{p}] = c [\Sigma_x, \alpha_y p_y + \alpha_z p_z] \\ &= 2ic(\alpha_z p_y - \alpha_y p_z) = -2ic(\vec{\alpha} \times \vec{p})_x \end{aligned} \quad (7.5.40)$$

因此

$$\left[ \frac{\hbar}{2} \Sigma, H \right] = -i\hbar c (\vec{\alpha} \times \vec{p}) \quad (7.5.41)$$

利用式 (7.5.35) 和式 (7.5.40), 总角动量  $\vec{J}$  为

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2} \Sigma \quad (7.5.42)$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \quad (7.5.43)$$

由此得出结论, Dirac 粒子存在内禀角动量  $\vec{S}$ :

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \Sigma \quad (7.5.44)$$

它和轨道角动量一起, 合成的总角动量  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  守恒。 $\vec{S}$  称为自旋角动量。因此, 自旋量子数自动包含在 Dirac 方程中。这里, 虽然 Dirac 方程并没有给出自旋的成因, 但 Dirac 方程描述的粒子具有自旋, 其值为  $\hbar/2$ 。

## 2. 螺旋度算符 (Helicity)

螺旋度所对应的算符为  $\hat{\Lambda}_s$ , 是自旋算符  $\hat{S}$  在动量方向上的投影。

$$\hat{\Lambda}_S = \bar{S} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\hbar}{2} \Sigma \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (7.5.45)$$

该算符满足

$$[\Lambda_S, H] = 0 \quad (7.5.46)$$

$$[\Lambda_S, \vec{p}] = 0 \quad (7.5.47)$$

下面来求它的矩阵表示。为不失一般性，选  $\vec{p}$  的方向就是  $z$  的方向，即  $\vec{p} = \{0, 0, p\}$ ，于是由式 (7.5.37) 得

$$\hat{\Lambda}_S = S_z = \frac{\hbar}{2} \sum_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.5.48)$$

$\hat{\Lambda}_S$  的本征值是  $\pm\hbar/2$ 。 $\hat{\Lambda}_S$  的本征矢是

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u_{-1} \end{pmatrix} \quad (7.5.49)$$

其中，

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (7.5.50)$$

是  $\sigma_z$  的本征矢。因此，自由 Dirac 粒子的波函数可按正负能量、正负螺旋度来进行分类。

$$\psi_{p_z, \lambda, \sigma} = N_\lambda \left( \frac{u_\sigma}{\frac{c\sigma_z p}{mc^2 + \lambda E_p}} u_\sigma \right) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_z z - \lambda E_p t)\right], \quad \begin{pmatrix} \lambda = \pm 1 \\ \sigma = \pm 1 \end{pmatrix} \quad (7.5.51)$$

### 3. Dirac方程新的表述形式

为了使理论形式更为简洁和直观，现在给出 Dirac 方程新的表述形式。

$$\psi_{p_z, \lambda, \sigma} = N_\lambda \left( \frac{u_\sigma}{\frac{c\sigma_z p}{mc^2 + \lambda E_p}} u_\sigma \right) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_z x_3 - \lambda E_p x_0 + mc^2 x_4)\right], \quad \begin{pmatrix} \lambda = \pm 1 \\ \sigma = \pm 1 \end{pmatrix}$$

自由粒子 Dirac 方程的解正确地描述了电子的特性，下面我们从真空的性质的基本假设来建立轻子内禀结构的模型，并由轻子的内禀性质归纳得到和自由粒子 Dirac 方程的解一致的结果。

$\hat{\Lambda}_S = \gamma_S$  为自旋投影的自由度空间基， $\gamma_S \frac{\partial}{\partial x_S}$  为自旋投影算符。对所有因素进行考虑，可得

$$\psi_{p_z, \lambda, \sigma} = N_\lambda u \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\sum_{j=1}^3 (p_j + A_j)x_j - \lambda(E + A_0)x_0 + mcx_4 + \frac{\hbar}{2}x_5\right]\right\}$$

### 7.5.4 拉格朗日形式

通过作用量原理来导出拉氏量。从自由 Dirac 方程出发。

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (7.5.52)$$

可写成  $(i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi = 0$ ，左乘  $\delta\bar{\psi}$  并对  $t_1$  与  $t_2$  之间的全部时空积分构造拉氏量：

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \delta\bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi(x) = \delta \int_{t_1}^{t_2} d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi(x) \quad (7.5.53)$$

由此得出拉氏密度：

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu) \psi(x) \quad (7.5.54)$$

上式可还原为我们所熟知的形式：

$$\mathcal{L} = i(\bar{\psi}\gamma^\nu \partial_\nu \psi) - m\bar{\psi}\psi \quad (7.5.55)$$

正则方法给出  $\psi$  的共轭动量为

$$\pi_{\psi_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i\psi_\alpha^+ \quad (7.5.56a)$$

$$\pi_{\bar{\psi}_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_\alpha} = 0 \quad (7.5.56b)$$

式 (7.5.56b) 是由于式 (7.5.52) 不含  $\bar{\psi}$  的导数造成的； $i\psi_\alpha^+$  是  $\psi_\alpha$  的共轭动量。Dirac 场的拉氏量密度为

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi\dot{\psi} - L = \psi^+ (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi \\ &= \psi^+ i \frac{\partial}{\partial t} \psi \end{aligned} \quad (7.5.57)$$

最后一步用了 Dirac 方程。 $\mathcal{H}$  的形式如同一个单粒子哈氏量夹在场及其厄米共轭之间，这与非相对论中得到的形式相符合。

能量、动量和角动量等整套守恒定律自动地从  $\mathcal{L}$  的平移不变性和 Lorentz 不变性得到，并可以计算出

$$\mathcal{H}^{\nu\mu} = i\bar{\psi}\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi \quad (7.5.58)$$

由

$$\begin{aligned} H &= \int \mathcal{H}^00 d^3x = \int \psi^+ (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi d^3x = \int \psi^+ (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + i\beta \partial_M) \psi d^3x \\ &= \int \psi^+ (-i\delta_{\mu\nu} \gamma^\mu \partial_\nu) \psi d^3x \end{aligned}$$

以及

$$P = \int \psi^+ (-i\nabla) \psi d^3x \quad (7.5.59)$$

可得角动量密度  $\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}$  和守恒的角动量  $M^{\nu\mu}$  为

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu \left( x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - x^\lambda \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \Sigma^{\nu\lambda} \right) \psi \\ M^{\nu\lambda} &= \int d^3x \mathcal{M}^{0\nu\lambda} \end{aligned} \quad (7.5.60)$$

其中  $\Sigma^{\nu\mu} = \frac{1}{4}[\gamma^\nu, \gamma^\mu]$  是在 Lorentz 变换下的旋量转动矩阵，它在  $\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}$  的最后一项中加上了自旋角动量，特别是对空间分量有

$$J \equiv (M^{23}, M^{31}, M^{12}) = \int d^3x \psi^+ \left( \vec{r} \times \frac{1}{i} \vec{\nabla} + \frac{1}{2} \vec{\sigma} \right) \psi \quad (7.5.61)$$

注意, 这个拉氏量密度的特点是  $\psi$  和  $\psi^+$  (或  $\bar{\psi}$ ) 被当做独立变量处理。而且当  $\psi$  和  $\bar{\psi}$  满足场方程时,  $\mathcal{L}$  为零。

容易看出,  $\mathcal{L}$  是彭加勒变换下的不变量, 因此, 根据奈特定理场的能量、动量和总角动量是守恒量, 利用运动方程 (意味着  $\mathcal{L}=0$ ) 得到 Dirac 场的能量动量张量为

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\nu \vec{\partial}_\nu \psi) \quad (7.5.62)$$

由此, 场的能量、动量分别是

$$H = p^0 = \frac{i}{2} \int \psi^* \vec{\partial}_0 \psi d^3x \quad (7.5.63a)$$

$$p = \frac{i}{2} \int \psi^* \vec{\nabla} \psi d^3x \quad (7.5.63b)$$

拉氏密度 (见式 (7.5.54)) 还有下列内部变换不变性:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\alpha\omega} \psi(x), \quad \psi^+(x) \rightarrow \psi'^+(x) = e^{i\alpha\omega} \psi^+(x) \quad (7.5.64)$$

$\omega$  是与  $x$  无关的无穷小参数。故存在相应的守恒流和守恒荷, 分别为

$$J^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (7.5.65)$$

$$Q = e \int \psi^+ \psi d^3x \quad (7.5.66)$$

轻子是 Fermi 子, 因而 Dirac 场遵守泡利不相容原理, 服从 Fermi-Dirac 统计。关于 Fermi 场的正则量子化参见第 3 章, 也可参见其他量子场书籍。

## 7.6 电磁耦合常数的计算

了解了粒子的内部结构和各种力场的成因, 能估算出电、弱、强 3 种力场的作用强弱。在标准模型理论中, 粒子间相互作用, 是通过交换中间玻色子来传递相互作用的, 每种力场的强弱和作用距离大不一样, 作用强弱用耦合常数来表示, 耦合常数在现有理论中是基本常数, 不可能通过计算得到。在真空场理论中, 我们可以根据真空场的原理来理解耦合常数的物理意义, 并可根椐这一物理意义来估算电磁耦合常数的大小。下面我们从电力线场的性质来估算耦合常数。在计算耦合常数前, 我们先要了解一下耦合常数的物理图像。

### 7.6.1 电磁耦合常数的物理图像

耦合常数的物理图像如图 7.6.1 所示, 它显示的是当虚光子 (只考虑纵波) 进入电子耦合的球面  $4\pi R_e$  内, 虚光子和电子发生相互作用的可能性有多大。在长波长的光子散射实验中, 电荷的值就是在大距离 (低能) 下探测的结果。在真空场理论中, 轻子的静质量与内禀空间大小成反比。假设光子和电子耦合常数若为 1, 则表明光子只要进入电子耦合空间 ( $R_e$  为电子球形耦合空间的半径), 光子就会和电子发生相互作用而发生偏转。换言之, 光子只有进入电子的耦合空间, 光子才有可能放射虚光子 (纵光子) 与电子作用, 如果这样的概率为 1, 说明只要打中目标, 就必然会有相互作用。实际的情况是光子和电子耦合的耦合常数是  $\alpha_e = 1/137$ , 是一个很小的量。

$$\text{振幅} = 1 + \alpha_e ( ) + \alpha_e^2 ( ) + \dots$$

耦合常数具有概率的性质。

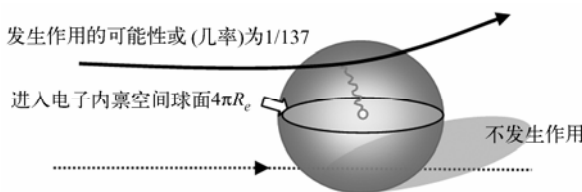


图 7.6.1 耦合常数的物理图像

现在来看一个很典型的例子，考虑图 7.6.2 中光子对电子的汤姆逊（Thomson）散射。对于长波长的光子，截面为

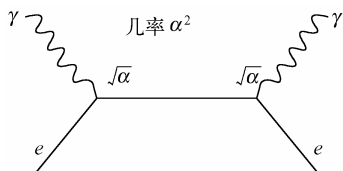


图 7.6.2 Thomson 散射费曼图

$$\sigma_{\text{TH}} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{\alpha}{m_e} \right)^2 = \frac{2}{3} \alpha^2 (4\pi R_e^2) \quad (7.6.1)$$

式中， $R_e$  是电子的 Compton 波长（自然单位制），

$$R_e = \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{1}{m_e}$$

在真空场理论中  $R_e$  就是轻子场内禀空间半径，

$\alpha^2 = g_e = 1/137$  就是电磁耦合常数。这里  $g_e$  和  $e$  的关系如下：

$$g_e = \frac{e^2}{4\pi} \quad (7.6.2)$$

$\alpha^2$  为什么会如此之小呢？现在从真空场角度来分析这一问题。这是因为对于单电子来说要满足以下几个条件这种耦合才能发生：必须存在电力线；光子与电子电力线相耦合；光子与电子电力线相连之后，存在有利于动量（纵光子）传递的角度，最佳的路径就是短程线，该短程线构成相互作用的通道。

## 7.6.2 考虑电子的情况

电子具有电力线结构，于是我们从电力线的角度来看问题。设光子从左至右进入电子的内禀空间，如图 7.6.3 所示。

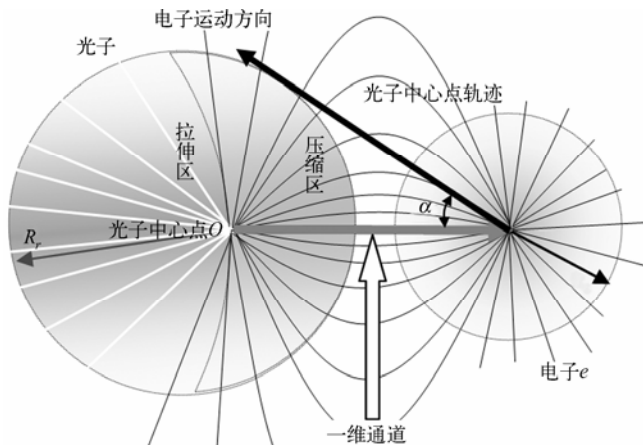


图 7.6.3 电磁相互作用

光子和电子作用的本质是光子的光子中心点通过某根电力线和电子中心点相耦合交换

能量发生相互作用，例如 Thomson 散射。光子是玻色场，所以光子的光子中心点进入到电子的内禀空间内不一定能发生相互作用，对于单电子来说要满足上述 3 个条件，这种耦合才能发生。现在我们根据这一想法来估算一下轻子中心点和光子中心点通过电力线进行耦合的概率。

这里电子通过交换光子实现相互作用，也可以不通过光子来实现相互作用。正反电荷之间交换光子，实现相互吸引的作用力，而相同电荷之间交换光子实现相互排斥的作用力，如图 7.6.4 所示。

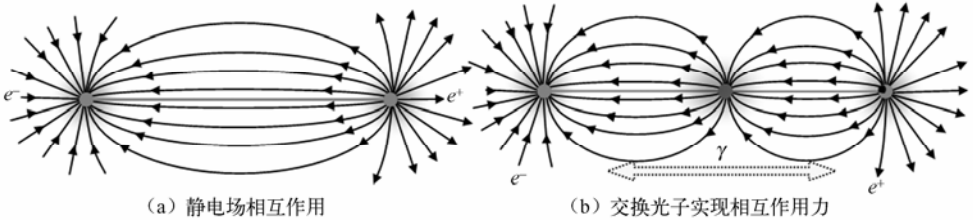


图 7.6.4 电子和光子电力线的耦合

① 电力线要锁定光子的中心点，则显然右半球的真空场不能锁定光子中心点，而只有左半球内的电力线存在锁定光子中心点的可能性，这样就只有 1/2 的电力线有可能。

② 对于电力线来说，基本单元真空场为三维，其中只有一维真空场能形成电力线，于是光子中心点和轻子中心点耦合通道不是三维而仅仅只有一维。若三维均参加耦合传递，则通道的宽为 1，所以现在的通道宽度为 1/3。

③ 在这电力线中，某一电力线与光子中心点和轻子中心点的连接线构成的角度为  $\theta$ ， $\theta$  值越小的电力线锁定光子中心点的可能性越大，换言之， $\theta$  值越小则越有利于光子传递动量，所以还要考虑耦合值的因素，对于左半球耦合平均值估算如下：单电子内禀真空场内的电力线长度为  $R_e(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi$ ，考虑半球，则光子和电子耦合需要的电力线分布是

$$e(\theta, \varphi) = e_N \sin \theta \cos \varphi \quad (7.6.3)$$

$e_N$  表示电力线。满足上述分布的电力线才是耦合需要的电力线。对于电子而言，电力线的分布是球对称的，与  $\theta, \varphi$  无关，即  $e(\theta, \varphi) = e_N$ 。

$$\text{耦合率} = \frac{e_N \sin \theta \cos \varphi}{e_N} = \sin \theta \cos \varphi$$

还有一个因素会影响光子和电子耦合的成功率，那就是耦合瞬间彼此间相对运动的角度，该角度用  $\alpha$  表示， $\alpha$  为 0，电子和光子耦合瞬间在一条线上运动，此时最容易建立耦合关系。综合上述因素，总的耦合率还要乘上一个  $\cos \alpha$  因子，即

$$\sin \theta \cos \varphi \cos \alpha$$

电子和光子的运动都具有波动性，耦合成功率是一个统计的过程。最简单的做法是取平均值，那么平均耦合率为

$$\text{平均耦合率} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = \frac{8}{\pi^3}$$

综合上述三点，对于单个电子电力线耦合锁定光子中心点进行耦合的概率就为



$$\sqrt{\alpha_e} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{\pi^3} = \frac{4}{3\pi^3}$$

### 7.6.3 光子的情况

光子的情况和电子很类似。不同的是光子本身电力线结构与电子有所不同，光子的内禀电力线场在压缩区则形成压缩电力线；在拉伸区则形成拉伸电力线。光子电力线（无论是压缩或拉伸电力线）和电子的电力线耦合而形成光子中心点和轻子中心点之间的一维真空场通道交换纵光子。纵光子的光子中心点沿一维真空场通道进行传输而实现光子和电子之间的四动量传递。

从图 7.6.3 可以看出，当只考虑光子  $\gamma$  时，光子由左边进入右边，对于光子的内禀真空场来说，只考虑压缩区这一半真空场，这一半真空场才有可能形成一维真空场通道。当光子和电子电力线相耦合，一维真空场通道才能形成。和电子分析中的前两点一致。光子的电力线数和电子的电力线数完全相同，但分布却不一样，因而第三点有别于电子。具体考虑如下。

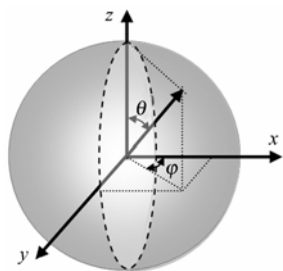


图 7.6.5 光子的球坐标系

光子中心点在与传播方向垂直面的附近电力线应变极小，与光子中心点相交的垂直面  $yz$  面上电力线应变为零。这种差异使光子的耦合电力线比电子的要少。为此，要考虑电力线的空间分布，这样就要求耦合率。

如图 7.6.5 所示，对于光子，在  $yz$  面上无形变，力线  $r$  在  $yz$  面上为零，考虑在  $yz$  面上，当  $\varphi = 0$  时沿  $x$  方向的空间分布应满足

$$R_r(r, \varphi) = r \cos \varphi$$

再考虑  $\theta$  方向， $\theta = 0$  时，无电力线，在球坐标中，

$$R_r(r, \varphi, \theta) = r \sin \theta \cos \varphi$$

光子的电力线分布为

$$e(\varphi, \theta) = e_N \sin \theta \cos \varphi$$

耦合所需的电力线分布为

$$e(\varphi, \theta) = e_N \sin \theta \cos \varphi$$

$$\text{耦合率} = \frac{e_N \sin \theta \cos \varphi}{e_N \sin \theta \cos \varphi} = 1$$

综合考虑，得到

$$\sqrt{\alpha_\gamma} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6}$$

光子和电子相耦合，是光子和电子形成一维真空场通道概率之积，所以光电耦合常数（即概率）为

$$\alpha = \sqrt{\alpha_e} \cdot \sqrt{\alpha_\gamma} = \frac{4}{3\pi^3} \cdot \frac{1}{6} \approx \frac{1}{139.5} \quad (7.6.4)$$

这比实测值  $\alpha = 1/137$  略小。这里考虑的是理想值，范围是电力线耦合的范围，这是一个很大的范围，因为电力线是无限长的，因而这个值应该是耦合常数的下限。对于试验而言，距离要近得多。当然这种估算是很近似的，对于光子形成电力线道通的电力线量还应该

多考虑一些因素，主要有相对论效应导致的电力线分布改变等。这样光子电力线和电子电力线耦合的概率的计算会更可靠一些。

### 7.6.4 近距离的情况

前面的计算没有考虑近距离的情况。在大动量情况下，粒子相互作用变短，有更多的电力线相交，致使相互作用的概率增加，耦合常数变大。 $\alpha(Q^2) \equiv \frac{e^2(Q^2)}{4\pi}$  称为跑动耦合常数。在大  $Q^2 \equiv -q^2$  极限下， $\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{M^2}\right)}$ 。跑动耦合常数  $\alpha(Q^2)$  描述了两个带电

粒子作用时它们的耦合电荷与它们之间距离的依赖关系。

### 7.6.5 光电耦合与经典电磁场

#### 1. 耦合常数 $\alpha$ 与质量的无关性

这里要特别注意  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ 。从前面可知耦合常数是光子形成一维真空场通道和电子形成一维通道的概率之积，但是这种概率和电力线量成正比，由前面分析可知，对于光子来说一维通道是由电子电力线诱导的，所以只与电力线量有关。因而  $e, \mu, \tau$  的耦合常数是相同的。 $\alpha$  与质量无关，而只与电荷质有关，在真空场中，这是一个自然的结论。

#### 2. 通道效应与费曼图

光子和电子作用通过一维真空场通道进行，这种一维通道效应正是耦合常数的本质所在，也正是因为这种一维通道特性的存在使得费曼图得以成立，并能被 QED 做精确表述。图 7.6.2 和图 7.6.3 在本质上是完全等价的。

通道效应是一种量子真空场相互作用的特有效应。对于真空场来说，当大范围发生微小应变时，可以用爱因斯坦的广义相对论来描述。用同样的逻辑，在描述两个量子真空场相互作用时，应该可以用弹性应变理论来描述，实际的情况是由于存在通道传输效应，使得应变理论在这一微观量子领域失效，应变理论不能再描述这种相互作用，取而代之的是现代的量子场理论。可以这样认为：一维通道效应是微扰理论的基础，有这一特性才使计算得以成立。电磁相互作用通过传递虚光子来实现，相互作用的强弱决定于虚光子能量的大小。

## 7.7 中 微 子

本节由真空场的性质出发，讨论中微子的结构，并解释中微子的各种性质。

### 7.7.1 中微子内禀空间的构成

在真空场理论中，中微子是自旋波独立的表现形式。由纯粹自旋态光子构成的量子场定义为中微子。现在具体地看一下其内禀结构。

中微子的结构如图 7.7.1 所示。这样的结构类似于龙卷风，自旋波中心点绕半径为  $R$  的圆环传播。

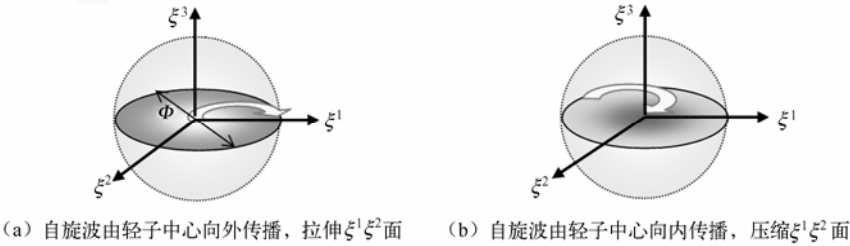


图 7.7.1 中微子的结构

自旋光子中心点是在近似圆盘状的二维面上进行传播的, 自旋波相对于轻子中心向内或向外传播, 就形成了新的轻子场。中微子没有电荷, 无电磁场, 实验无法分辨中微子是左旋还是右旋, 左右旋是简并的。

在真空场论中, 中微子的左旋及右旋的概念对应的是自旋波向内和向外。向内则形成压缩二维轻子场, 为右旋中微子; 向外则形成拉伸二维轻子场, 为左旋中微子。这样, 中微子只有两种: 左旋正中微子和左旋反中微子。

中微子和电子不同, 电子场既有自旋量子波又有静电场, 而中微子场则是纯态的自旋量子波, 也可以理解为纯态的自旋光子, 因而无电荷。

由于自旋光子中心点是在近似盘状的二维面上进行传播的, 中微子的内禀空间可以简化为一个二维圆面, 内禀空间的标架为 $\xi^a, a=0,1,2$ 。中微子的半径为 $R$ 。

自旋波就是一个自旋光子, 自旋光子具有电力线结构。光子电力线的时空总形变量是 $h$ , 也就是自旋光子的总时空形变量。

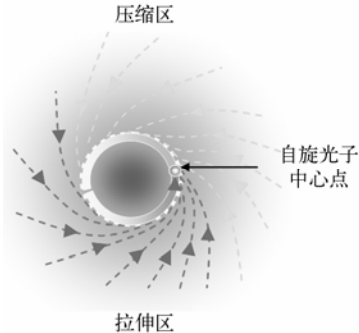
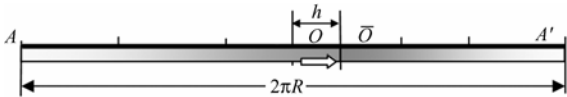
对于自旋光子而言, 电力线分为两部分, 圆环外有 $1/2$ , 圆环内有 $1/2$ 。

和轻子一样, 圆环内有 $1/2$ 电力线, 无观测效应, 自旋角动量是 $\hbar/2$ 。

中微子有环向和径向两种形变如图 7.7.1 所示。

7.7.2 中微子内禀场函数

如图 7.7.2 和图 7.7.3 所示, 自旋光子绕圆环传播, 时空总形变量为 $h$ ; 和轻子不同, 轻子的总形变量是 $h_f$ 。若自旋光子力图向内或向外传播, 那么自旋波就会在二维面上压缩或拉伸圆环内的真空场, 形成二维反轻子或正轻子。就是形变电力线径向形变构成场径向形变。



考虑二维流形的情况, 如图 7.7.4 所示。采用保角变换方式处理。

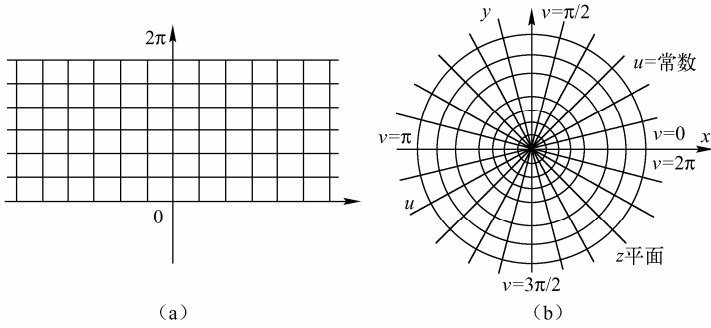


图 7.7.4 把二维面映像为二维轻子场

$$\varphi + i\psi = \frac{i}{2\pi} \log z, \quad t = \log z$$

将上式反演, 则可得  $e' = \sigma^3$  或  $e^u \cos v = \xi^1$ , 以及  $e^u \sin v = \xi^2$ 。并有  $\text{cartan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = v$ , 由此有

$$\sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} = e^u \quad (7.7.1)$$

可以把二维面映像为二维轻子场, 而构成中微子径向场。

对于平直空间的球极坐标

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos v \\ y = R \sin \theta \sin v \end{cases} \quad (7.7.2)$$

即

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R \quad (7.7.3)$$

式 (7.7.1) 和式 (7.7.3) 两者相差  $e^u$ , 这称为势, 势  $e^u$  所对应的是时空应变的量, 沿  $\bar{r}$  方向 ( $0 < r \leq R$ ), 所以可以写为  $e^{u\bar{r}}$ , 虽然我们并不知道  $u$  的具体值, 但可以从轻子单一纤维中知道, 单纤维的场函数为  $\varphi = e^{ikx}$ ,  $k$  为二维波矢, 当单纤维以  $O$  点为圆心在空间沿  $\theta$  转动  $2\pi$  时, 就构成了二维轻子场。由此知道  $u$  便是四维波矢。中微子场的场函数为

$$\varphi_v = e^{ikr}, \quad 0 < r \leq R \quad (7.7.4)$$

其中,  $k_0 = \frac{\pi}{t_\lambda}$ ,  $k = \frac{\pi}{\lambda}$ ;  $E = \frac{h}{\pi} \cdot k_0$ ,  $\bar{p} = \frac{h}{\pi} k\bar{n}$ 。

$$h = \lambda \cdot p_v = t_\phi E_v \quad (7.7.5)$$

$t_\phi$  为轻子内禀时间,  $\lambda = \phi$  是轻子直径。和轻子情况相同, 径向应变含在环向应变中。中微子总动量和能量是

$$2\pi R^\mu \cdot p_\mu = h, \quad \mu = 0, 1 \quad (7.7.6)$$

### 7.7.3 自旋量子波角量

中微子是纯态的自旋量子波, 而自旋量子波就是一个环绕自旋轴转动传播的光子。中微子也具有半向空间性质, 自旋量子波的总形变为  $h$ 。设  $r$  为自旋光子中心点转动传播的平均半径,  $r < R, r \geq 0$ ,  $O$  为轻子内禀空间中心, 当自旋光子横波的波长  $\lambda = 2\pi r$  时, 是自旋

光子的低能稳定态。因而自旋波满足

$$2\pi r \times P = h$$

即  $r \times p = \hbar$ ，为自旋角动量。由于中微子的半向空间性质，所以不可能进入内禀空间轻子中心由里向外进行观测，只能由外向内进行观测。因而自旋光子中心点的外侧是可观测的，而靠轻子中心的内侧，由里至外则是不可观测的。对于这里实验来说自旋角动量为  $S = \hbar/2$ 。

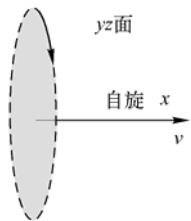


图 7.7.5 自旋与速度的关系

与中微子自旋面相垂直的方向并没有发生场的形变，中微子在传播的时候，场应变总是沿最容易的方向发生形变，因而中微子总是沿与自旋面相垂直的方向进行传播，如图 7.7.5 所示。由于在这个方向没有场应变，因而能以光速传播。二维轻子场的轻子中心达到形变极限，因而  $xy$  面上存静质量，这种二维静质量等于二维场形变率。在  $z$  方向没有场形变，当然也就没有静质量。轻子场运动是轻子场和光子耦合产生的效应，而

耦合总是沿轻子场应变量最小的方向，因而运动总是沿  $z$  轴方向。对于我们的观测来说总是在  $z$  轴方向，而不可能在  $xy$  面上来研究二维轻子场，所以对于观测来说沿  $z$  方向二维轻子场没有静质量。

中微子有 3 种： $\nu_e, \nu_\mu$  和  $\nu_\tau$ 。这是由于自旋波能量不同而造成的。最初还是来自于轻子场的极化度不同，即由  $e, \mu, \tau$  的极化度不同而对应不同的自旋波，从能量最低态为最稳定态的角度来看  $\nu_\mu$  和  $\nu_\tau$  应该会释放能量变为低能态的  $\nu_e$ 。

了解了中微子的内禀结构，便知道中微子的本质就是纯态自旋波。显然没有自旋也就没有中微子的存在。在二维面上中微子具有半向空间效应，并且对于观测，沿  $z$  轴不存在静质量。这样微子沿内禀  $z$  轴方向传播时，传播速度为  $c$ ，即为光速。在这里自旋波向内所构成的中微子和以前概念中的右旋反中微子对应，为反半向空间；而自旋波向外所构成的中微子则和以前概念中的左旋中微子对应，为正半向空间。这与自旋波的左或右无关。这和我们以前的概念是大不一样的，在场论中，把自旋波的正反半向空间特性错误地理解为自旋波的左右旋特性。

对于二维球对称应变，有

$$u_\theta = \frac{H}{2} \cos \frac{\pi r}{2R} \cos \frac{\theta \pi r}{2\pi R}, \quad u_r = \sin \varphi \quad (\text{构成一个环状的圆环管}), \quad u_\varphi = \sin \frac{r\pi}{R}$$

$$u_x = u_r \cos \varphi, \quad u_y = u_r \sin \varphi$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{r\varphi} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_\theta & \varepsilon_{\theta\varphi} \\ \varepsilon_{\varphi r} & \varepsilon_{\varphi\theta} & \varepsilon_\varphi \end{pmatrix} \quad (7.7.7)$$

轻子的内禀场是球对称应变，可求出静态轻子内禀场应变的函数。

$$\varepsilon_{\theta r} = \varepsilon_{r\theta} = 0, \quad \varepsilon_{\theta\varphi} = \varepsilon_{\varphi\theta} = 0, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = 0$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\mathcal{H}}{2} \cos \frac{\pi}{\Phi} r \quad (7.7.8)$$

$r$  方向的  $g_r$  为

$$g_r = \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = -\frac{\mathcal{H}}{2} \cdot \frac{\pi}{\phi} \sin \frac{\pi}{\phi} r \quad (7.7.9)$$

沿  $\theta$  和  $\varphi$  方向有

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} \quad (7.7.10)$$

#### 7.7.4 中微子的静质量

在直角坐标系里，借助于电子的内禀场结构函数，可直接给出静态轻子内禀场应变的函数

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{静质量}} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{自旋项}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon'_{01} & -\varepsilon'_{02} & 0 \\ \varepsilon'_{10} & 0 & -\varepsilon'_{12} & 0 \\ \varepsilon'_{20} & -\varepsilon'_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{自旋项}} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{自旋项}}$$

中微子的内禀四动量为

$$p = \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

将内禀空间  $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$  扩展到坐标观测空间  $(t, x, y, z)$ ，中微子在  $z$  轴上具有纵光子的效应，满足如下波动方程

$$\frac{\partial^2 \varphi^\mu}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial t^2} = 0$$

中微子沿  $z$  轴方向以光速运动（对于观测来说要引入螺旋度算符以确定传播方向）。另一方面，中微子在与传播方向垂直的  $x, y$  二维面上又具有二维静质量

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi^\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^\mu}{\partial y^2} \right) = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 = m_{xy}^2 \quad (7.7.11)$$

这种质量不具有三维性质，因而沿  $z$  轴传播方向上无可观测性。

中微子的上述性质使得中微子具有这样独特的性质：中微子能以光速传播，沿传播方向，中微子的性质类似于光子，没有静质量。从实验上来看，中微子会带走一部分能量，该能量  $\varepsilon_0 = E_s$ ， $E_s$  就是中微子的自旋能量。该自旋能量没有静质量效应，但是大量的中微子具有引力效应。

#### 7.7.5 半向空间的概念

前面说过时间是通过相对运动而比较出的一种动态的量。以光波在真空场中的传播作为一种时空基准，便可以在同一区域中校准我们的时钟。对于真空场来说，只要发生应变，就会影响传播能力，使传播速率下降，因而在拉伸场和压缩场区域中，时钟都会变慢。从这种意义上说，存在一个理想平直无形变的真空场区域，那里的时间最快。

平直真空场没有可观测效应，为真空态，只有在场应变以后，才存在力场，也才存在

物质，时空间才有意义。为了区别两种不同形式的场，规定压缩真空场的空间为负空间，而拉伸真空场的空间为正空间。正反时空与拉伸、压缩场对应的。拉伸场和压缩场总是以对偶的形式出现的，这一事实所对应的便是时空具有对称性。所以我们可以说时空对称性来自于真空场应变的对称性，这便是时空对称性的物质本质。当然时空并不是总是对称的，也会发生不对称。如果某一局域场，只存在拉伸真空场，或者只存在压缩真空场，那么这个局域真空场的整体便构成只有正空间或只有负空间的奇特的不对称空间。

普通的笛卡儿坐标空间，也可称为全向空间，在这样的空间里，任意一个向量转动  $180^\circ$  以后，则达到与原来相反的指向，如图 7.7.6 (b) 所示。

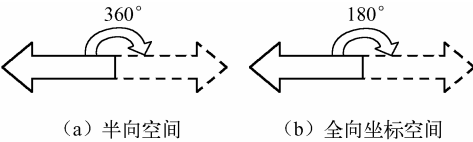


图 7.7.6 半向空间和笛卡儿坐标空间示意图

当产生一对轻子后（费米子），反的轻子为压缩场而无拉伸场存在，而正的轻子则只有拉伸场存在而无压缩场。于是物理空间发生分裂，一个全向的空间分裂为两个独立的半向空间，分别为正半向空间和反半向空间，如图 7.7.7 所示。

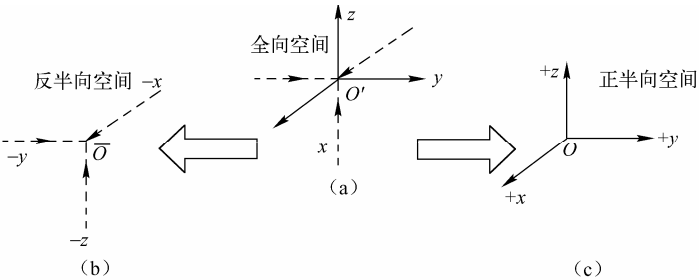


图 7.7.7 半向空间的形成

这种分裂后的空间是一种非常奇特的空间，所有的维度依然保持原来的特性，但方向却仅有原来的一半，构成半向空间。在半向空间中，一个向量转动  $360^\circ$  时，仅相当于全向空间转动  $180^\circ$ 。

把只具有单一的正空间或负空间的空间定义为半向空间。轻子的内禀空间就是半向空间。全向空间中的场量  $\Phi(x, y, z)$ ，其三维空间由  $x, y, z$  和  $-x, -y, -z$  轴构成。空间反演，满足

$$\hat{P}\Phi(x, y, z) = \Phi(-x, -y, -z)$$

其中， $\hat{P}$  为空间反演算符。

半向空间是由全向空间分裂得到的，那么应该存在一种操作算符，该算符使坐标空间变为半向空间。半向空间具有宇称不守恒性。

在费米子内禀空间中，空间变为半向空间时空，记正半向空间为  $\Phi_L$ ，有

$$\Phi_L = \hat{P}_L \Phi \tag{7.7.12}$$

其中， $\hat{P}_L$  为正半向空间算符，该算符作用到矢量空间上，则分离出正半向空间。记反半向空间为  $\Phi_R$ ，有

$$\Phi_R = \hat{P}_R \Phi \quad (7.7.13)$$

其中,  $\hat{P}_R$  为反半向空间算符。正反半向空间的场量相加, 便得到一个矢量空间的场量, 即回到普通空间。

$$\Phi_L + \Phi_R = \Phi \quad (7.7.14)$$

由式 (7.7.25) 可得

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi(x) = \psi_R(x)$$

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi(x) = \psi_L(x)$$

对比式 (7.7.12) 和式 (7.7.13) 可得到

$$\hat{P}_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad \hat{P}_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$$

这便是半向空间算符。

在拉伸轻子场  $\Omega$  内, 任一基本单元应变变为

$$\varepsilon_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3 \quad (7.7.15)$$

拉伸场的场量对应正半向空间场量, 而压缩场的场量对应反半向空间场量, 任一基本单元应变变为

$$\varepsilon_i \leq 0, \quad i=1, 2, 3 \quad (7.7.16)$$

对于相互作用场量而言, 相互作用过程中, 拉伸场量和压缩场量存在并相等, 那么相互作用场量就是矢量场, 与背景场无关。换言之, 半向空间内部的某一小局域区间内, 如果场应变满足  $|\varepsilon_i| = |\varepsilon_{-i}|$ , 那么在半向空间内部, 所感知的空间依然具有宇称对称。半向空间性是一种整体场所表现出来的特性, 具有整体性。具体地说量子场中的轻子整体(费米子)才具有半向空间特性。

### 7.7.6 费米子场的半向空间效应

在全向空间中自旋波存在 4 种自由度: 自旋波向内左旋, 自旋波向内右旋, 自旋波向外左旋, 自旋波向外右旋。对于轻子场而言, 存在两种场: 拉伸或压缩构成的应变场。这种应变场限制在内禀空间内, 是弱作用场。拉伸构成正空间, 而压缩则构成负空间, 空间发生分离而形成半向空间, 全向空间分离为正半向空间和反半向空间。因而轻子应变场具有半向空间效应, 这奇特的半向空间效应使得我们所熟知的全向空间中的宇称对称性遭到破坏。半向空间相互作用时, 左右对称性也失去了矢量空间通常的意义。

在这里要注意的是具有纤维结构的静电场由于对时空没有影响, 因而并不具有半空间效应。

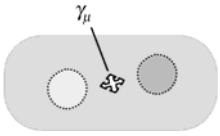
对于轻子, 自旋波在内禀空间中绕  $z$  轴转动, 半向空间的存在破坏了空间对称性, 使得自旋在半向空间指向只有一个方向, 所以自旋角动量也失去了对称性, 只有一个指向。

弱作用是在费米子内禀空间内进行的 (即在半向空间中), 这样宇称遭到破坏。就自旋波的左右而言, 由于静质量的存在, 使得轻子场的传播速度小于  $c$ , 从宏观上来说, 自旋波的左右旋对称性得到恢复, 在磁场中由于电力线和自旋方向相关, 左旋和右旋便显出差异。但半向空间的内禀指向没有恢复, 仍然只有一个指向。

从场的角度来看, 电子就是某一场基本单元处于空穴态或游离态, 对背景真空场造成



形变而形成具有电力线结构效应并以自旋波形式存在的这种整体。



$\Omega$ 区域内,相互作用顶点正应变场恒等于反应变场导致 $\gamma_\mu$ 求迹为零

图 7.7.8 对偶粒子及作用顶点

轻子场（即费米子）由于具有半向空间特性，半向空间正好对应旋量。因而在粒子物理学中，用旋量表示费米子。对于  $\Omega$  区域来说，如果要同时表述对偶粒子，则对偶粒子的正应变场恒等于反应变场导致  $\gamma_\mu$  求迹为零。费米子具有半向空间特性，因而要用双旋量表示。由于这两个条件，则必然要用矩阵表述，这便是狄拉克方程。

对于一个相互作用顶点  $\gamma_\mu$ ，如图 7.7.8 所示，其正应变场恒等于反应变场导致  $\gamma_\mu$  求迹为零。

### 7.7.7 中微子的狄拉克方程

对轻子的内禀结构了解之后，简单地看一下量子场论对轻子的表述。量子理论是在对轻子内禀结构一无所知的前提条件下对量子场进行描述的。作为一个完整的粒子所表现出的基本的外部特性。具体归纳为：轻子具有质量、电荷、自旋，存在正反轻子。对轻子的这些外部特征进行描述，把所有的特性归入一个方程，狄拉克做到了，而且做得非常优美。自由狄拉克方程为

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = 0 \quad (7.7.17)$$

从真空场论的角度来看，我们感兴趣的是在狄拉克方程中引入的  $\gamma_\mu$  张成了一个粒子表述空间。 $\gamma_\mu$  粒子表述空间为矢量空间。

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_j \\ i\sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad j=1,2,3$$

在狄拉克方程的基础上，可建立描述中微子的方程。中微子理论的特性是：无静质量，且它破坏了空间反演和电荷共轭变换下的不变性（ $m \neq 0$  的狄拉克理论在这两种变换下均具有不变性），这种特点是由中微子半向空间特性所造成的。这一特点反映在理论的形式上，便是在理论里出现  $\gamma_5$  矩阵，因而中微子态和反中微子态具有所谓的“手征性”。理论的上述特点引出了第二个特点，即中微子、反中微子波函数不再具有 4 个独立的分量，而只有两个独立的分量。

中微子无静质量，可从  $m \neq 0$  的狄拉克理论过渡到中微子理论。当  $m=0$  时，狄拉克方程简化为（采用泡利度规）

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) = 0 \quad (7.7.18)$$

用  $\pm\gamma_5$  左乘式 (7.7.18)，并将所得式与式 (7.7.18) 相加，再乘以 1/2 便得到下式：

$$\gamma_\mu \partial_\mu \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi(x) = 0 \quad (7.7.19)$$

$$\text{令} \quad \psi_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi \quad (7.7.20)$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \quad (7.7.21)$$

则不难看出， $\psi_L(x)$  和  $\psi_R(x)$  都是  $\gamma_5$  的本征态，其手征性分别为 +1 和 -1。

$$\gamma_5 \psi_L(x) = \psi_L(x) \quad (7.7.22)$$

$$\gamma_5 \psi_R(x) = -\psi_R(x) \quad (7.7.23)$$

$\psi_L(x)$  和  $\psi_R(x)$  所描写的态分别称为左旋态和右旋态。这是因为当它们都是方程 (7.7.17) 的正能解时,  $\psi_L(x)$  描写左旋粒子,  $h = -1$ ;  $\psi_R(x)$  描写右旋粒子,  $h = 1$ 。按照中微子的实验事实, 可取  $\psi_L(x)$  为中微子波函数, 对应场流论中自旋波外;  $\psi_R(x)$  为反中微子波函数, 对应场流论中自旋波内。  $m \neq 0$  的狄拉克粒子的波函数  $\psi(x)$  可以分解为  $\psi_L(x)$  和  $\psi_R(x)$  之和:

$$\psi(x) = \psi_L(x) + \psi_R(x) \quad (7.7.24)$$

当  $m \neq 0$  时, 上式的分解不具有洛伦兹不变性, 这是因为  $m \neq 0$  的狄拉克粒子有两种纵向极化态, 即左旋态和右旋态, 而当  $m = 0$  时, 粒子只有一种纵向极化态, 因而式 (7.7.17) 的分解具有洛伦兹不变性。

在二分量中微子理论里出现  $\gamma_5$  矩阵, 使得理论不再具有空间反演不变性。对  $\psi_L(x)$  和  $\psi_R(x)$  分别进行空间反演:

$$P\psi_L(x) = \gamma_4 \psi_L(x) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi'(x') = \psi'_R(x') \quad (7.7.25a)$$

$$P\psi_R(x) = \gamma_4 \psi_R(x) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi'(x') = \psi'_L(x') \quad (7.7.25b)$$

这一结果表明, 一个左旋中微子的镜像是一个右旋中微子, 而一个右旋反中微子的镜像则是一个左旋反中微子。但是这些镜像粒子都不存在, 所以二分量理论不具有空间反演不变性。顺便指出, 在场论中正是由于中微子和反中微子都只具有一种螺旋态 (纵向极化态), 因而在弱作用过程里, 宇称守恒定律不再成立。而在真空场中, 只要涉及半向空间弱作用场, 都存在宇称不守恒。

二分量理论同样破坏了电荷共轭对称性。

$$\psi_L^C = C\bar{\psi}_L^T = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi^C \quad (7.7.26a)$$

$$\psi_R^C = C\bar{\psi}_R^T = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi^C \quad (7.7.26b)$$

由此不难验证:

$$\gamma_5 \psi_L^C = -\psi_L^C$$

$$\gamma_5 \psi_R^C = \psi_R^C$$

把上两式与式 (7.7.22) 比较可知, 在电荷共轭变换下,  $\psi_L(x)$  与  $\psi_R(x)$  的手征性互换。因此, 电荷共轭变换的结果是粒子与反粒子交换而螺旋度不变, 这显然破坏了电荷共轭对称性。

在  $\Omega$  区域 CPT (电荷、空间、时间) 联合反演守恒有着很明确的物理意义, 就是在  $\Omega$  区域内真空场应变量守恒, 即在一个封闭的含有相互作用区域或一对偶粒子及某衰变粒子区域  $\Omega$  内, 拉伸真空场的总应变量恒等于压缩真空场的总应变量。

### 7.7.8 轻子的点模型构成量子力学

把轻子和光子简化为点模型, 可以得到几率波的物理图像。几率波是构成量子力学的基本物理图像。先来看量子力学的假设, 量子力学的假设是量子力学建立的基石, 这里将用场

的观点来重新理解量子力学的假设，先把量子力学的假设逐条写出，然后再逐条进行分析。

1. 量子力学假设 I

对于一个由点粒子构成的体系，它的状态由一个复值（波）函数  $\Psi(x,t)$  完全确定。把它解释为几率密度幅，这指的是

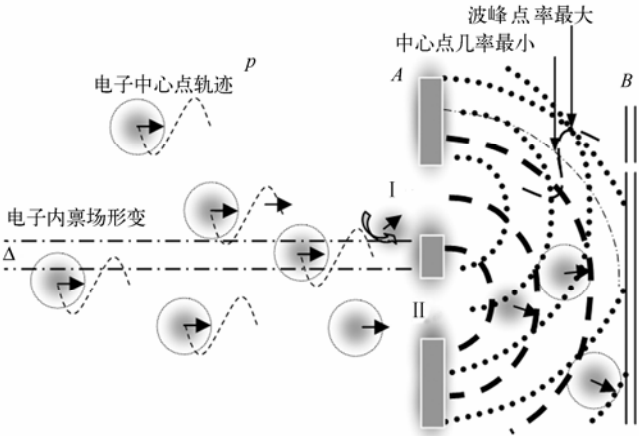
$$|\Psi(x,t)|^2 dx$$

表示在时刻  $t$  测量粒子的位置时，粒子位于  $x$  到  $x + dx$  这一闭区间中的几率，因为全部几率必定是 1，所以我们有归一化条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1 \tag{7.7.27}$$

在前面我们已经知道了轻子波粒二象性的成因，如电子在沿  $\vec{r}$  方向传播时，未曾受到任何扰动时轻子中心点的轨迹是一条直线（当然这种可能性不存在，因为电子从原子中出来本身就是一种扰动），而在受到扰动后在垂直于传播方向  $\vec{r}$  的方向上做简谐振动，电子轻子中心点的运动轨迹变为轴为  $\vec{r}$  的余弦（或正弦）曲线（值得一提的是电子的波动是由光子和电子耦合而产生的，光子中心点和电子中心点重合为同一点，因而电子具有和光子性质一样的波动性）。在波峰处（正负波峰）轻子中心点的传播线速度最慢，而在过  $\vec{r}$  轴时，轻子中心点传播的线速度最快。从统计的角度看，在波峰处几率最大，而在  $\vec{r}$  轴上，几率最小。

现在来具体看一下电子的单缝衍射（电子的衍射和电子的衍射特性是完全一致的）。如图 7.7.9 所示，在  $A$  上有一条缝，缝的大小和电子的振幅大致接近便能形成扰动，即缝 I（先不考虑缝 II）。在  $A$  之前，假设所有电子的动量和能量均相等。虽然每个电子的动量（表现为传播速度）均相等，都在沿与传播方向垂直的方向做简谐振动，但由于相位不同，所以不可能形成条纹。经过  $A$  时，缝 I 对电子给予了一个新的扰动，而这种扰动的位置对于所有的电子均相同，轻子波从  $A$  的缝 I 出来后，获得了统一的相位。另外，电子在受到扰动后，改变了原有的运动方向，由于能量低，所以这种扰动是弹性的，不改变原有电子的动量，仅改变方向。于是经过  $A$  上缝 I 的衍射后，在屏  $B$  上就形成了电子波的单缝干涉条纹。



$A$  屏以前所画的是电子的示意图，虚线圆环表示电子的内禀空间，电子中心点一边前进一边上下振动，这样中心点轨迹是一条余弦曲线。可以看出，在波峰（粗虚线）处，几率最大，而在细虚线处几率最小。

图 7.7.9 电子波粒二象性的真空场本质

对于电子单缝实验来说,缝本身就是一个扰动源,缝的宽度越小,则量子场形变越大,扰动越强烈,相应散射的角度越宽。对于单缝的宽度和动量的分布之间的关系可以得出测不准关系式:  $\Delta x \cdot \Delta p \dots \frac{\hbar}{2}$ 。

干涉是怎样形成的?为什么一个一个不连续的电子也能形成干涉条纹?现在来考虑双缝干涉,如图 7.7.9 所示。双缝的虚线部分是对电子所实际产生干涉的场。电子的波动是由轻子光子耦合而产生的。波动特性是由电子场决定的,双缝本身构成了双扰动源,电子内禀真空场和双缝阴影部分的场接触以后,电子内禀真空场发生形变,电子中心点有可能进入缝 I 或缝 II,具体中心点进入哪条缝则要看电子形变的情况而定。这样电子具有了可选择性,换言之,在图中区域  $\Delta$  内的电子能感知存在双缝。区域  $\Delta$  内的电子具有可选择性,可选择性使得双缝干涉和单缝干涉大不相同,形成双缝特有的干涉条纹。要注意的是在整个过程中,电子都是一体的。这种双缝干涉是电子的可选择性造成的。

在整个干涉过程中耦合电子(电子中心点和光子中心点耦合为同一点,即运动电子)中心点只有一点,电子中心点被限制在电子内禀场内,因而场的扰动使电子中心点的位置发生改变,电子中心点可能从任何一条缝中通过。从双缝屏  $A$  出来之后,所汇合成的完整电子在未受到新扰动之前永远带有被干涉之后的波动特性,如果该电子能沿原路径丝毫不差地返回,可以回复到未干涉前的状态,只是运动方向相反。换言之,就是满足时间反演。扰动源的存在使得电子轻子中心点受到扰动,电子便改变了原来的运动方向。对于电子来说,单缝只有一个扰动源,会改变运动方向、角度和相位,但无可选择性。这种差别使得单缝衍射和双缝衍射明显不同,在做双缝衍射实验时,如果每次来一个电子时只开放一条缝,则始终只有一个扰动源,电子不存在可选择性,双缝衍射的条件被破坏,干涉条纹消失。由此给出了波粒二象性的物理图像。

电子的波动性是电子本身所具有的特性,因而用一个一个单电子进行衍射和用许多电子同时进行,得到的干涉图样都是一致的。

电子本身的中心点具有严格而清晰的传播轨迹,所以爱因斯坦是对的。如果我们能知道所有边界条件,我们就能精确地确定电子中心点的位置和速度,其轨迹可以被准确描述。但另一方面,轻子中心点的轨迹却无法测量,因而边界条件永远是未知的。因为我们用于感知世界的最精细的手段是用光子(或电子)进行测量,但这种粗笨的工具在接触到所测电子的瞬间,会使电子的位置受到致命的扰动,这使根本无法知道电子的去向,而我们永远也找不到比电子、光子更精巧的工具。在这种万般无奈中,只好用统计的方式来表示电子行为。被测粒子存在轨道,若不进行测量,对粒子则处于无知的状态,而测量粒子的本身使我们虽然知道了  $t$  时刻粒子的位置,但测量扰动使我们对粒子的去向变得无知,它们的关系满足测不准关系  $\Delta x \cdot \Delta p \dots \frac{\hbar}{2}$ 。所以爱因斯坦和玻尔都是正确的。这样便处于一种两难的境地。于是引入几率波来描述电子的行为,用  $|\psi(x,t)|^2$  来表示几率幅的大小。我们就把测量空间变得无限大,在一个足够大的区间中找到粒子的几率必定是 1,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

积分区  $\int_{-\infty}^{\infty}$  是这种两难境地的表述形式。形象地说,电子如同行踪不定的孙悟空一样,但孙悟空总逃不出如来佛的手掌,积分  $\int_{-\infty}^{\infty}$  正是如来佛的手掌。

由于目前测量工具和手段的限制,使得无法对电子的轨迹进行测量,强行进行测量,则会对被测电子造成强烈扰动,宏观表现为被测电子的位置和动量无法同时确定,这种效应定义为测不准原理。

## 2. 量子力学假设 II

在假设 I 中提到的体系的可能状态构成了集合  $L_2(-\infty, \infty)$ , 它由定义在  $(-\infty, \infty)$  上的能归一化的所有平方可积函数组成。

在假设 I 的基础上,进一步规定了波函数的性质,所以假设 II 立即能得到极重要的线叠的定理,即体系在时刻  $t$  的两个可能状态的任意归一化的线性组合,其本身也是该体系在时刻  $t$  的一个可能状态。设  $\Psi_1(x, t)$  和  $\Psi_2(x, t)$  是两个运动学上可能的状态,于是若  $c_1$  和  $c_2$  是复数域中的两个数(与位置  $x$  和时间  $t$  无关的常数),且满足

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \quad (7.7.28)$$

那么

$$\Psi(x, t) = c_1 \Psi_1(x, t) + c_2 \Psi_2(x, t) \quad (7.7.29)$$

也是一个运动学上可能的状态。按照态叠加原理,粒子在屏  $B$  上一点  $P$  出现的几率密度为

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 &= |c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2|^2 = (c_1^* \Psi_1^* + c_2^* \Psi_2^*) (c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2) \\ &= |c_1 \Psi_1|^2 + |c_2 \Psi_2|^2 + c_1^* c_2 \Psi_1^* \Psi_2 + c_1 c_2^* \Psi_1 \Psi_2^* \end{aligned}$$

上式右边第一项是粒子穿过上狭缝出现在  $P$  点的几率密度,第二项是粒子穿过下狭缝出现在  $P$  点的几率密度,第三和第四项是  $\Psi_1$  和  $\Psi_2$  的干涉项。而干涉项正是由于光子特有的可选择性造成的扰动所形成的。

在真空场中,粒子的波动轨迹使粒子具有了几率波的特性。轻子中心点轨迹是一维曲线  $\Psi$ , 对于两个传播粒子来说,两个轻子中心点相碰的可能性在低能下几乎为零,两条轨迹曲线是相互独立的。这种独立性对于  $n$  条也成立,独立性的存在使得从统计的角度来看存在波函数的态的线性叠的原理。

动量相同的轻子从某一个源  $i$  沿不同的方向传播出来时,轻子中心点的波动轨迹的集合构成轻子的一个几率波函数  $\Psi_i$ , 集合内的元素的数量大小  $c_i$  表示几率波函数  $\Psi_i$  的强弱,构成  $c_i \Psi_i$ ; 要特别注意的是由一个极化波也可以张成一个几率波函数  $c_i \Psi_i$ , 此时,  $c_i$  是一个相对小量。更确切地说,源和极化波动量决定了几率波函数  $\Psi_i$  的状态,即称为我们所熟知的态函数  $\Psi_i$ 。若存在  $n$  个源,这些源包括任何一个扰动源。德布罗意波是构成几率波的基本元素,由波的传播性质可知,波动性具有相互独立性,或者说相互正交。因而任意两个源发射的几率波函数波  $\Psi_i$  和  $\Psi_j$  是相互正交的。每一个波函数  $\Psi_i$  就构成一个维度坐标基,于是  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_i, \dots, \Psi_n$  就构成了  $n$  维正交空间。由不同波矢、不同源的德布罗意波所构成的  $n$  维正交空间就是希尔伯特空间。对于  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_i, \dots, \Psi_n$  有

$$\begin{aligned} \Psi &= c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + \dots + c_n \Psi_n + \dots \\ &= \sum_n c_n \Psi_n \end{aligned}$$

可以把  $\Psi$  理解成为  $n$  维正交空间中的一个向量,  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_i, \dots, \Psi_n$  为  $n$  维正交坐标架,

$c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_n$  为  $\Psi$  向量在  $n$  维正交坐标架上相应的投影值。

动量相同的轻子从某一个源  $i$  沿不同的方向传播出来时, 轻子中心点的波动轨迹的集合构成轻子的一个几率波函数  $\Psi_i$ , 并称该集合为态函数。

### 3. 量子力学假设 III

有关体系的一切可能信息都包含在波函数之中, 并且可以通过一组适当的线性自伴算符把这些信息提取出来。设体系处于状态  $\Psi(x, t)$ , 对它进行由操作数  $A$  表示的物理量的测量, 则得到值  $a_k$  的几率为  $|C_k|^2$ , 这里  $a_k$  是  $A$  对应于本征函数  $\Phi_k(x)$  的本征值 (在离散谱中)。

$$A\Phi_k(x) = a_k\Phi_k(x) \quad (7.7.30)$$

而  $C_k$  是用  $A$  在时刻  $t$  时的本征函数展开  $\Psi(x)$  时的系数:

$$\Psi(x, t) = \sum_l C_l \Phi_l(x) + \int C(\lambda) \Phi(\lambda, x) d\lambda \quad (7.7.31)$$

类似地, 对  $A$  的测量得到连续谱中  $a(\lambda)$  到  $a(\lambda + d\lambda)$  中的值的几率为  $|C(\lambda)|^2$ , 这里  $a(\lambda)$  是  $A$  对应于不正规本征函数  $\Phi(\lambda, x)$  的本征值:

$$A\Phi(\lambda, x) = a(\lambda)\Phi(\lambda, x) \quad (7.7.32)$$

而  $C(\lambda)$  是  $\Psi(x)$  在时刻  $t$  的展开式中  $\Phi(\lambda, x)$  前的展开系数。

在假定 III 中, 一切有关信息都包含在波函数中是因为粒子波函数包含了粒子的纵横波信息, 这可以从光子特性中得知。这一假定所指的一切信息是指不考虑轻子内禀结构, 把粒子视为一个点粒子所具有的信息。

这一假设意味着, 正好处在自伴操作数  $A$  的一个给定的不正规本征态中的几率应应为零。因此, 根据假设 II, 不正规本征向量就不是体系的可能态。然而, 要注意的是作为不正规本征向量的连续的归一化的线性叠的波包是该体系的可能状态。

对于大量的全同体系的同时测量并不能给出同样的结果。更确切地说, 测量得到的  $a_k$  的几率  $|C_k|^2$  是随着  $a_k$  变化的, 如图 7.7.10 所示, 只有当  $\Psi$  是  $A$  的一个本征态时, 测量的结果才会是严格确定的。

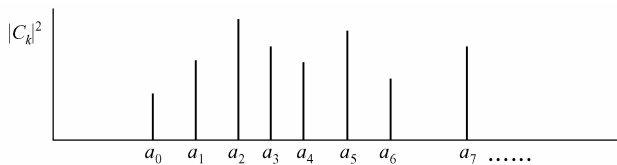


图 7.7.10 几率谱

图 7.7.10 为对大量的全同体系测量  $A$  (具有纯离散谱的某个自伴算符) 所得结果的可能分布, 横轴为  $A$  的可能本征值, 纵轴为发生的相对频率。

对于全同体系的大量同时测量, 平均值或期待值  $\langle A \rangle$  由下式给出:

$$\langle A \rangle = \sum |C_k|^2 a_k + \int |C(\lambda)|^2 a(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) A \Psi(x, t) dx \quad (7.7.33)$$

### 4. 量子力学假设 IV

类似于经典力学的哈密顿 (Hamilton) 形式, 在量子力学中表示动力学算符的是以下基

本位置算符和动量算符的自伴算符函数：

$$\hat{x} = x, \quad \hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x \quad (7.7.34)$$

它有完备的本征函数集（即可观察量）。

## 5. 量子力学假设 V

量子体系的动力学由薛定谔（Schrodinger）方程

$$H\psi(x,t) = i\hbar\partial\psi(x,t)/\partial t$$

确定。在真空中，量子力学假设 IV 和 V 在光子中已有讨论，是一种很自然的结论。

## 7.7.9 全同粒子粒子的交换对称的物理图像

考虑由两个全同粒子组成的体系<sup>①</sup>，用波函数 $\psi(q_1, q_2)$ 描述其状态， $q_1, q_2$ 分别代表两个粒子的全部坐标（例如，包括空间坐标与自旋坐标）。当两个粒子交换时， $\psi(q_1, q_2) \rightarrow P_{12}\psi(q_1, q_2) = \psi(q_2, q_1)$ 。如果说有什么“不同”，只不过原来的“第一个”粒子与“第二个”粒子所扮演的角色对调而已。但是由于两个粒子的属性完全相同，这两种情况是无法区分的。所以只能认为 $\psi(q_1, q_2)$ 与 $\psi(q_2, q_1)$ 描述的是同一个量子态。这样，就会对波函数的形式加以很强的限制。更一般的情况，考虑由 $N$ 个全同粒子组成的多粒子体系，其状态用波函数 $\psi(q_1, q_2, \dots, q_N)$ 描述。 $P_{ij}$ 表示第 $i$ 粒子与第 $j$ 个粒子交换的算符，即

$$P_{ij}\psi(q_1, \dots, q_i, \dots, q_j, \dots, q_N) \equiv \psi(q_1, \dots, q_j, \dots, q_i, \dots, q_N) \quad (7.7.35)$$

按上所述， $P_{ij}\psi$ 与 $\psi$ 描述的量子态完全一致，因而最多相差一个常数因子 $\lambda$ ， $\lambda = \pm 1$ 。即 $P_{ij}$ 有两个本征值。这样，全体粒子的波函数必须满足下列关系式

$$P_{ij}\psi = +\psi \quad (7.7.36a)$$

$$P_{ij}\psi = -\psi \quad (7.7.36b)$$

$$(i \neq j = 1, 2, \dots, N)$$

式(7.7.36a)称为对称波函数；式(7.7.36b)称为反对称波函数。

实验表明，全体粒子系的波函数的交换对称性与粒子自旋有确定的联系。凡自旋为 $\hbar$ 整数倍的粒子( $s = 0, \hbar, 2\hbar, \dots$ )，波函数对于交换两粒子总是对称的。它们在统计物理中遵守

Bose-Einstein 统计法，称为 Bose 子。凡自旋为 $\hbar$ 半奇数倍的粒子( $s = \hbar/2, 3\hbar/2, 5\hbar/2, \dots$ )，波函数对于交换两粒子总是反对称的。它们在统计物理中遵守 Fermi-Dirac 统计法，称为 Fermi 子。

当粒子交换时，相当于在粒子空间中转动 $360^\circ$ 。对于 Bose 子而言，玻色子的内禀空间为全向空间，玻色子构成的粒子空间也是全向空间，因此当两个粒子互换时，例如黑白两粒子互换，相当于黑粒子转动 $180^\circ$ ，白粒子转动 $180^\circ$ ，如图 7.7.11 所示，

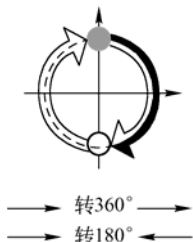


图 7.7.11 粒子交换等价于粒子空间转动

累计转动

① 曾谨言 著，《量子力学》卷 1. 科学出版社 1999, P238-240.

$$180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

这样黑白粒子构成的一个箭头在全向粒子空间转动了  $360^\circ$ ，没有改变，满足  $P_{ij}\psi = +\psi$ 。

如果是两费米子互换，累计转动  $360^\circ$ 。但实际的情况是由于是费米子，费米子内禀空间为半向空间，费米子构成的粒子空间为半向空间，因而累计转动只有全向空间的一半，即为  $180^\circ$ 。这样黑白费米子构成的一个箭头在粒子空间只转动了  $180^\circ$ ，箭头反相，满足  $P_{ij}\psi = -\psi$ 。

在真空场中，玻色子和费米子交换对称性的差异源自于全向空间和半向空间的不同，这直观地解释了为什么玻色子和费米子会存在如此差异。



# 第 8 章 场的定域规范不变性

定域规范和局域规范的区别可以用一只轮胎（环面）来显示<sup>①</sup>。整体对称性的情况是在环面上标出一些不同的点。选定通过环面垂直中心轴，轮胎转动某一个角度而保持形状不变。而环面上所有的点都以相同的方式变换（即转过同一角度），所以它是一种整体对称变换。局域对称性的情况是：对于一只理想的轮胎，每一点能够独立运动，可以把这些点推或拉到环面上的新位置而保持轮胎的外形不变。由于整体环面的形状不变，因而该过程是一种对称变换。每一点的变换与其他点无关，所以它是一种局域对称性。但当各点独立运动时，轮胎表面就要伸缩，在发生位移的各点之间就会产生弹力。用群论的语言来说，电磁力起源于  $U(1)$  局域对称性，弱力起源于  $SU(2)$  局域对称性，而强力起源于  $SU(3)$  局域对称性。

这一观点的重要之处是引入的弹性膜的图像，这一图像很好地描述了定域规范不变性和局域规范不变性。这意味着  $U(1)$  局域对称性， $SU(2)$  局域对称性和  $SU(3)$  局域对称性源自于背景真空场具有弹性。形象地说，每一种局域对称性对应一种弹性膜。这一观点支持了真空背景场具有弹性。

单一量子场  $\varphi(x)$  中每一种独立的场应变矩阵为  $\varepsilon_{ji} = \partial_j u(\xi^i)$ 。对于  $\varepsilon_{\mu\nu}$  存在 16 个量， $[\varepsilon_{\mu\nu}]$  的不同的组合构成量子场的一个独立自由度。

如图 8.0.1 所示，在同一个量子场  $\varphi(x^\mu)$  上，可以重叠地存在  $N$  种场应变，每一个场应变构成一个自由度空间  $[\varepsilon_{ij}]_\mu x^\mu$ ，而  $x^\mu(\xi)$  为相应自由度空间的基，每一种自由度空间  $x^\mu$  可以发生弯曲，变为  $x'^\mu$ 。由量子场的  $N$  个自由度张成该量子场的  $N$  维自由度空间  $x^1, x^2, \dots, x^N$ 。

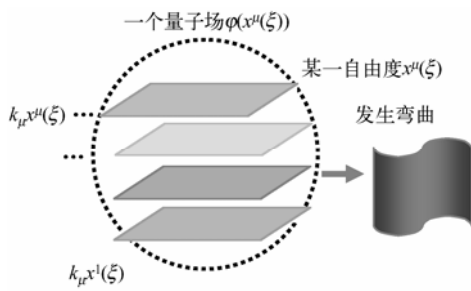


图 8.0.1 量子场内禀空间

一个点及其邻域场构成一个量子场，因而每一个点对应一个量子场。更直白地说，量子场是一个有邻域的点，量子场可以简化为一个点。所有的场源自于点。设想在一个大范围的真空中，只有一个点发生移动，该点的移动产生一个邻域场，这种邻域场有可能包含 4 种场，其中弱力场和强场构成的邻域场是微观的邻域场，小于  $10^{-13}\text{cm}$ ，而电场和引力场构成的邻域场则充满了整个真空场，并以该点为中心，这里仍然认为电场和引力场是该点的邻域场。每种场之间是相互独立的，单一的场（如弱力场）构成自己的场空间，场空间可以发生

① 桂起权，高策. 规范场论的哲学探究. 科学出版社，2008，p3.

“弯曲”，满足规范不变性。场的所有性质都依附于一个点，这个点成为具有多种自由度的点。量子场是具有多种自由度点粒子的真空场图像的简化。

在量子场中，每一个点粒子都是场的源，量子场的邻域场会发生重叠，没有点的区域同样存在场，点粒子的连续分布造成量子场的大量的重叠，形成宏观连续的场，这样的场可以近似地视为经典连续场。

对于真空场而言，场的定域规范不变性是场由平直空间变为弯曲空间时，两种空间存在的一种对称性。

## 8.1 整体规范不变性

在量子场理论中，内部空间（即内禀空间）是为了描述量子场的内部性质，如电荷、重子数、轻子数、同位旋、味道、颜色等，而引入的抽象空间。对于实验观测而言，所有的这些内禀性质都被赋予在一个点上，这个点就是量子场的中心点。

在规范理论中，内部空间的“转动”，用规范群  $G$  来表示。规范群的元素写成

$$u(\theta) = \exp[-i\theta^\alpha T^\alpha] \quad (8.1.1)$$

对于  $p$  点单一量子场  $\phi$ ， $p$  点的场形变给出场位移函数  $u(\xi^\mu)$ ，是沿真空场主应变方向  $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$  的位移量  $u(\xi^0), u(\xi^1), u(\xi^2), u(\xi^3)$ 。场位移函数是  $u(x^\mu) = h \exp i k_\mu \xi^\mu$ 。当场函数  $\phi(\xi^\mu) = \exp 0$  时，场  $\phi$  为平直真空场，即场基态。场位移函数  $u(x^\mu)$  与规范群的元素  $u(\theta)$  具有相同的形式，可以理解为  $T^\alpha$  空间具有弹性，沿  $T^\alpha$  形变  $\theta^\alpha$ （形变的结果会产生场效应）。用群论的语言说， $T^\alpha$  是群  $G$  的生成元，满足如下对易关系：

$$[T^\alpha, T^\beta] = i f^{\alpha\beta\gamma} T^\gamma \quad (8.1.2)$$

其中， $f^{\alpha\beta\gamma}$  是群  $G$  的结构常数， $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \dots, N$ 。  $N$  是群  $G$  的维数，它等于生成元的个数。 $\theta^\alpha$  是群  $G$  的参数，叫做群参数，是沿  $T^\alpha$  的一个“移动”，或者说  $T^\alpha$  “转动”了  $\theta^\alpha$ ，也可以理解为内部空间的转动。

### 1. 规范变换

在内部空间的转动下，场量由  $\phi_\sigma(x)$  转动至  $\phi'_\sigma(x)$ 。

$$\phi_\sigma(x) \rightarrow \phi'_\sigma(x) = \exp[-i\theta^\alpha T^\alpha_\sigma] \phi_\sigma(x) \quad (8.1.3a)$$

$$\begin{pmatrix} \phi'_1(x) \\ \phi'_2(x) \\ \vdots \\ \phi'_N(x) \end{pmatrix} = \exp i \theta \begin{pmatrix} T_{11}^\alpha & T_{12}^\alpha & \cdots & T_{1N}^\alpha \\ T_{21}^\alpha & T_{22}^\alpha & \cdots & T_{2N}^\alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{N1}^\alpha & T_{N2}^\alpha & \cdots & T_{NN}^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_N(x) \end{pmatrix}$$

上述变换称为规范变换，可分为整体规范变换和定域规范变换。当群参数  $\theta^\alpha$  是与时空坐标  $x$  无关的常数时，为整体规范变换。整体的意思是说时空各点的场量都进行同样的变换。当群参数  $\theta^\alpha$  是时空坐标  $x$  的函数  $\theta^\alpha(x)$  时，则为定域规范变换。定域的意思是说时空各点各自作不同的变换。

对于整体规范变换， $\theta^\alpha$  是与时空坐标  $x$  无关的常数，即



当以无穷小速度  $c\Delta\omega = c\Delta\beta$  沿  $x$  轴运动时, 对于变换  $x \rightarrow x'$ , 带撇系统的变换如下:

$$\mathbf{I}_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.1.7)$$

可以写出相对于  $x$  轴匀速运动的有限变换为

$$\begin{aligned} x^{\nu'} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( g + \frac{\omega}{N} I \right)_{\alpha_1}^{\nu} \left( g + \frac{\omega}{N} I \right)_{\alpha_2}^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_N} = \left( e^{\omega I} \right)_{\mu}^{\nu} x^{\mu} \\ &= (\cosh \omega I + \sinh \omega I)_{\mu}^{\nu} x^{\mu} = (1 - I^2 + I^2 \cosh \omega + I \sinh \omega)_{\mu}^{\nu} x^{\mu} \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

对于每一个分量, 上式给出

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \omega & -\sinh \omega & 0 & 0 \\ -\sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (8.1.9a)$$

或者写成我们更为熟悉的形式:

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \cosh \omega (x^0 - \tanh \omega x^1) \\ x^{1'} &= \sinh \omega (x^0 - \tanh \omega x^1) \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned} \quad (8.1.9b)$$

其中,  $\tanh \omega = \beta$  和  $\cosh \omega = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  把 Lorentz 转角和相对速度  $c\beta$  联系起来。

该结果推广到沿任意方向的运动或绕任意空间轴的转动。生成 6 个独立的 Lorentz 转动的 6 个矩阵  $\mathbf{I}_{\mu}^{\nu}$  是非相对性理论中熟知的三维空间转动的四维推广。

现在转向构造一个有限的旋量变换  $S$ 。从式 (8.1.5) 和式 (8.1.6) 可得

$$\psi'(x') = S\psi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{i}{4} \frac{\omega}{N} \sigma_{\mu\nu} I_n^{\mu\nu} \right)^N \psi(x) = \exp \left( -\frac{i}{4} \omega \sigma_{\mu\nu} I_n^{\mu\nu} \right) \psi(x)$$

$\mathbf{I}_n^{\mu\nu}$  满足式 (8.1.7), 可得

$$\psi'(x') = e^{-(i/2)\omega\sigma_{01}} \psi(x) \quad (8.1.10)$$

其中  $x'$  与  $x$  由式 (8.1.9) 相联系。类似地, 对于绕  $Z$  轴转角为  $\varphi$  的转动, 可得

$$\begin{aligned} I^{12} &= -I^{21} = -1 \\ \psi'(x') &= e^{(i/2)\varphi\sigma^{12}} \psi(x) \end{aligned} \quad (8.1.11)$$

上式中,  $\sigma^{12} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ , 其中  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 。

显然, 把粒子在不同速度的状态之间的联系理解为量子场的整体规范变换是合理的。整体规范变化被重新理解为量子场背景空间的变化导致量子场内禀空间的整体发生改变。

## 2. 对称、不变和守恒

物理系统在内部空间的对称性，表现为它的拉格朗日密度在规范变换下具有不变性，即

$$\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (8.1.12)$$

在无穷小变换下，群参数  $\theta^\alpha$  是无穷小量，式 (8.1.3a) 的变换可写为

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= (1 - i\theta^\alpha T^\alpha) \phi(x) \\ \delta\phi(x) &= \phi'(x) - \phi(x) = -i\theta^\alpha T^\alpha \phi(x) \end{aligned} \quad (8.1.13)$$

由式 (8.1.12) 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} \delta\phi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \delta \partial_\mu \phi(x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} \delta\phi(x) \right] = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi(x)} i\theta^\alpha T^\alpha \phi(x) \right] \end{aligned}$$

然后得到

$$\partial^\mu J_\mu^\alpha = 0 \quad (8.1.14)$$

这就是和内部对称性相应的守恒定律。其中，

$$J_\mu^\alpha = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi(x)} T^\alpha \phi(x)$$

是守恒流。相应的守恒荷是

$$Q^\alpha = \int_V J_0^\alpha dV = -i \int_V \pi(x) T^\alpha \phi(x) dV$$

如果所讨论的内部对称性是电荷、重子数或同位旋，则  $T^\alpha$  就是电荷算符、重子数算符或同位旋算符的表示矩阵， $j_\mu^\alpha$  就是电流、重子流或同位旋流， $Q^\alpha$  就是电荷、重子数或同位旋。

例如，狄拉克场  $\psi(x)$ ，其自由拉氏量密度为

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m})\psi(x) \quad (8.1.15)$$

在整体  $U(1)$  规范变换时，

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\theta} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\theta} \end{cases} \quad (\theta \text{ 是与 } x \text{ 无关的实参数}) \quad (8.1.16)$$

这可以理解为  $\psi(x)$  背景空间发生改变，致使  $\psi(x)$  内禀空间整体移动了一个相位  $\theta$ 。

## 8.2 $U(1)$ 定域规范不变性与电磁相互作用

### 1. 量子场内禀空间 $U(1)$ 定域规范不变性

真空场的移动构成量子场。 $n$  种不同形式的移动构成量子场内禀空间的  $n$  维自由度。不同量子场的内禀自由度维数是不一样的。处于自由态的量子场内禀自由度空间是平直的，当某一维度（如电磁自由度）发生相互作用时（如电磁相互作用），该维度由平直态变为弯曲态（电磁空间弯曲），如图 8.2.1 所示，这里用一个二维面来表示内禀空间的一个自由度空

间。自由度空间由平直面变为弯曲面，这样的改变对应规范变换。

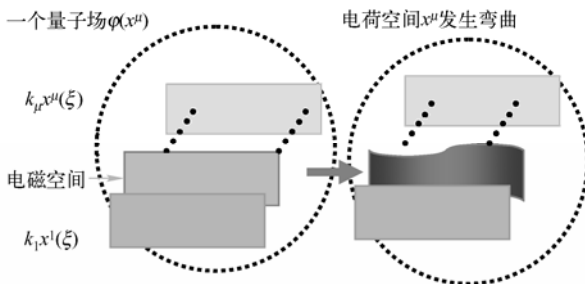


图 8.2.1 量子场内禀空间

现在考虑一个电荷为 0 的点。最简单的点就是真空场  $\phi_0$ ，另一种情况是标量场  $\phi(x)$ 。考虑定域规范变换，

$$\begin{aligned}\phi(x) &\rightarrow U(x)\phi(x) \\ U(x) &= e^{-i\theta(x)}\end{aligned}$$

量子场间的相互作用会破坏内禀空间整体同时改变的特性，使量子场内禀空间的局部发生改变， $\theta$  不再是一个常数而是一个  $x$  的函数  $\theta(x)$ ，这称为定域规范变换，在上式中用  $\theta(x)$  代替  $\theta$ 。在定域规范变换下<sup>①</sup>，场量按如下规律变换：

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \exp[-i\theta^\alpha(x)T^\alpha]\phi(x) \quad (8.2.1)$$

这等价于量子场沿标架  $T^\alpha$  移动  $\theta^\alpha(x)$ ，与  $T^\alpha$  对应的内禀自由度发生改变。场量的导数  $\partial_\mu\phi(x)$  的变换如下：

$$\begin{aligned}\partial_\mu\phi(x) &\rightarrow \partial_\mu\phi'(x) = \exp[-i\theta^\alpha(x)T^\alpha]\phi(x)\partial_\mu\phi(x) - i\partial_\mu\theta^\beta(x)T^\beta \exp[-i\theta(x)T^\alpha]\phi(x) \\ &\neq \exp[-i\theta^\alpha(x)T^\alpha]\phi(x)\partial_\mu\phi(x)\end{aligned} \quad (8.2.2)$$

上面的变换多出了一项，与场量  $\phi(x)$  的变换规律不一样， $\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu\phi'(x)) \neq \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$ 。这显然不同于整体规范变换，不满足规范不变性。

当把相互作用的量子体系视为一个整体来考虑时，就能把整体规范不变性推广到定域规范不变性。

## 2. 协变导数与电磁耦合

对于独立场量  $\phi(x)$  的导数为  $\partial_\mu$ ，当从一个更大范围，即把相互作用的量子场视为一个整体时，导数由普通导数  $\partial_\mu$  变为协变导数  $D_\mu$ ，场量的导数  $\partial_\mu\phi(x)$  换成场量的协变导数  $D_\mu\phi(x)$ 。场量的协变导数  $D_\mu\phi(x)$  和场量  $\phi(x)$  按同样的规律变换。

$$\begin{aligned}\phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = \exp[-i\theta^\alpha(x)T^\alpha]\phi(x) \\ D_\mu\phi(x) &\rightarrow D_\mu\phi'(x) = \exp[-i\theta^\alpha(x)T^\alpha]D_\mu\phi(x)\end{aligned}$$

那么，由它们构成的拉格朗日密度  $\mathcal{L}(\phi(x), D_\mu\phi(x))$  就将是定域规范不变的，满足以下公式：

$$\mathcal{L}(\phi'(x), D_\mu\phi'(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), D_\mu\phi(x))$$

① 胡瑶光，规范场论。华东师范大学出版社，1984，p9。

如何理解协变导数  $D_\mu$  呢?

如图 8.2.2 所示,  $\partial_\mu \phi'(x)$  场量  $\phi'(x)$  的切标架, 由  $M'$  点经过勒维—奇维塔 “平移”<sup>①</sup> 至  $M$  点, 平移后的场量  $\phi'(x)$  的切标架变为

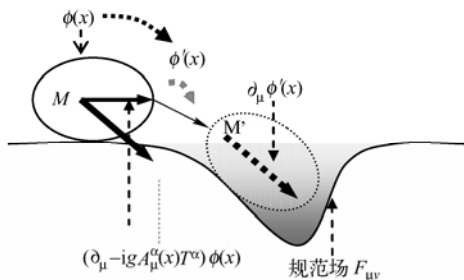


图 8.2.2 定域规范变换

$$D_\mu \phi(x) = (\partial_\mu - ig A_\mu^\alpha(x) T^\alpha) \phi(x)$$

$$D_\mu(x) = \partial_\mu + A_\mu$$

这里多出一项  $A_\mu$ , 称为规范势。

将算符  $D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^\alpha(x) T^\alpha$  作用到式 (8.2.1), 可得

$$D_\mu \phi'(x) = (\partial_\mu - ig A_\mu^\alpha(x) T^\alpha) \phi'(x)$$

$$D_\mu \phi'(x) = D_\mu \{ \exp[-i\theta^\alpha(x) T^\alpha] \phi(x) \} = (\partial_\mu - ig A_\mu^\alpha(x) T^\alpha) \{ \exp[-i\theta^\alpha(x) T^\alpha] \phi(x) \}$$

$$\begin{aligned} D_\mu \phi'(x) &= \exp[-i\theta^\alpha(x) T^\alpha] \phi(x) \partial_\mu \phi(x) - i \partial_\mu \theta^\beta(x) T^\beta \exp[-i\theta^\alpha(x) T^\alpha] \phi(x) \\ &= -i\theta(\partial_\mu + ie A_\mu) \psi \end{aligned}$$

为保持规范不变性, 要求

$$-i \partial_\mu \theta^\beta(x) T^\beta \exp[-i\theta^\alpha(x) T^\alpha] \phi(x) - ig A_\mu^\alpha(x) T^\alpha \phi'(x) = 0$$

$$i \partial_\mu \theta^\beta(x) T^\beta = -ig A_\mu^\alpha(x) T^\alpha$$

$\partial_\mu \theta^\alpha(x) = -g A_\mu^\alpha(x)$ , 是同一  $T^\alpha$  空间内的函数。

对于量子场而言,  $\exp[-i\theta^\alpha(x) T^\alpha]$  是在粒子  $T^\alpha$  空间的位移函数。点移动  $\theta^\alpha$  只可能存在于内禀空间中, 不可能沿粒子空间标架  $T^\alpha$  移动, 这样的标架是无法放到粒子内禀空间中的。实际的情况是沿与  $T^\alpha$  对应的内禀空间标架  $x^\alpha$  方向进行移动。可以通过算符  $T^\alpha \partial_\alpha$  作用于位移函数  $\exp[-i\theta^\alpha x^\alpha]$ , 得到

$$\partial_\alpha T^\alpha \exp[-i\theta^\alpha x^\alpha] = -i\theta^\alpha T^\alpha \exp[-i\theta^\alpha x^\alpha]$$

可以理解为  $\theta^\alpha$  在粒子空间标架  $T^\alpha$  上的投影值。

对于物理学图像而言, 明确的含义是: 规范变换  $\exp[-i\theta^\alpha(x) T^\alpha] \phi(x)$  中, 每一个生成元  $T^\alpha$  对应一个规范场  $A_\mu^\alpha$ 。反过来说, 规范场  $A_\mu^\alpha$  作用于  $\phi(x)$ , 实现规范变换。规范变换导致量子场  $\phi(x)$  的内禀空间发生改变, 真空场基本单元 (即量子场中的点) 沿  $x^\alpha$  方向移动了  $\theta^\alpha$ , 构成了一个特定的量子场内禀自由度。  $\theta^\alpha(x)$  和  $A_\mu^\alpha$  之间的关系满足下式

① 周季生, 张量初步. 高等教育出版社, 1985, p68.

$$\partial_\mu \theta^\alpha(x) = -g A_\mu^\alpha(x)$$

规定

$$\partial_\mu \theta^\alpha(x) = k_\mu(x)$$

$k_\mu(x)$  是粒子地  $\mu$  种内禀自由度波矢。 $g$  为某种内禀自由度的形变量  $\theta^\alpha(x)$  转变为动量空间形变量  $A_\mu^\alpha$  的转换系数，称之为耦合常数。其逆过程的物理意义是在动量空间中，沿  $T^\alpha$  移动  $A_\mu^\alpha$ ，将有  $g$  的概率转换为粒子场函数  $\exp i(k_1 x^1 + k_2 x^2 + \cdots + k_\mu x^\mu)$  的地  $\mu$  种内禀自由度  $k_\mu(x)$ （注意， $k_\mu x^\mu$  不是求和，特指地  $\mu$  种内禀自由度）。从量子场的角度来理解，这种转换是通过交换规范场  $A_\mu$  来传递相互作用，而  $g$  决定了相互作用的强弱。

### 3. 定域规范对称性

为了讨论定域规范对称性，下面具体来看一个例子。最简单的定域规范变换是  $U(1)$  定域规范变换。在式 (8.1.16) 中用  $\theta(x)$  代替  $\theta$ ，得到定域  $U(1)$  规范变换<sup>①</sup>：

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\theta(x)} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\theta(x)} \end{cases} \quad (8.2.3)$$

对无限小变换  $\theta(x) \ll 1$ ，可有

$$\delta \psi(x) = -i\theta(x) \psi(x) \quad (8.2.4)$$

$$\delta(\partial_\mu \psi(x)) = \partial_\mu \delta \psi(x) = -i\theta(x) \partial_\mu \psi(x) - i(\partial_\mu \theta(x)) \psi(x) \quad (8.2.5)$$

$$\delta \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(x) i\theta(x) \quad (8.2.6)$$

由此引起的  $\mathcal{L}_0$  的改变为

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_\mu \psi} \delta \partial_\mu \psi + \delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \bar{\psi}} \\ &= 0 + \bar{\psi} i \gamma^\mu \left[ -i\theta(x) \partial_\mu \psi(x) - i(\partial_\mu \theta(x)) \psi(x) \right] + i\theta(x) \bar{\psi}(x) i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \\ &= -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \theta(x) \\ &= -J^\mu \partial_\mu \theta(x) \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

其中，

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (8.2.8)$$

为电磁流。

$$\delta J^\mu = (\delta \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \delta \psi = 0 \quad (8.2.9)$$

从式 (8.2.7) 可见，在定域规范变换 (8.2.3) 下，拉氏量密度 (8.2.1) 不是不变的。

为使  $\mathcal{L}_0$  仍保持不变，需要引进四矢量规范场  $A_\mu(x)$ ，它直接与电磁流  $J^\mu$  耦合，给出相互作用拉氏量密度。

$$\mathcal{L}_I = e J^\mu A_\mu \quad (8.2.10)$$

① 裘中平，现代量子场论。华东师范大学出版社，1992，p67.



有  $J^\mu A_\mu$  参与电磁相互作用，只有  $eJ^\mu A_\mu$  使电子动量空间发生改变， $e$  即光电耦合常数。对于电子而言，中心点的移动（动量的改变）对应的物理事实是，吸收一个光子或放出一个光子，即电子和光子发生相互作用。加到  $\mathcal{L}_0$  上，再要求在变换 (8.2.3) 下， $A_\mu(x)$  的变换为

$$\begin{cases} A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x) \\ \delta A_\mu(x) = \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x) \end{cases} \quad (8.2.11)$$

于是，

$$\delta \mathcal{L}_I = e(\delta J^\mu) A_\mu + e J^\mu \delta A_\mu = J^\mu \partial_\mu \theta(x) \quad (8.2.12)$$

其中已利用了式 (8.2.9)。结合式 (8.2.7) 和式 (8.2.12) 立即得到

$$\delta \mathcal{L}_0 + \delta \mathcal{L}_I = 0$$

即  $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$  在变换 (8.2.3) 和 (8.2.11) 下是不变的。由于新引进了一个规范场  $A^\mu$ ，所以需要构造它自身的自由拉氏量密度  $\mathcal{L}_g$ ，当然，也要求它在式 (8.2.11) 下是不变的。

定义规范场张量为

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (8.2.13)$$

很清楚，在变换 (8.2.11) 下，它是不变的。量子场在电磁相互作用中，传递相互作用的是规范场粒子，而不是规范场，规范场的拉氏量密度为  $\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ （电磁场量子化前和量子化后的物理本质不同，有必要提醒一下）。这里规范场粒子为光子。

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) \quad (8.2.14)$$

于是，在定域规范变换 (8.2.3) 和 (8.2.11) 下不变的总拉氏量密度  $\mathcal{L}$  可构造为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_I \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu + i\gamma^M \partial_M) \psi - \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^n D_n) \psi - \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) \end{aligned} \quad (8.2.15)$$

其中，

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + ieA_\mu \\ D_n &= \partial_\mu + ieA_\mu + \partial_M \end{aligned}$$

称为协变导数。

$$\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_g = \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA) - m] \psi$$

上式对应的物理事实是场  $\psi$  与电磁场  $F_{\mu\nu}$  相互发生作用，结果导致  $\psi$  获得了动量  $eA_\mu$ ， $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = ue^{-i[k-k(x)]x}$ 。参与相互发生作用的规范场  $A_\mu$  中只有  $eA_\mu$  是由虚光子态转化为的  $\psi$  动量  $k(x)$ ，由  $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x)$  得知  $\theta(x)$  与电磁场改变量的关系： $e\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \theta(x)$ ，得：

$$e\delta A_\mu(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} = k(x) \quad (8.2.16)$$

$\theta^\alpha(x)$  与规范场  $A_\mu^\alpha(x)$  的关系如式, 要注意区分。根据前面的定义  $d\theta(x)/dx = k(x)$  为动量波矢。相互转换并不是一件容易的事, 在受到规范场 (虚光子)  $A_\mu$  作用后, 只有  $1/137$  的虚光子被吸收转换为动量  $k(x)$ 。

在变换 (8.2.3) 和 (8.2.11) 下,  $D_\mu\psi$  与  $\psi$  的变化相同。

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu\psi) &= \delta(\partial_\mu\psi) + ie(\delta A_\mu)\psi + ieA_\mu\delta\psi \\ &= -i\theta\partial_\mu\psi - i(\partial_\mu\theta)\psi + i(\partial_\mu\theta)\psi + eA_\mu\theta\psi \\ &= -i\theta(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi \\ &= -i\theta D_\mu\psi \end{aligned}$$

其中利用了式 (8.2.4)、式 (8.2.5) 和式 (8.2.11)。上式即

$$D_\mu\psi \rightarrow (D_\mu\psi)' = e^{-i\theta(x)} D_\mu\psi \quad (8.2.17)$$

通过直接计算不难验证协变导数  $D_\mu$  与规范场张量  $F_{\mu\nu}$  有下列关系:

$$[D_\mu, D_\nu] = ieF_{\mu\nu} \quad (8.2.18)$$

上面通过  $U(1)$  定域规范不变性要求确定的相互作用系统式 (8.2.15), 规定了旋量粒子与光子的电磁作用。

### 8.3 $SU(n)$ 定域规范不变性

上一节讨论了单参数的定域规范变换, 它形成  $U(1)$  阿贝尔群, 对应的规范场是阿贝尔规范场。现在要把上面的结果推广到具有更高对称性的  $SU(n)$  群, 它有  $n^2 - 1$  个参数, 是非阿贝尔群, 对应着非阿贝尔规范场。

把狄拉克场  $\psi(x)$  推广为  $n$  个狄拉克场的多重态, 记为

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} \quad (8.3.1)$$

相应地, 将式 (8.2.1) 推广为

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + \hat{M})\psi \quad (8.3.2)$$

显然, 式 (8.3.2) 在  $SU(n)$  整体规范变换

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U\psi(x) \\ U = \exp(-iT^\alpha\theta^\alpha) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n^2 - 1) \end{cases} \quad (8.3.3)$$

下是不变的。其中,  $\theta^\alpha$  是与  $x$  无关的  $n^2 - 1$  个实参数;  $T^\alpha$  是  $SU(n)$  的  $n^2 - 1$  个生成元, 它们满足群代数

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (8.3.4)$$

以及正交关系 (在基础表示下)

$$T_r[T^a T^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (8.3.5)$$

这里再次说明的是,  $U = \exp(-iT^a \theta^a)$ , 改变内禀空间自由度  $\exp(-i\theta^a x^a)$ 。内禀自由度空间标架  $x^a$  与粒子观测空间标架  $T^a$  相对应, 两种标架所对应的应变力场一致, 例如质量所对应的观测空间标架  $T^a$  产生的应变力场是粒子内禀质量空间  $x^a$  的粒子质量。

为了讨论定域规范不变性, 用式 (8.3.3) 中的  $\theta^a(x)$  来代替  $\theta^a$ , 得到定域  $SU(n)$  规范变换。

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x) \\ U(x) = \exp(-iT^a \theta^a(x)) \end{cases} \quad (8.3.6)$$

这时, 场的导数  $\partial_\mu \psi$  的变换为

$$(\partial_\mu \psi)' \equiv \partial_\mu \psi' = (\partial_\mu U(x)) \psi + U(x) \partial_\mu \psi \quad (8.3.7)$$

由于多出一项  $(\partial_\mu U(x))\psi$ , 拉氏量密度 (8.3.2) 在变换 (8.3.6) 下发生改变, 因而不是协变的。要使式 (8.3.2) 不变, 首先要找出协变导数  $D_\mu$ , 即要求

$$(D_\mu \psi)' \equiv D'_\mu \psi' = D'_\mu U(x) \psi = U(x) D_\mu \psi \quad (8.3.8)$$

比较等式最后  $\psi$  前的系数, 可以发现协变导数满足条件

$$D'_\mu = U(x) D_\mu U^{-1}(x) \quad (8.3.9)$$

为了简化, 引进矩阵矢量规范场:

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T^a \quad (8.3.10)$$

设

$$D_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu \quad (g \text{ 为常数}) \quad (8.3.11)$$

则由式 (8.3.9), 有

$$\begin{aligned} D'_\mu &= \partial_\mu + ig A'_\mu = U(x)(\partial_\mu + ig A_\mu)U^{-1}(x) \\ &= \partial_\mu - (\partial_\mu U(x))U^{-1}(x) + ig U(x) A_\mu U^{-1}(x) \end{aligned}$$

由此导出应满足的变换为

$$A'_\mu = U(x) A_\mu U^{-1}(x) + \frac{i}{g} (\partial_\mu U(x)) U^{-1}(x) \quad (8.3.12)$$

对于无限小变换 ( $\theta^a(x) \ll 1$ ), 有

$$U(x) = 1 - iT^a \theta^a(x) \quad (8.3.13)$$

把它代入式 (8.3.12), 利用式 (8.3.10) 和式 (8.3.4), 经过一些代数运算, 可得到规范场矢量  $A_\mu^a$  应满足的变换为

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow U(x)\psi(x) \\ A_\mu^a &\rightarrow A'^a_\mu = A_\mu^a + f^{abc} \theta^b(x) A_\mu^c + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a(x) \end{aligned} \quad (8.3.14)$$

对于上式, 真空场理论有这样的图像: 规范场矢量  $A_\mu^a$  投影到  $T^a$  标架上, 以  $g$  的概率合成粒子内禀自由度  $\exp(-ik_a x^a)$ 。在  $\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x)$  合成的过程中, 规范场矢量  $A_\mu^a$  发生改变,  $A_\mu^a \rightarrow A'^a_\mu$ 。改变后的  $A'^a_\mu$  与内禀场  $k_\mu(x) = \partial_\mu Q^\mu(x)$  之间存在上述关系。需要特别注意的

是它们都是同一标架  $T^\alpha$  空间中的量。

总结上述讨论, 得出: 规范场变换的动力学图像是: 某场  $\psi$  作规范场变换,  $T^\alpha$  空间规范场  $A_\mu^\alpha$  按耦合常数  $g$  的大小转换成该场  $\psi$  与  $T^\alpha$  对应的内禀空间  $x^\alpha$  的波矢  $k_\alpha(x) = \partial_\alpha \theta^\alpha(x)$ , 使  $\psi$  内禀空间  $x^\alpha$  发生改变。

规范场矢量  $A_\mu^a$  是沿  $T^\alpha$  标架传播的, 这样的规范场矢量  $A_\mu^a$  传递的是动量。在相互作用的过程中, 是以虚粒子的形态存在的。

现在, 在式 (8.3.2) 中进行代换  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ , 可得到

$$\mathcal{L}_0(\partial_\mu \rightarrow D_\mu) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{M})\psi(x) \quad (8.3.15)$$

它在定域规范变换式 (8.3.3) 和式 (8.3.12) (或式 (8.3.14)) 下是不变的。如果把规范场  $A_\mu^a(x)$  看做动力学场, 则还必须引进规范场的拉氏量密度, 并要求它在变换式 (8.3.12) 和式 (8.3.6) 下不变。为此, 仿照式 (8.2.18), 引进矩阵规范场张量  $F_{\mu\nu}$ , 定义为

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\equiv F_{\mu\nu}^a T^a = -\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu^a T^a - \partial_\nu A_\mu^a T^a + igf^{abc} A_\mu^a A_\nu^b T^c \end{aligned} \quad (8.3.16a)$$

或者定义规范场张量为

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (8.3.16b)$$

由式 (8.3.9) 可知, 在变换式 (8.3.12) 和式 (8.3.6) 下,  $F_{\mu\nu}$  的变换为

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = U(x)F_{\mu\nu}U^{-1}(x) \quad (8.3.17)$$

对于无限小变换 ( $\theta^a(x) \ll 1$ ), 利用式 (8.3.13), 可得到  $F_{\mu\nu}$  的变换为

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = U(x)F_{\mu\nu}U^{-1}(x)$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{'a} &= (1 - iT^b \theta^b(x)) F_{\mu\nu}^a (1 + iT^b \theta^b(x)) \\ &= F_{\mu\nu}^a - iF_{\mu\nu} \theta^b(x) T^b T^a + iF_{\mu\nu} \theta^b(x) T^a T^b + T^a \theta^a(x) F_{\mu\nu} T^a T^b \theta^b(x) \\ &= F_{\mu\nu}^a - iF_{\mu\nu} \theta^b(x) [T^a, T^b] = F_{\mu\nu}^a - iF_{\mu\nu} \theta^b(x) if^{abc} T^c \\ F_{\mu\nu}^a &\rightarrow F_{\mu\nu}^{'a} = F_{\mu\nu}^a + f^{abc} \theta^b(x) F_{\mu\nu}^c \end{aligned} \quad (8.3.18)$$

顺便指出, 式 (8.3.17) 和式 (8.3.18) 表明  $F_{\mu\nu}$  和  $F_{\mu\nu}^a$  按  $SU(n)$  群的伴随表示  $[(T^a)^{bc} = -if^{abc}]$  变换。

从式 (8.3.17) 容易看出, 量  $-T_r(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) / 2$  是变换 (8.3.12) 和 (8.3.6) 下的不变量, 可取它作为规范场的拉氏量密度  $\mathcal{L}_g$ , 即

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{2} T_r(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} T_r(T^a T^b) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \quad (8.3.19)$$

其中利用了式 (8.3.5)。

这样就得到了在定域规范变换式 (8.3.6) 和式 (8.3.12) 下不变的拉氏量密度  $\mathcal{L}$ 。

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - M)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} - g \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu^a T^a \psi \quad (8.3.20)$$

其中利用了式 (8.3.11)，而  $F_{\mu\nu}^a$  由式 (8.3.16b) 表示。拉氏量密度

$$\mathcal{L}_{g-\psi} = -g \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu^a T^a \psi \quad (8.3.21)$$

就是  $SU(n)$  域规范不变性所确定的物质场  $\psi$  与规范场  $A_\mu^a$  之间的相互作用，是改变  $\psi$  粒子内禀自由度的过程。 $\bar{\psi} \gamma^\mu T^a \psi$  是  $SU(n)$  同位旋流，耦合常数  $g$  表征了相互作用强度。此外，与阿贝尔情形不同的是，在非阿贝尔情况下，由于  $F_{\mu\nu}^a$  中除了导数项外，还有  $A_\mu^a$  的乘积项（参见式 (8.3.16b)），故  $F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}$  中含有  $A_\mu^a$ （或其导数）的 3 次项和 4 次项，它们表示了规范场的自相互作用。

对于真空场而言， $F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu}$  中可以允许规范场有质量项，关键看规范场的内禀空间是否存在三维球对称应变场。对于光子和胶子由于只有一维结构，因而无质量。这与以前的量子场理论中规范场粒子无质量的普遍结论是不同的。

综上所述，可以概括结果如下：如果要求  $n$  个场的多重态在  $SU(n)$  定域规范变换式 (8.3.6) 下不变，则必须引进  $n^2 - 1$  个（有质量或无质量的）规范场，它们按定域规范变换式 (8.3.12) 变换，并与  $n$  重态的同位旋矢量流耦合确定它们之间的相互作用。而且，由于  $SU(n)$  群的非阿贝尔性，规范场张量中除了散度项外，还有规范场的乘积项，这规定了规范场还有自相互作用。因此，它比阿贝尔情形要复杂得多。下面来讨论两个有用的特例。

### 1. $SU(2)$

对于同位旋二重态  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ ，拉氏量密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - i\gamma^M \partial_M)\psi \quad (8.3.22)$$

在整体  $SU(2)$  整体规范变换

$$U = \exp[iT^k \theta^k] \quad (k=1,2,3) \quad (8.3.23)$$

下是不变的。其物理图像是：沿  $\xi^k$  平移  $\theta^k = \theta'^k - \theta_0^k$ ，改变了该量子场的内禀自由度，量子场的内禀自由度由原来的  $\exp[i\theta_0^k \xi^k]$  变为  $\exp[i\theta^k \xi^k]$ 。 $\exp[i\theta^k \xi^k]$  由内禀空间表象转到粒子观测空间表象， $U = \exp[iT^k \theta^k]$ ， $T^k$  与  $\xi^k$  对应，都是某自由度的标架。 $T^k$  是粒子空间表象的标架。

用一个具体的例子来说明，如弱作用场。在弱作用中，质量发生改变， $T^k$  对应的是轻子空间表象<sup>①</sup>的质量标架。在基础表示下，

$$T^k = \frac{1}{2} \sigma^k \quad (8.3.24)$$

$\sigma^k$  为泡利矩阵。对于质量是三维空间“源”和“汇”的空间标架，与内禀空间的  $\vec{\xi}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  对应。容易验证以下算式：

$$T_r \sigma^k = 0, \quad T_r \sigma^i \sigma^j = \frac{1}{2} \delta^{ij} \quad (8.3.25)$$

① 不同类型粒子空间表象下的同一自由度的标架形式是不同的。

故  $SU(2)$  群的结构常数为  $\varepsilon^{ijk}$ 。

考虑在场  $gT_{\alpha\beta}^k A_\mu^k$  作用下, 质量自由度空间发生改变, 即

$$\exp[i\theta_0^k \xi^k] \rightarrow \exp[i\theta^k \xi^k] \quad (8.3.26)$$

沿  $\xi^k$  平移  $\Delta\theta^k$  不会导致旋量场变为其他场。换言之, 要求式 (8.3.22) 中的  $\mathcal{L}$  具有  $SU(2)$  定域规范不变性。为保持定域规范不变性, 则需要引进三个规范场  $A_\mu^k$ , 其变换为

$$A_\mu^k \rightarrow A_\mu'^k = A_\mu^k + \varepsilon^{ijk} \theta^i A_\mu^j + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^k(x) \quad (8.3.27)$$

构造协变导数:

$$D_\mu \psi_a = \left( \partial_\mu \delta_{a\beta} + ig \frac{\sigma_{\alpha\beta}^k}{2} A_\mu^k \right) \psi_\beta = (\partial_\mu + ig T_{\alpha\beta}^k A_\mu^k)_{\alpha\beta} \psi_\beta \equiv (\partial_\mu + ig \mathbf{A}_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta \quad (8.3.28)$$

以及规范场张量:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu}^k = \partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k - g \varepsilon^{ijk} A_\mu^i A_\nu^j \quad (8.3.29)$$

在  $T_{\alpha\beta}^k$  空间中的规范场  $A_\mu^k$  具有“源”和“汇”的结构, 会存在相互作用。这很好理解, 因为如果无相互作用, 规范场  $A_\mu^k$  发散, 根本无法具有“源”和“汇”的结构, 当然, 也就不在  $T_{\alpha\beta}^k$  空间中。规范场  $A_\mu^k$  是导致质量自由度空间发生改变的背景场。于是,  $SU(2)$  定域规范不变的拉氏量密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - \hat{M})\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - iT^\alpha \partial_\alpha)\psi - \frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu}^a \mathbf{F}^{b\mu\nu} \quad (8.3.30)$$

## 2. $SU(3)$

$SU(3)$  群适用于描述强相互作用。粒子物理的研究表明, 夸克不仅有“味” ( $u, d, s, c, b, t$ ), 而且还有“色”(红、黄、蓝)。现在来考虑夸克的色三重态(为了简单, 略去味指标)。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(\text{红}) \\ \psi_2(\text{绿}) \\ \psi_3(\text{蓝}) \end{pmatrix} \quad (8.3.31)$$

拉氏量密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi \quad (8.3.32)$$

夸克具有色自由度, 即

$$U(\xi) = \exp[-i\theta_0^a \xi^a]$$

设  $\xi^a$  是色自由度内禀空间的标架。色自由度发生改变,

$$U(\xi) \rightarrow U'(\xi)$$

$$\Delta U(\xi) = \exp[-i\theta^a \xi^a]$$

$$\theta^a = \theta'^a - \theta_0^a$$

转到色自由度粒子空间表象, 对应的是整体  $SU(3)$  规范变换

$$U = \exp[-iT^a \theta^a], \quad a = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (8.3.33)$$

下是不变的。 $T^a$  是色自由度粒子空间的标架, 夸克之间传递胶子会改变色荷。传递胶子有

8 个通道，在基础表示下，有 8 个生成元。

$$T^a = \frac{1}{2} \lambda^a \quad (8.3.34)$$

其中， $\lambda^a$  是下列盖尔曼矩阵：

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.3.35)$$

$$\lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

它们满足

$$\text{Tr} \lambda^a = 0$$

$$\text{Tr} \lambda^a \lambda^b = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (8.3.36)$$

$$\left[ \frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2} \quad (8.3.37)$$

其中， $f^{abc}$  是完全反对称的。其非零分量如下：

$$\begin{aligned} f^{147} = -f^{158} = f^{246} = f^{267} = f^{345} = -f^{367} &= \frac{1}{2} \\ f^{123} &= 1 \\ f^{458} = f^{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$SU(3)$  群的结构常数就是上面的  $f^{abc}$ 。

夸克“色”的改变不会导致“味”的改变。这一性质要求式 (8.3.32) 中的  $\mathcal{L}$  具有  $SU(3)$  定域规范不变性，则需要引进 8 个规范场  $\mathbf{B}_\mu^a$ ，即胶子场。其变换为

$$\mathbf{B}_\mu^a \rightarrow \mathbf{B}_\mu'^a = \mathbf{B}_\mu^a + f^{abc} \theta^b \mathbf{A}_\mu^c + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a(x) \quad (8.3.38)$$

构造协变导数：

$$D_\mu \psi_a = \left( \partial_\mu \delta_{a\beta} + ig \frac{\lambda_{a\beta}^a}{2} B_\mu^a \right) \psi_\beta \equiv (\partial_\mu + ig B_\mu)_{a\beta} \psi_\beta \quad (8.3.39)$$

以及规范场张量：

$$\mathbf{G}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathbf{B}_\nu^a - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu^a - g f^{abc} \mathbf{B}_\mu^b \mathbf{B}_\nu^c \quad (8.3.40)$$

则  $SU(3)$  定域规范不变的拉氏量密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu D_\mu - M) \psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{b\mu\nu} \quad (8.3.41)$$

其中，夸克质量矩阵  $M$  与味有关，而与色无关。

## 第9章 弱作用场

弱作用和电磁作用的物理本质曾被认为是不同的，因为它们存在如下差异。

① 作用强度不同：电磁作用耦合常数为  $\alpha = \frac{1}{137}$ ，而弱作用的耦合常数为  $10^{-5} / m_p^2$ 。

② 作用力程不同：电磁作用是长程力，而弱作用的力程小于  $1 \times 10^{-16} \text{ cm}$ 。

研究表明弱作用和电磁作用具有共同的物理本质。下面先定性地说一下为什么会有上述两种差异。

弱作用的本质是不稳定高能态费米子内禀场发生衰变分离，而形成多个较稳定的低能态费米子。轻子弱相互作用的本质是轻子态的粒子通过释放中微子，由高能态衰变为低能态的过程。对于费米子而言，内部的应变场就是静态弱力场。处于低能态的粒子是最稳定的。弱作用是高能态粒子中心点的分裂，粒子由高能态回到低能态。这有点像细胞分裂。如图 9.0.1 所示，当中心点由一个变成两个时，弱作用也就结束了，所以弱相互作用的力程就特别短。形象地说，高能态的  $\mu^-$  轻子就像穿着一件厚重的能量外衣，处于不稳定状态，只有把这件外衣脱掉，才能回到稳定  $e^-$  电子态。而这件能量外衣为了保持角动量守恒，就变成两件，也就是自旋相反的  $\nu_\mu$  和  $\bar{\nu}_e$  中微子。

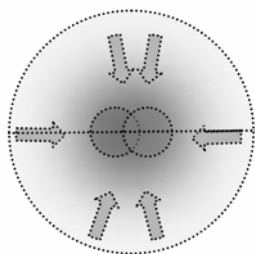


图 9.0.1 弱作用示意图

弱力线是电力线前端，弱作用耦合和电磁耦合常数一致，耦合常数  $g' \approx e$ 。弱作用是通过交换一种自旋为 1 的  $W^\pm, Z^0$  中间玻色子起作用的。由于作用力程很短，中间玻色子的质量很大。相应地，因为传递有很大静质量的玻色子，弱作用变得极弱。

### 9.1 弱相互作用顶角

#### 9.1.1 相互作用顶角

##### 1. 量子场理论相互作用顶角

对于  $\bar{\psi} O \psi$  来说， $\bar{\psi}$  与  $\psi$  相互作用的顶角就是  $O$ 。现在我们来考虑双线型旋量  $\bar{\psi} O \psi$  在 Lorentz 变换下的情况。根据公式



$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = L(\omega)\psi(x) \quad (9.1.1)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \psi(x)L^{-1}(\omega) \quad (9.1.2)$$

我们有

$$\bar{\psi}'(x')O\psi'(x') = \bar{\psi}(x)L^{-1}O\psi(x) \quad (9.1.3)$$

$$\begin{aligned} \text{再由} \quad L^{-1}(\omega)\gamma^\lambda L(\omega) &= \gamma^\lambda + \frac{i}{4}[\sigma^{\rho\sigma}, \gamma^\lambda]\omega_{\rho\sigma} \\ &= \gamma^\lambda - g^{\lambda\rho}\gamma^\sigma\omega_{\rho\sigma} = \left(g^\lambda_\sigma - \omega^\lambda_\sigma\right)\gamma^\sigma = \Lambda(\omega)^\lambda_\sigma\gamma^\sigma \end{aligned} \quad (9.1.4)$$

可以得到

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad O &= I, \quad \bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x); \\ \text{(b)} \quad O &= \gamma^\nu, \quad \bar{\psi}'(x')\gamma^\nu\psi'(x') = \Lambda^\nu_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x); \\ \text{(c)} \quad O &= \sigma^{\mu\nu}, \quad \bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma\bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x). \end{aligned}$$

可见, 双线型旋量按 Lorentz 群的张量表示变换。(a), (b), (c) 分别是标量、矢量和 (二阶) 张量。

为了讨论赝张量表示, 需要在矩阵  $O$  中引进新的  $\gamma$  矩阵, 它定义为

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (9.1.5)$$

其中  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  为四阶完全反对称张量, 具有  $\epsilon_{0123} = 1$ ,  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 。显然  $\gamma^5$  满足

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \gamma_5^2 = I \quad (9.1.6)$$

在标准表示下, 它的分块形式为

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.1.7)$$

此外, 还需讨论在空间反射下的变换性质。给出在  $\mathcal{P}$  变换下 Dirac 场  $\psi(x)$  的变换为

$$\mathcal{P} \psi(x) = \psi'(x') = \eta_\nu \gamma^0 \psi(x), \quad (9.1.8)$$

其中相因子  $\eta_\nu$  满足  $\eta_\nu^2 = \pm 1$  (由于旋量表示的双值性)。而  $\bar{\psi}$  的变换为

$$\mathcal{P} \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}'(x') = \eta_\nu^* \psi(x) \gamma^0 \quad (9.1.9)$$

利用式 (9.1.6) 的第一式容易证明

$$L^{-1}\gamma^5 L = \gamma^5 \quad (9.1.10)$$

现在可以考虑  $O = \gamma_5, \gamma_5\gamma^\nu, \gamma_5\sigma^{\mu\nu}$  时的双线型旋量。由于式 (9.1.10) 在 Lorentz 变换下它们的变换性质分别与不含  $\gamma^5$  的 (a), (b), (c) 相同。但在  $\mathcal{P}$  变换下, 利用下列关系

$$\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0 = \gamma_\nu, \quad \gamma^0\gamma^5\gamma^0 = -\gamma_5 \quad (9.1.11)$$

我们得到

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad O &= I, & \mathcal{P}(\bar{\psi}(x)\psi(x)) &= \bar{\psi}(x)\psi(x); \\ \text{(b)} \quad O &= \gamma^\nu, & \mathcal{P}(\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)) &= \bar{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x); \\ \text{(c)} \quad O &= \sigma^{\mu\nu}, & \mathcal{P}(\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)) &= \bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x); \\ \text{(d)} \quad O &= \gamma^5, & \mathcal{P}(\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)) &= -\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x); \\ \text{(e)} \quad O &= \gamma^5\gamma^\nu, & \mathcal{P}(\bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\nu\psi(x)) &= -\bar{\psi}(x)\gamma_\nu\psi(x); \end{aligned}$$

$$(f) \quad O = \gamma^0 \sigma^{\mu\nu}, \quad \mathcal{P}(\bar{\psi}(x) \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \psi(x)) = -\bar{\psi}(x) \gamma^j \sigma_{\mu\nu} \psi(x).$$

反对称张量  $\sigma^{\rho\sigma} = \frac{i}{2}[\gamma^\rho, \gamma^\sigma]$ 。前三类分别是真标量、矢量和张量，而后三类则是赝量。

## 2. 弱作用的半向空间图像

在弱相互作用中，一个粒子分裂成两个粒子，粒子具有纤维化结构，粒子的中心点以某根纤维作为通道。粒子中心的分裂过程可以理解为两中心之间通过场纤维传递  $W$  粒子。弱作用场会产生一种奇特的宇称不守恒，也就是左右不对称。这是由于弱作用衰变由一个粒子分裂成两个粒子，是在半向空间中进行的，半向空间会造成左右不对称。下面回顾一下半向空间。

前面定义由拉伸场构成正空间，压缩场构成反空间。当产生一对轻子后，正粒子只有拉伸场，为正空间；反粒子只有压缩场，为反空间。此时，物理空间发生分裂，一个完整的空间分裂为独立的正反两个空间。这种分裂后的空间是一种非常奇特的空间，所有的维度依然保持原来的特性，但方向却仅有原来的一半，称为半向空间。在半向空间中，转动  $360^\circ$  时，仅相当于全空间转动  $180^\circ$ ，电子  $e^-$  的内部空间正是半空间。将只存在一种场形变的空间区域定义为半向空间。

弱作用是在同类空间（拉伸态或压缩态）之间进行的，换言之，弱衰变过程在半向空间内进行，因而空间失去对称性，宇称不守恒。

具体地来看一下  $\mu$  轻子的弱作用中，内禀空间是如何分裂的。

$$\mu(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\sigma (1 - \gamma^5) u_\mu] [\bar{u}_e \gamma_\sigma (1 - \gamma^5) u_{\bar{\nu}_e}]$$

轻子内禀场质量就是静态弱力场。弱作用是在内禀空间内进行的，所以弱相互作用的力程特别短。粒子处于质量态的最低能级时最稳定。当轻子中心以外的背景场也达到形变极限时，粒子处于高能态。相应的轻子自旋波为高能态自旋波。这是一种不稳定的状态，最终要回到低能态才稳定。如图 9.1.1 所示，这一效应导致  $\mu$  子要衰变成电子， $\mu$  子释放一个自旋波使轻子的极化态能量降低，自旋波就是  $\nu_\mu$ ，并带走了相应的极化态能量。原来的轻子就处于低能无自旋态，显然这种状态是不可能存在的，于是又释放一个低能自旋波  $\bar{\nu}_e$ ，同时轻子获得一个相反的自旋，保持角动量守恒。最终衰变成稳定的低能态轻子，即电子。

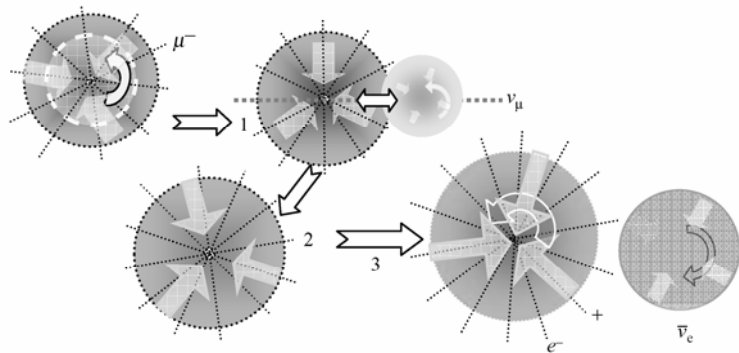


图 9.1.1 弱作用的导致内禀空间分裂

## 9.1.2 费米子相互作用的顶角空间

### 1. 粒子空间顶角<sup>①</sup>

#### (1) 自由场

基本的费米子都是自旋为  $\frac{1}{2}$  的粒子，被视为点粒子，用旋量波函数  $\psi(x)$  描述。它们的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\partial - m)\psi(x) \quad (9.1.12)$$

运动方程为

$$\mathcal{L} = \underbrace{\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)}_{\text{矢量顶角}} - m\underbrace{\bar{\psi}(x)}_{\text{标量顶角}}\underbrace{\psi(x)}_{\text{标量顶角}}$$

式中,  $\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$ ,  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ ,  $\vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha}$ ,  $\gamma^0 = \beta$ 。在标准表象中,  $\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ 。 $\vec{\sigma}$  是泡利矩阵, 再定义  $\gamma^5 = \gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ 。

#### (2) 手征性 (Chirality)

定义手征算符如下:

$$P_L = \frac{1+\gamma_5}{2}$$

$$P_R = \frac{1-\gamma_5}{2}$$

它们有正交、单幂、完备性, 即

$$P_L P_R = \frac{1+\gamma_5}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} = \frac{1-\gamma_5^2}{2} = 0$$

$$P_L P_L = \frac{1+\gamma_5}{2} \frac{1+\gamma_5}{2} = \frac{1+2\gamma_5+\gamma_5^2}{4} = P_L$$

$$P_R P_R = \frac{1-\gamma_5}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} = \frac{1-2\gamma_5+\gamma_5^2}{4} = P_R$$

$$P_L + P_R = \frac{1+\gamma_5}{2} + \frac{1-\gamma_5}{2} = 1$$

这一概念在真空场的理论中, 要加入新的含义: 如果量子场相互作用的顶角在正常的四维时空中, 相互作用的顶角为  $\gamma_\mu$ ; 如果量子场相互作用的顶角在正半向时空 (以后略去“正”字) 中, 相互作用的顶角为  $\gamma_\mu P_L$ ; 如果量子场相互作用的顶角在反半向时空中, 相互作用的顶角为  $\gamma_\mu P_R$  (对于这样的相互作用, 只有在反粒子衰变过程中存在, 如反质子衰变)。

$\gamma_\mu P_L$  构成正半向空间算符, 而  $\gamma_\mu P_R$  则构成反半向空间算符。

定义手征旋量场如下:

① 胡瑶光, 规范场论. 华东师范大学出版社, 1984, p34~74.

$$\begin{aligned}\psi_L &= P_L \psi = \frac{1+\gamma_5}{2} \psi \\ \psi_R &= P_R \psi = \frac{1-\gamma_5}{2} \psi\end{aligned}$$

显然有

$$\psi = \psi_L + \psi_R$$

## 2. 费米V-A理论

费米受电磁作用流结构的启发提出  $\beta$  衰变的不变幅  $\mu = G(\bar{u}_n \gamma^\mu u_p)(\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\mu u_e)$ 。粒子相互作用顶角  $\gamma^\mu$ ，为对称空间顶角，宇称是守恒的。V-A 理论认为四费米子  $\psi_a$ ， $\psi_b$ ， $\psi_c$ ， $\psi_d$  的相互作用

$$\mathcal{L}_w \sim \bar{\psi}_a(x) H \psi_b(x) \cdot \bar{\psi}_c(x) H' \psi_d(x)$$

有直接耦合的形式，称为四费米子直接耦合的理论。这里  $H$  和  $H'$  矩阵分别构成了费米子  $\psi_a$ 、 $\psi_b$  和  $\psi_c$ 、 $\psi_d$  相互作用的顶角空间。顶角  $\gamma^\mu$  并没有考虑顶角空间特性。

1956 年，李政道和杨振宁提出弱相互作用中宇称并不守恒。紧接着，吴健雄等用极其精巧的实验证实了他们的理论。 $\beta$  衰变破坏宇称的一系列的实验发现，使得有必要对相互作用顶角  $\gamma_\mu$  进行这样的替换： $\gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu(1+\gamma_5)$ 。现在已知道这是由半空间特性所造成的， $\gamma_\mu$  对应粒子表述的对称空间，即宇称守恒。粒子相互作用顶角  $\gamma^\mu(1+\gamma^5)$  就是粒子表述的半向空间，宇称不守恒。经过替换以后，质子  $p$  和轻子  $\mu$  弱衰变的不变幅为

$$\mu(p \rightarrow n e^+ \nu_e) = \frac{G}{\sqrt{2}} \underbrace{[\bar{u}_n \gamma_\mu (1+\gamma_5) u_p]}_{\text{半向空间顶角}} \underbrace{[\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\mu (1+\gamma_5) u_e]}_{\text{半向空间顶角}} \quad (9.1.13a)$$

$$\mu(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G}{\sqrt{2}} \underbrace{[\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1+\gamma_5) \psi_{\nu_e}]}_{\text{半向空间顶角}} \underbrace{[\bar{\psi}_{\bar{\nu}_\mu} \gamma_\mu (1+\gamma_5) \psi_\mu]}_{\text{半向空间顶角}} \quad (9.1.13b)$$

式中，因子  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  为约定。

之后，综合实验结果，经过分析人们得到

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_w &= \frac{G}{\sqrt{2}} J_\mu^+ J^\mu \\ J_\mu &= \bar{\nu} \gamma_\mu (1+\gamma_5) l + g_0 \bar{u} \gamma_\mu (1+\gamma_5) d + g_1 \bar{u} \gamma_\mu (1+\gamma_5) s\end{aligned} \quad (9.1.14)$$

这里，用粒子符号如轻子  $l$ ， $\nu$  和夸克  $u$ ， $d$ ， $s$ ，表示粒子的场量，如  $\psi_l(x)$ ， $\psi_\nu(x)$ ， $\psi_u(x)$ ， $\psi_d(x)$ ， $\psi_s(x)$ 。上式叫做费米普适 V-A 理论。人们用式 (9.1.2) 中的  $\frac{G}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma_\mu (1+\gamma_5) \nu_e \cdot \bar{\nu}_\mu \gamma_\mu (1+\gamma_5) \mu$  来计算过程  $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ 。

把计算结果和实验比较，定出弱作用耦合常数为

$$G = 1.01 \times 10^{-5} / m_p^2 \quad (9.1.15)$$

其中， $m_p$  是质子质量。

费米理论成功地解释了一些低能弱相互作用现象，但在高能时 ( $\geq 300\text{GeV}$ ) 将破坏么正极限定理。考虑到和电磁相互作用之间的相似性，开始设想弱作用通过交换一种自旋为 1 的、被称为弱玻色子的带电矢量  $W^\pm$  的发射和吸收来实现，弱玻色子与电磁作用的光子和色

作用的胶子类似。 $\mu^-$  衰变是通过交换  $W^-$  玻色子来实现的 (如图 9.1.2 所示), 幅的形式为

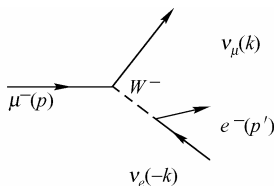


图 9.1.2  $\mu^-$  衰变

$$\mu = \left[ \frac{g}{\sqrt{2}} u_{\nu\mu} \gamma^\sigma \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u_\mu \right] \frac{1}{M_W^2 - q^2} \left[ \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_e \gamma_\sigma \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u_{\nu e} \right] \quad (9.1.16)$$

上式已对弱玻色传播子的自旋求了和。其中,  $\frac{g}{\sqrt{2}}$  是无量纲的耦合常数,  $q$  为弱玻色子携带的动量, 因子  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  和  $\frac{1}{2}$  可以使  $g$  符合约定的定义。与光子相反, 弱玻色子必须有质量, 实验证实  $M_W = (80.33 \pm 0.15) \text{ GeV}$ 。如图 9.1.3 所示, 四费米子点相互作用的耦合常数  $G$  和中间玻色子 ( $W^\pm$ ) 与轻子之间弱作用耦合常数  $g$  是描写同一弱过程的两个常数, 考虑式 (9.1.12) 或式 (9.1.13), 在低动量交换 ( $q^2 \rightarrow 0$ ) 时, 应有

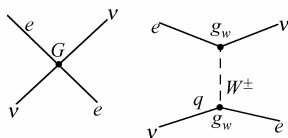


图 9.1.3 弱相互作用机制的耦合常数

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{g'^2}{q^2 + M_W^2} \equiv \frac{G}{\sqrt{2}} \quad (9.1.17)$$

即

$$M_W^2 = \frac{\sqrt{2} g'^2}{G} \quad (9.1.18)$$

弱作用和电磁作用都具有纤维结构。弱作用和电磁作用是纤维场的不同区域, 因而弱作用耦合常数  $g'$  和电磁耦合常数  $e$  的大小应相等,  $g'^2 = e^2$ , 则由式 (9.1.17) 可以估算出弱作用中间玻色子的质量为

$$M_W^2 = \frac{\sqrt{2} e^2}{G} \quad (9.1.19)$$

其中,  $e^2 = 4\pi/137$ ,  $G = 10^{-5}/m_p^2$  (自然单位制中,  $\hbar = c = 1$ ), 代入上式, 可以估算出  $M_W \approx 90 \text{ GeV}$ , 这个值和实验值是一致的。

若  $q^2 \ll M_W^2$  (如  $\mu$  子衰变), 式 (9.1.14) 回到式 (9.1.13), 并且有

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (9.1.20)$$

在这种极限下，弱流之间的传播子消失了，弱流基本上在一个点发生相互作用（注意  $g^2 = 8g'^2$ ）。弱作用之所以弱，不是因为  $g \ll e$ ，而是因为  $M_W^2$  很大。假如  $g'$  与  $e$  相当，则在能量达到  $M_W$  量级或更高时，弱作用强度将变得与电磁作用强度相当。可以把  $g' \approx e$  认为是弱作用和电磁作用的统一。

### 3. 非完全的半向空间顶角

质子  $p$  由  $uud$  夸克组成，中子  $n$  由  $udd$  夸克组成，式 (9.1.14) 中的

$$\bar{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)d \sim \bar{p}\gamma_\mu(1+\alpha\gamma_5)n \quad (9.1.21)$$

由于夸克构成强子时，矢量形状因子和轴矢量形状因子不尽相同，因而  $\alpha \neq 1$ ，偏离了  $\mathbf{V}-\mathbf{A}$  形式，这表明顶角并非完全的半向空间。人们用

$$\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu_e \cdot g_0\bar{p}\gamma^\mu\gamma_\mu(1+\alpha\gamma_5)n \quad (9.1.22)$$

来计算  $\beta$  衰变过程：  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ，把计算结果和实验比较，定出

$$g_0 \gg 1, \quad \alpha \approx 1.2 \quad (9.1.23)$$

### 4. 夸克弱作用耦合常数

由于  $\Lambda$  超子由  $uds$  夸克组成，质子  $p$  由  $uud$  夸克组成，式 (9.1.21) 中的

$$\bar{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)s \sim \bar{p}\gamma_\mu(1+\alpha\gamma_5)\Lambda$$

人们用

$$\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu_e \cdot g_1\bar{p}\gamma^\mu(1+\alpha\gamma_5)\Lambda$$

来计算过程：  $\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ，把计算结果和实验比较可得

$$g_1 \sim 10^{-2} \quad (9.1.24)$$

### 5. 卡比玻 (Cabibbo) 角

考虑到强子的夸克结构，人们能够用普适费米  $\mathbf{V}-\mathbf{A}$  理论，即式 (9.1.21) 来说明弱作用的经验规律。但是对以式 (9.1.23)，式 (9.1.24) 表示的  $g_0$ ，  $g_1$ ，却还不十分清楚。1963 年，卡比玻在分析、综合实验结果的基础上指出

$$g_0^2 + g_1^2 \approx 1 \quad (9.1.25)$$

并且引进卡比玻角  $\theta_c$ ，令

$$g_0 = \cos\theta_c, \quad g_1 = \sin\theta_c \quad (9.1.26)$$

这样，就使两个待定的常数  $g_0$ ，  $g_1$  减少为一个特定常数  $\theta_c$ 。现在的实验指出

$$\theta_c \approx 13.17^\circ, \quad \sin\theta_c = 0.229$$

利用式 (9.1.26)，可以把式 (9.1.21) 写成

$$-\mathcal{L}_w = \frac{G}{\sqrt{2}}J_\mu^+J^\mu \quad (9.1.27)$$

$$J_\mu = \bar{\nu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)l + \bar{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)d_e$$

其中，  $u$ ，  $d$ ，  $s$  是夸克的质量本征态，  $d_\theta$  是夸克的弱作用本征态。

## 6. 左手流

式 (9.1.27) 表示的弱作用流是 V-A 形式, 非常明白地表示出了半向空间顶角  $\gamma_\mu(1+\gamma_5)$ ,  $\gamma_\mu$  为普通空间。

为了把理论表述为具有规范对称性, 这里把它改写成左手矢量流的形式。根据手征算符的单幂性和  $\gamma_5$  与  $\gamma_\mu$  的反对易性, 有

$$\gamma_0 \gamma_\mu \frac{1+\gamma_5}{2} = \gamma_0 \gamma_\mu \frac{1+\gamma_5}{2} \cdot \frac{1+\gamma_5}{2} = \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma_0 \gamma_\mu \frac{1+\gamma_5}{2}$$

又因为

$$\psi_L = \frac{1+\gamma_5}{2} \psi, \quad \bar{\psi}_L = \psi_L^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger \frac{1+\gamma_5}{2} \gamma_0$$

所以, 式 (9.1.27) 就可以改写成

$$\begin{aligned} J_\mu &= 2J_{L\mu} \\ J_{L\mu} &= \bar{\nu}_L \gamma_\mu l_L + \bar{u}_L \gamma_\mu d_{L\theta} \\ d_{L\theta} &= d_L \cos \theta_c + s_L \sin \theta_c \end{aligned} \quad (9.1.28)$$

## 7. $SU(2)$ 形式

还可以把费米普适 V-A 弱作用理论, 用  $SU(2)$  形式表达出来。进一步改写式 (9.1.28), 令

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}, \quad q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_{L\theta} \end{pmatrix} \quad (9.1.29)$$

为同位旋空间的二重态。取如下同位旋算符:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

式 (9.1.28) 就可以写成

$$J_{L\mu} = \bar{L} \gamma_\mu \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2} L + \bar{q}_L \gamma_\mu \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2} q_L \quad (9.1.30)$$

弱作用流可以写成式 (9.1.27)、式 (9.1.28) 和式 (9.1.30) 等不同形式, 它们都已经包含了半向空间顶角,  $\gamma_\mu \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2}$  包含了半向空间。表达式描述的相互作用在半向空间中进行, 但它们都是同一经验规律的不同表述。

为了进一步进行理论上的推广, 引进同位旋流:

$$\bar{J}_{L\mu} = \bar{L} \gamma_\mu \frac{\vec{\sigma}}{2} L + \bar{q}_L \gamma_\mu \frac{\vec{\sigma}}{2} q_L \quad (9.1.31)$$

显然有

$$J_{L\mu} = J_{L\mu}^1 + iJ_{L\mu}^2$$

把它代入式 (9.1.28) 和式 (9.1.27) 得

$$-\mathcal{L}_w = 2\sqrt{2}G(J_{L\mu}^1 J_L^{1\mu} + J_{L\mu}^2 J_L^{2\mu}) \quad (9.1.32)$$

式 (9.1.32)、式 (9.1.31)、式 (9.1.29) 和式 (9.1.27) 一起, 以左手同位旋矢量流的形式描写弱作用的经验规律。

从对称性的角度来看, 式(9.1.32)描写的规律是不够好的。在同位旋空间, 它只有轴对称性, 没有球对称性, 即在绕同位旋第三轴的转动下, 有

$$L(q_L) \rightarrow L'(q'_L) = \exp\left[-i\theta^3 \frac{\sigma^3}{2}\right] L(q_L)$$

式(9.1.32)表示的 $\mathcal{L}_w$ 是不变的, 但在任意的同位旋转动下, 有

$$L(q_L) \rightarrow L'(q'_L) = \exp\left[-i\theta^i \frac{\sigma^i}{2}\right] L(q_L) \quad (9.1.33)$$

式(9.1.32)表示的 $\mathcal{L}_w$ 不是不变的, 人们设想, 弱作用规律可能在同位旋空间具有球对称性, 因而在式(9.1.32)中加上

$$\begin{aligned} J_{L\mu}^3 &= \bar{L}\gamma_\mu \frac{\tau_3}{2} L + \bar{q}_L \gamma_\mu \frac{\tau_3}{2} q_L \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \bar{l}_L \gamma_\mu l_L + \bar{u}_L \gamma_\mu u_L + \bar{d}_{L\theta} \gamma_\mu d_{L\theta}) \end{aligned} \quad (9.1.34)$$

的平方项, 使之成为

$$-\mathcal{L}_w = 2\sqrt{2}G(J_{L\mu}^1 J_L^{1\mu} + J_{L\mu}^2 J_L^{2\mu} + J_{L\mu}^3 J_L^{3\mu}) = 2\sqrt{2}G \vec{J}_{L\mu} \cdot \vec{J}_L^\mu \quad (9.1.35)$$

这样就达到要求。事实上在无穷小变换下, 由式(9.1.33)可得

$$\begin{aligned} L'(q'_L) &= \left(1 - i\theta_i \frac{\tau_i}{2}\right) L(q_L) \\ \bar{L}'(\bar{q}'_L) &= \bar{L}(\bar{q}_L) \left(1 + i\theta_i \frac{\tau_i}{2}\right) \\ \bar{L}'(\bar{q}'_L) \frac{\tau_j}{2} L'(q'_L) &= \bar{L}(\bar{q}_L) \left(1 + i\theta_i \frac{\tau_i}{2}\right) \frac{\tau_j}{2} \left(1 - i\theta_i \frac{\tau_i}{2}\right) L(q_L) \\ &= \bar{L}(\bar{q}_L) \left(\frac{\tau_j}{2} + \theta_i \left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}\right]\right) L(q_L) = [\delta_{jk} + \theta_i \varepsilon_{ijk}] \bar{L}(\bar{q}_L) \frac{\tau_k}{2} L(q_L) \\ \bar{L}'(\bar{q}'_L) \frac{\tau_j}{2} L'(q'_L) \cdot \bar{L}'(\bar{q}'_L) \frac{\tau_{k'}}{2} L'(q'_L) &= (\delta_{jk} + \theta_i \varepsilon_{jki})(\delta_{jk'} + \theta_{i'} \varepsilon_{jk'i'}) \bar{L}(\bar{q}_L) \frac{\tau_k}{2} L(q_L) \cdot \bar{L}(\bar{q}_L) \frac{\tau_{k'}}{2} L(q_L) \\ &= (\delta_{kk'} + 2\theta_i \varepsilon_{ikk'}) \bar{L}(\bar{q}_L) \frac{\tau_k}{2} L(q_L) \cdot \bar{L}(\bar{q}_L) \frac{\tau_{k'}}{2} L(q_L) \\ &= \bar{L}(\bar{q}_L) \frac{\tau_k}{2} L(q_L) \cdot \bar{L}(\bar{q}_L) \frac{\tau_{k'}}{2} L(q_L) \end{aligned}$$

由此可知, 由式(9.1.35)描写的弱作用理论确实是 $SU(2)$ 不变的, 即同位旋守恒。引入同位旋流后, 式(9.1.35)具有 $SU(2)$ 不变性, 同时也描述了相互作用在半向空间中进行的基特性。

## 8. GIM机制和 $c$ 夸克

把式(9.1.32)推广到式(9.1.35)只是理论上的设想, 是否正确还有待实践的检验。在式(9.1.34)表示的中性流中, 有奇异数改变的中性流:

$$\bar{d}_L \gamma_\mu s_L \cos \theta_c \sin \theta_c \quad (9.1.36)$$

在式(9.1.35)中, 就有



$$2\sqrt{2}G\bar{d}_L\gamma_\mu s_L \cos\theta_c \sin\theta_c \bar{l}_L\gamma_\mu l_L$$

从  $K^+$ ,  $K^0$ ,  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  介子的夸克组成来看, 按照上式应该存在如下过程:

$$\begin{aligned} K^+ &\rightarrow \pi^+ + e^+ + e^- \\ K^0 &\rightarrow \mu^+ + \mu^- \end{aligned}$$

可是, 实验指出, 这样的过程不存在。换句话说, 式 (9.1.36) 表示的奇异数改变的中性流是不存在的, 式 (9.1.34) 和式 (9.1.35) 描写的规律不是完全正确的。

为了去除奇异数改变的中性流, Glashow, Iliposvlas 和 Maiani 引进  $c$  夸克, 考虑和  $d_{L0} = d_L \cos\theta_c + s_L \sin\theta_c$  正交的夸克本征态:

$$s_{L0} = -d_L \sin\theta_c + s_L \cos\theta_c \quad (9.1.37)$$

组成新的同位旋二重态:

$$q'_L = \begin{vmatrix} c_L \\ s_{L0} \end{vmatrix} \quad (9.1.38)$$

构成新的左手同位旋矢量流:

$$\bar{q}'_L\gamma_\mu \frac{\vec{\tau}}{2} q_L$$

把式 (9.1.31) 扩展为

$$\bar{J}_{L\mu} = \bar{J}_{L\gamma\mu} \frac{\vec{\tau}}{2} L + \bar{q}_L\gamma_\mu \frac{\vec{\tau}}{2} q_L + \bar{q}'_L\gamma_\mu \frac{\vec{\tau}}{2} q'_L \quad (9.1.39)$$

保持式 (9.1.35) 的形式可得

$$-\mathcal{L}_w = 2\sqrt{2}G\bar{J}_{L\mu}J_{L\mu}^\mu \quad (9.1.40)$$

这样, 就构成了新的弱作用理论。这个过程叫做 GIM 机制。在式 (9.1.37) 中的中性流为

$$J_{L\mu}^3 = \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L\gamma_\mu \nu_L - \bar{l}_L\gamma_\mu l_L + \bar{u}_L\gamma_\mu u_L - \bar{d}_L\gamma_\mu d_L + \bar{c}_L\gamma_\mu c_L - \bar{s}_L\gamma_\mu s_L) \quad (9.1.41)$$

奇异数改变的中性流不见了, 理论和实验的矛盾解决了。

但是还是存在问题。首先, 这个理论破坏么正性。从这个理论看来, 过程的截面  $\sigma$  和相互作用常数  $G$  的平方成正比。 $\sigma$  的量纲是  $[m]^{-2}$ ,  $G$  的量纲也是  $[m]^{-2}$ 。在高能时, 粒子质量可以忽略不计, 有量纲的参数只有质心系系统能量的平方  $s$ , 其量纲为  $[m]^2$ 。因而,  $\sigma$  的高能行为是

$$\sigma \sim G^2 s$$

但是, 因为四费米相互作用的形式, 确定截面只能有单一的分波, 所以就有么正限

$$\sigma \sim 1/s$$

由此可见, 当  $Gs$  达到 1 的数量级时, 高能行为破坏了么正限。其次, 由于只有当相互作用的量纲  $[m]^x$  中,  $x \rightarrow 0$  时, 理论才可能是可重整化的, 而  $G$  的量纲中,  $x = -2$ , 是小于 0 的, 所以这种理论是不可以重整化的。最后, 这个理论没有和电磁作用统一起来。电磁作用流是

$$J_\mu^{em} = -\bar{l}\gamma_\mu l + \frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma_\mu d + \frac{2}{3}\bar{c}\gamma_\mu c - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma_\mu s \quad (9.1.42)$$

## 9.2 弱电统一模型的物理图像

### 9.2.1 弱作用内禀空间图像

弱作用是被限制在内禀空间内进行的。考虑  $\mu$  轻子的衰变。轻子的内禀空间半径为  $R$ ，轻子的弱相互作用首先是由中心区域分裂开始的，当轻子处于高质量态时，内禀场向中心拉伸（或压缩）加剧，轻子场处于非完全球对称态，中心点的邻域发生了非常微小的形变，中心区处于不稳定状态。达到形变极限的中心点会发生分裂，导致轻子的衰变。因而衰变中心区只能存在于轻子的中心区域。

衰变中心区被限制在内禀空间内，中心点分裂是由于两重合的中心点交换  $W_\mu^1(x), W_\mu^2(x), W_\mu^3(x)$  粒子来实现的。 $W_\mu^i$  粒子（即能量外衣）不可通过实验直接观测到，为虚粒子。如果要使衰变中心区能被实验测出，那么衰变中心区就要进入到观测“平直”空间中，这样衰变中心区就必须有一个很强的轻子背景，才能“冻结”  $W_\mu^i$  粒子，这样的整体才能被实验直接观测到。这个整体是一个质量很大的粒子，这个不稳定的整体粒子就是我们所熟知的  $W^{\pm,0}$  粒子。 $W^\pm$  粒子的静质量为  $m = 80.22 \pm 0.26 \text{ GeV}$ 。

弱作用的力程小于  $10^{-16} \text{ cm}$ ，在内禀场中心部位。在图 9.2.1 中，轻子中心由一个分裂为两个时，弱作用结束。可以把中心区分裂想像为一个液滴分裂为两个液滴，当两个中心点刚好相切时，球心之间的距离就是弱作用力程  $d$ 。这样就可以定性理解为什么弱作用的力程很短。

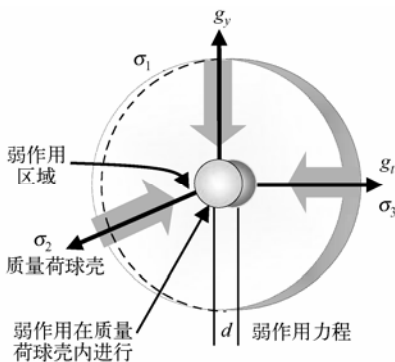


图 9.2.1 弱作用力场

### 9.2.2 真空中无对称破缺的弱电统一模型

#### 1. $U(1)$ 定域规范变换

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\theta(x)} \psi(x) \quad (9.2.1)$$

为满足规范不变性，令  $D_\mu \psi \rightarrow (D_\mu \psi)' = e^{-i\theta(x)} D_\mu \psi$ ，协变导数为  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ 。引进一个规范场  $A^\mu$ ，规范场张量为  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 。

$$\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_g = \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m] \psi - \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) \quad (9.2.2)$$

上式对应的物理事实是：荷电粒子  $\psi$  背景空间存在电磁场，场  $\psi$  与电磁场  $F_{\mu\nu}$  相互发生作用，结果导致  $\psi$  获得了动量  $eA_\mu$ ， $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = ue^{-i[k-k(x)]x}$ 。参与相互作用的规范场  $A_\mu$  中，只有  $eA_\mu$  由虚光子态转化为  $\psi$  动量  $\theta(x)$ ，转换关系满足

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x)$$

$$e\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \theta(x)$$

定义  $\partial_\mu \theta(x) = k_\mu(x)$  为内禀空间四动量。

## 2. 质量算符的引入

$\psi = u \exp(-ikx)$  的四动量波矢  $k$  可以视为量子场的内禀四动量，动量算符为  $i\gamma_\mu \partial_\mu$ 。质量也是  $\psi$  的内禀自由度，类比于动量波矢  $k$  可以把  $\psi$  表述为

$$\psi = u \exp(-ikx - i\theta^i M^i)$$

引入质量自由度算符  $\hat{m} = i\vec{T} \partial / \partial M^i$ ，得到质量本征值为

$$\hat{m}\psi = (\vec{k} \cdot \vec{T})u \exp(-ikx - ik^i M^i)$$

定义质量  $m \equiv \vec{k} \cdot \vec{T}$ ，自由旋量场中， $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}[i\gamma^\mu \partial_\mu - iT^i \partial_{M^i}]\psi = \bar{\psi}[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi$ 。引入质量自由度和算符并不改变量子场的形式。引入质量自由度后，有

$$\psi = u \exp(-ikx) \rightarrow \psi' = \exp(-ik^i M^i)\psi = u \exp(-ikx - ik^i M^i)$$

可以解释为  $\psi$  由无质量的旋量场变为有质量的旋量场  $\psi'$ 。

## 3. $SU(2) \times U(1)$ 定域规范变换

弱作用对应的物理事实是：具有弱作用的粒子背景空间存在弱作用规范场  $(\vec{A}_\mu, B_\mu)$ ，场  $\psi$  与弱作用规范场发生相互作用，结果导致  $\psi$  获得质量。弱电统一规范场理论所采用的群是  $SU(2) \times U(1)$  群，其中  $SU(2)$  是弱同位旋群， $U(1)$  是弱超荷群。 $U(1)$  的群元素为  $U_1(\theta) = \exp\left[-i\theta \frac{Y}{2}\right]$ ，超荷  $Y$  为生成元，有相应的规范场  $B_\mu(x)$ 。 $SU(2)$  的群元素为  $U = \exp[-i\vec{\theta} \cdot \vec{T}]$ ，规范群的生成元  $\vec{T}(T^i, i=1,2,3)$  构成同位旋空间。具体的规范场和生成元见表 9.2.1。

表 9.2.1  $SU(2) \times U(1)$  定域规范变换的规范场和生成元

	$SU(2)$	$U(1)$
生成元	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (三维)	$\frac{1}{2}Y$ (一维)
规范场	$A_\mu^1(x), A_\mu^2(x), A_\mu^3(x)$	$B_\mu(x)$

这里的同位旋空间被重新理解为粒子质量自由度空间（换言之，质量的改变与同位旋的改变是严格对应的），相应的规范场为  $\vec{A}_\mu(x)(A_\mu^i(x), i=1,2,3)$ 。 $SU(2) \times U(1)$  的群元素为

$$U(\theta) = \exp\left[-i\vec{\theta} \cdot \vec{T} - i\theta \frac{Y}{2}\right] \quad (9.2.3)$$

$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U\psi(x)$ ，协变导数为

$$D_\mu \psi = \left( \partial_\mu + ig_t \frac{\vec{\sigma}}{2} \vec{A}_\mu + ig_y \frac{1}{2} B_\mu \right) \psi \quad (9.2.4)$$

规范场张量为

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^k &= \partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k - g \varepsilon^{ijk} A_\mu^i A_\nu^j \\ B_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned}$$

规范场  $A_\mu^k$  具有自相互作用,  $B_\mu$  无相互作用。

$$\begin{aligned} A_\mu^a &\rightarrow A_\mu'^a = A_\mu^a + f^{abc} \theta^b(x) A_\mu^c + \frac{1}{g_t} \partial_\mu \theta^a(x), \quad g \delta A_\mu(x) = \partial_\mu \theta^a(x) \\ B_\mu &\rightarrow B'_\mu = B_\mu + \frac{1}{g_y} \partial_\mu \theta(x), \quad g \delta B_\mu(x) = \partial_\mu \theta(x) \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

其物理图像是: 规范场  $g_t \frac{\vec{\sigma}}{2} \bar{A}_\mu$  作用于  $\psi$ ,  $\bar{A}_\mu$  按比例系数  $g_t$  沿  $\frac{\vec{\sigma}}{2}$  移动, 致使  $\psi$  沿质量自由度空间标架  $\vec{M}$  平移  $\vec{\theta}$ , 改变  $\psi$  质量自由度, 量子场  $\psi$  获得质量,  $\frac{\vec{\sigma}}{2}$  与质量自由度标架  $\vec{M}$  对应,  $\theta^k$  和  $A^k$  对应, 两者关系为  $g_t \delta A_\mu(x) = \partial_\mu \theta^a(x)$ ; 量子场  $\psi = \exp[-ikx] \rightarrow \psi' = \exp[-ikx + i\partial_\mu \bar{\theta} \vec{M}]$  获得质量。这里, 粒子空间表象  $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{T}} \psi(x)$  等价于内禀空间表象  $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{M}} \psi(x)$ 。

改变量  $\exp[i\theta^k M^k]$  由内禀空间表象转到粒子观测空间表象为  $U = \exp[iT^k \theta^k]$ , 这是质量自由度的粒子空间表象。  $T^k$  与  $M^k$  对应,  $M^k$  是内禀空间表象质量自由度的标架;  $T^k$  是粒子空间表象<sup>①</sup>的质量标架。

$$\gamma^M = T^k = \frac{1}{2} \sigma^k \quad (9.2.6)$$

其中,  $\sigma^k$  为泡利矩阵。这里,  $A_\mu$  是生成质量自由度的规范场,  $g \vec{T}_\mu \bar{A}_\mu$  转换成质量场  $\exp[i\theta^k \xi^k]$ 。这里,  $k_m^\mu(x) = \partial_\mu \theta^\mu(x)$ 。

$g_y \frac{1}{2} B_\mu$  作用于  $\psi$ ,  $B_\mu$  按比例系数  $g_y$  沿  $\frac{Y}{2}$  移动, 致使  $\psi$  的动量自由度空间标架  $\bar{x}$  移动  $\theta(x)$ , 改变了该量子场  $\psi$  的动量。总之,  $SU(2) \times U(1)$  定域规范变换使  $\psi$  获得质量和动量。 $\frac{Y}{2}$  与动量自由度标架  $\bar{x}$  对应,  $\theta(x)$  和  $B_\mu(x)$  对应。两者的关系满足式 (9.2.5)。

规范场变换与内禀空间关系参见表 9.2.2。

表 9.2.2 规范场变换与内禀空间关系表

项目	$U(1)$ 电磁作用	$SU(2) \times U(1)$ 弱电作用
生成元	$U(\theta) = \exp[-i\theta(x)]$	$U(\theta) = \exp\left[-i\vec{\theta} \cdot \vec{T} - i\theta \frac{Y}{2}\right]$
动量空间的投影	$e A_\mu$	$g_t \vec{A}_\mu \vec{T} + g_y B(Y/2)$
规范场和生成元的关系	$e A_\mu = k(x)$	$g_t \delta A_\mu^\alpha = k_M^\alpha(x) = \partial_\alpha \theta^\alpha(x); \quad g_y \delta B = k(x) = \partial_\mu \theta(x)$
内禀空间改变量	$u(\theta) = \exp[-ik(x)]$	$u(\theta) = \exp[-i\vec{k}_M(x) \cdot \vec{M} - ik_y(x) \cdot y]$
虚粒子态	虚光子	Higgs 粒子
实粒子态	实光子	$W^+, W^-, Z^0$

量子场  $\psi$  在做规范变换  $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(\theta)\psi(x)$  时, 所对应的物理事实是  $\psi$  发生弱作用,

① 不同类型粒子空间表象下的同一自由度的标架形式是不同的。

$D_\mu = \partial_\mu + ig_t \frac{\vec{\sigma}}{2} A_\mu + ig_y \frac{1}{2} B_\mu$ ，粒子局域空间的形变导致出现相应的补偿项存在，这就是规范场  $A_\mu, B_\mu$ 。规范变换  $U(\theta) = \exp\left[-i\vec{\theta} \cdot \vec{T} - i\theta \frac{Y}{2}\right]$  描述了粒子局域背景空间的场形变，换言之， $U(\theta)$  给出了  $\psi$  发生弱作用的环境， $U(\theta)$  与  $\psi$  耦合，弱作用便发生了。于是我们可以把  $U(\theta)$  本身视为一种粒子，该粒子与  $\psi$  发生相互作用，便出现了弱相互作用。弱作用的结果会导致粒子内禀质量空间改变。用现在的流行语言说：粒子发生真空对称破缺，获得了质量，而导致真空发生对称破缺的元凶是 Higgs 粒子。因而 Higgs 场就是  $U(\theta)$ 。

#### 4. Higgs场

这里非常明确地知道了 Higgs 场就是规范变换场  $U(\theta) = \exp\left[-i\vec{\theta} \cdot \vec{T} - i\theta \frac{Y}{2}\right]$ ，该场的作用就是提供弱作用产生的环境。理论上说，只要  $U(\theta)$  作用于  $\psi$ ，就必然要发生弱作用，改变弱力线场，即改变  $\psi$  粒子质量；当弱作用结束后，规范变换就完成了，其结果是  $U(\theta)$  消失。完整而独立的  $U(\theta)$  场是不存在的， $U(\theta)$  的存在源自于  $\psi$  处于高能非稳定状态。由于 Higgs 粒子是局域特殊形态的背景空间场，并未构成实物粒子，因而探讨 Higgs 粒子的静质量是没有意义的。

#### 5. Higgs场对真空的作用

考虑真空态由非激发态的场基本单元构成

$$\phi_0 = \langle |\phi| \rangle_0 = 1 \neq 0 \quad (9.2.7)$$

式 (9.2.7) 表明场在真空态仍然有一定的平均值<sup>①</sup>  $\phi_0$ ，真空发生对称破缺。实验只能测量这个平均值基础上的激发。实验上观测到的各种粒子，都是场以真空为基础的激发。可以把  $\phi_0$  作为基础，研究场相对于这个值的偏移

$$\phi(x) = U(\theta(x))\phi_0 = U(x) \quad (9.2.8)$$

和以前  $\phi(x) = v + \frac{1}{2}[h(x) + i\rho(x)]$  的形式不同，这是由  $\phi_0$  具有指数形式所决定的。此时真空态构成空碗底结构。如图 9.2.2 所示。在  $\phi_0 = 1$  的圆环上，Higgs 粒子退化为哥尔斯通粒子；哥尔斯通粒子为无质量态实标量场，记  $\phi_0 = \exp(-i0)$ ，是质量动量为 0 的标量粒子。

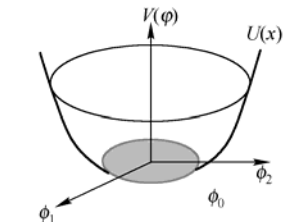


图 9.2.2 Higgs 场真空态结构

#### 6. Higgs的破缺获得质量

考虑 Higgs 场在内部空间有  $n$  个实分量（一个复分量包含两个实分量）。令

① 王正行，简明量子场论，北京大学出版社，2008 年 3 月第 4 版，p246.

$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix}$ , 张成一个粒子空间,  $\phi_n(x)$  表示第  $n$  种粒子, 则

$$\phi^+(x)\phi(x) = \bar{\phi}(x)\phi(x) = \phi_1^2(x) + \phi_2^2(x) + \cdots + \phi_n^2(x).$$

拉格朗日密度为:  $L_\phi = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^+\partial\phi - \frac{\mu^2}{2}\phi^+\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^+\phi)^2$ . 显然, 它在  $n$  维内部空间的转动下是不变的。或者说它在内部空间具有旋转对称性, 即球对称性。Higgs 场在

$$\phi^+\phi = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \cdots + \phi_n^2 = \phi_0^2 = 1 \quad (9.2.9)$$

取能量最大值态。在  $n$  维粒子构成的内部空间中, 以  $\phi_0=1$  为半径的球面上, 存在  $\phi_{01}, \phi_{02}, \cdots, \phi_{0n}$  个质量生成元, 它取真空值。如果我们以  $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)$  为  $n$  维空

间的坐标轴 (如图 9.2.2 所示), 把真空取在  $\phi_n$  轴上, 即令:  $\phi_0 = \langle \phi(x) \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ , 显然,

这样的真空在  $SO(n)$  群的转动下会改变。因为存在一个指向, 只有破缺生成元  $K_i$  才能投影到质量生成元  $\nu$  上。径向量子场的激发对应于有质量的粒子, 而周向量子激发对应于零质量的粒子 (因为质量等于  $V(\phi)$  在该方向的二次微商)。考虑对称破缺, 最简单的情况, 定义 Higgs 场为

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ U(x) \end{pmatrix} \quad (9.2.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi g} &= \frac{1}{2} D_\mu \Phi^+ D^\mu \Phi \\ &= \frac{1}{2} (0 \quad U(x)) \left( \bar{\partial}_\mu + \frac{i}{2} g_t \bar{\sigma} \cdot \mathbf{A}_\mu + \frac{i}{2} g_y \mathbf{B}_\mu \right) \cdot \left( \bar{\partial}_\mu - \frac{i}{2} g_t \bar{\sigma} \cdot \mathbf{A}_\mu - \frac{i}{2} g_y \mathbf{B}_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ U(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \cdot \partial^\mu \phi - \frac{g^2}{8} U(x)^2 (\mathbf{A}_\mu^1 - i\mathbf{A}_\mu^2)(\mathbf{A}_\mu^1 + i\mathbf{A}_\mu^2) - \frac{1}{8} U(x)^2 (g' \mathbf{B}_\mu - g \mathbf{A}_\mu^3)^2 \end{aligned} \quad (9.2.11)$$

破缺后的哥尔斯通粒子作  $SU(2) \times U(1)$  规范变换后获得质量, 成为有质量的 Higgs 场。Higgs 粒子质量为  $M_{\text{Higgs}} = \frac{g^2}{8} (\mathbf{A}_\mu^1 - i\mathbf{A}_\mu^2)(\mathbf{A}_\mu^1 + i\mathbf{A}_\mu^2) - \frac{1}{8} (g' \mathbf{B}_\mu - g \mathbf{A}_\mu^3)^2$ , 该粒子极不稳定, 没有直接的可观测性 (为虚粒子态), 被规范场 “吃掉”, 规范场获得质量,  $\bar{A}_\mu, B_\mu$  重新组合后能够以实粒子的形态存在。引入复场

$$W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{A}_\mu^1 + i\mathbf{A}_\mu^2), \quad W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{A}_\mu^1 - i\mathbf{A}_\mu^2), \quad Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} (g_t \mathbf{A}_\mu^3 - g_y \mathbf{B}_\mu) \quad (9.2.12)$$

每一个生成元对应一个规范粒子, 因而有三个规范粒子  $W^\pm, Z^0$ 。(9.2.12) 表达式给出了规范场和可观测粒子  $W_\mu^\pm$  和  $Z_\mu$  间的构成关系。把它们代入式 (9.2.11), 就得到很简洁的表达式

$$\mathcal{L}_{\phi g} = -\frac{g_t^2}{4} \nu^2 W_\mu^+ W^{-\mu} - \frac{g_t^2 + g_y^2}{8} \nu^2 Z_\mu Z^\mu, \quad (9.2.13)$$

由此可知： $W_\mu^+$ ， $W_\mu^-$ ， $Z_\mu$  都是质量的本征态，相应粒子的质量为

$$m_W = \frac{1}{2} g_t \nu, \quad m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g_t^2 + g_y^2} \nu \tag{9.2.14}$$

四个规范粒子有三个有质量，它们的场量  $W_\mu^+$ ， $W_\mu^-$ ， $Z_\mu$  是  $\vec{A}_\mu$ ， $B_\mu$  的线性组合。弱相互作用是三个方向同时存在的，单一的  $A_\mu^i$  不能完成弱相互作用，如图 9.2.3 所示，因而  $A_\mu^i$  不能用以代表弱作用的中间玻色子，只能由  $A_\mu^i$  重新线性组合成三个有质量的玻色子场（ $W_\mu^+, W_\mu^-, Z_\mu^0$ ）和一个无质量的玻色子场（ $\gamma$  即光子）。它的场量  $A_\mu$  由  $\vec{A}_\mu$ ， $B_\mu$  组成，其关系式为

$$A_\mu = A_\mu^3 \sin \theta_W + B_\mu \cos \theta_W \tag{9.2.15}$$

这就是光子的场量。把式（9.2.17）代入式（9.2.14）得

$$m_W = m_Z \cos \theta_W \tag{9.2.16}$$

是荷电中间玻色子  $W$  和中性中间玻色子  $Z$  的质量关系。其中  $Z_\mu$  和  $B_\mu$  相互正交， $\theta_W$  称为温伯格角，定义为

$$g_y / g_t = \tan \theta_W$$

考虑内部空间有两个分量  $\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi \end{pmatrix}$ ，它们在时空空间都是标量，因而具有两个自由度；规范粒子没有质量，自旋只能有两种指向，因而整个体系共有四个自由度。

这里 Goldstone 粒子在规范场的作用下被 Higgs “吃掉”，获得质量。Goldstone 粒子消失。获得质量 Higgs 又被重新组合的规范场“吃掉”，重新组合的有质量规范场为  $W^\pm, Z^0$  和无质量规范场  $A_\mu$ 。规范场分量  $A_\mu^i, B_\mu$  不单独出现。不该出现的 Goldstone 粒子和  $A_\mu^i, B_\mu$  规范场并没有出现。

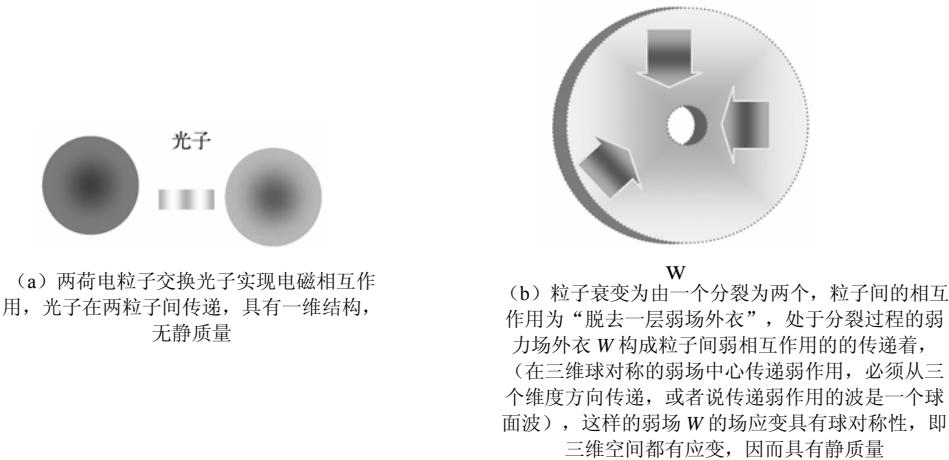


图 9.2.3 弱作用玻色子  $W$  具有静质量示意图

## 7. 轻子场的 $SU(2) \times U(1)$ 定域规范变换

轻子场是  $L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}$ ,  $l_R$ 。分别是  $SU(2)$  的二重态和单态。生成元分别是<sup>[1]</sup>  $\vec{T} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$  和

$\vec{T} = 0$ ;  $\frac{Y}{2} = -\frac{1}{2}$  和  $\frac{Y}{2} = -1$ 。轻子场在  $SU(2) \times U(1)$  定域规范变换下

$$\mathcal{L}_{l_g} = \bar{L}(i\gamma^\mu D_\mu)L + \bar{l}_R(i\gamma^\mu D'_\mu)l_R = \bar{L}\left[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ig_t \frac{\vec{\sigma}}{2}\vec{A} + g_y \frac{1}{2}B)\right]L - \bar{L}\left[i\gamma^\mu(\partial_\mu + g_y B)\right]L \quad (9.2.17)$$

上式说明质量的改变使得四动量空间发生改变, 左旋轻子场  $L$  获得质量和动量; 右旋轻子场  $l_R$  获得动量。

$$L(x) \rightarrow L'(x) = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{M}} e^{-i\theta\cdot x} L(x); \quad l_R(x) \rightarrow l'_R(x) = e^{-i\theta\cdot x} l_R(x)$$

轻子场的静质量为零, Higgs 场写为  $\Phi_H = \begin{pmatrix} 0 \\ U(\theta(x)) \end{pmatrix}$ , 与 Higgs 场作用

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{l\phi} &= -G_l (\bar{L}\phi l_R + l_R\phi \bar{L}) = -G_l \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{l}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} l_R + l_R \begin{pmatrix} \bar{\phi}^+ & \bar{\phi}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \\ \mathcal{L}_{l\phi} &= -G_l \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{l}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ U(\theta(x)) \end{pmatrix} l_R + l_R \begin{pmatrix} 0 & U(\theta(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} = -G_l U(\theta(x)) \bar{l} l \end{aligned} \quad (9.2.18)$$

得到轻子的质量为

$$m_l = G_l U(\theta(x)) \quad (9.2.19)$$

$U(\theta(x))$  不再是一个常数, 由规范场的强弱决定, 这使得轻子存在不同的代。

从几何上来看,  $U(\theta(x)) = \exp[-i\vec{\theta}(x)\cdot\vec{T}]$ ,  $\vec{\theta}\cdot\vec{T}$  具有“源”和“汇”的结构,  $\vec{\theta}(x)$  描述了汇聚波的振幅。振幅越大, 形成的静质量就越大; 反之, 则相反。“源”和“汇”的结构则正是构成质量会聚波的要术, 规范变换:  $U(\theta(x)) \psi = \exp[-i\vec{\theta}(x)\cdot\vec{T}] \psi$ , 这样的场  $\psi$  粒子内禀空间发生改变, 质量自由度:  $\exp[-ik_M(x)\cdot\vec{M}]$ ,  $\psi$  获得静质量, 质量为  $k_M$ 。

轻子的质量源自于三维球对称场应变, 场形变为  $e\mathcal{H}/\Phi$ 。中微子二维结构使得中微子的静质量为 0, 因而中微子和轻子在质量空间中的投影值

$$\begin{pmatrix} \text{中微子} \\ \text{轻子} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{沿静质量方向上的投影}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e\mathcal{H}/\Phi \end{pmatrix} \quad (9.2.20)$$

这里  $\Phi$  为轻子内禀空间直径。

### 9.2.3 温伯格角 $\theta_w$ 的物理意义

#### 1. 温伯格角 $\theta_w$ 的物理图像

关于温伯格角  $\theta_w$  的物理意义, 在格拉肖-温伯格-萨拉姆理论提出之前, 电磁作用和弱作用的理论是各自独立的, 其有关参量见表 9.2.3。表中电磁作用耦合常数  $e$  和弱作用耦合常数  $g$  之间无联系。

在  $SU(2) \times U(1)$  的弱电统一理论场中, 量子  $\gamma, W^\pm, Z^0$  处于同等的地位, 是该理论的规范



场量子，见表 9.2.2。描写弱电统一的流是  $W_\mu^i(x)$  和  $B_\mu(x)$ ，传递量子为  $A_\mu^1$ ， $A_\mu^2$ ， $A_\mu^3$  和  $B_\mu$ （可重新组合成  $W^\pm, Z^0$  和  $\gamma$ ），而弱电统一的耦合常数为  $g_y$  和  $g_t$ 。

表 9.2.3 电磁作用理论和弱作用理论描述电磁场及弱作用场时的有关参量

	耦合常数	场的流	场量子
电磁作用	$e$	$A_\mu$	$\gamma$
弱作用	$g^\pm \approx g^Z = g$	$J_\mu$	$W^\pm, Z^0$

表 9.2.3 中的耦合常数  $e$  和  $g$ （可以直接测量）与表 9.2.4 中的耦合常数  $g_y$  和  $g_t$ （不能直接测量）之间的关系，如图 9.2.4 所示。 $g$  在  $y$  和  $t_3$ （即  $\sigma_3$ ）两轴上的投影分别为  $g_y$  和  $g_t$ 。

表 9.2.4 弱电统一理论的有关参数和描述方式

	耦合常数	场的流	场量子	
弱电统一场 $SU(2) \times U(1)$	$g_y$	$B_\mu$	$B_\mu$	$\gamma$ ， $W^\pm, Z^0$
	$g_t$	$A_\mu^i(x)$	$A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3$	

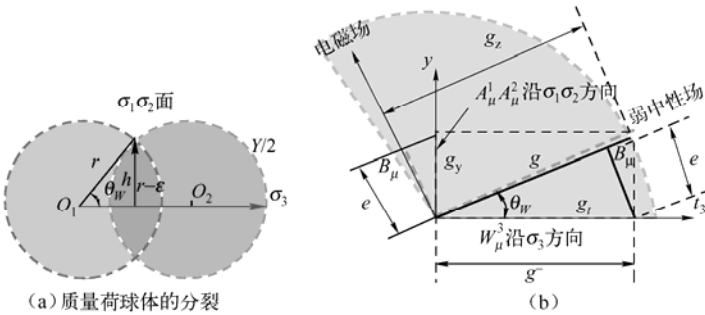


图 9.2.4 耦合常数  $e$ ， $g$  和  $g_y$ ， $g_t$  之间的关系

$$g_t = g \cos \theta_W \tag{9.2.21}$$

$$g_y = g \sin \theta_W \tag{9.2.22}$$

$$g_y / g_t = \tan \theta_W \tag{9.2.23}$$

取弱中性耦合常数  $g^z = g$ ，弱带电耦合常数  $g^\pm = g_t$ ，电磁场与弱中性场的一组轴和  $y$ ， $\sigma_3$  轴相对旋转角为  $\theta_W$ 。由于是  $g$  的二次投影，即

$$g \sin \theta_W \cos \theta_W = e \tag{9.2.24}$$

由图 9.2.4 可得

$$g_t = e / \sin \theta_W = g^\pm \tag{9.2.25}$$

$$g_y = e / \cos \theta_W = g' \tag{9.2.26}$$

这里对式（9.2.24）所表达的物理意义进行如下说明，如图 9.2.5 所示。

当  $\theta_w = 90^\circ$  时, 如图 9.2.5 (a) 所示, 粒子没有发生分裂, 此为起始点。考虑粒子沿  $g_i$  方向发生分裂,  $g_i = e/\sin\theta_w$ ,  $g_i = e$ , 单轻子沿分裂方向的耦合常数为  $e$ , 退化为纯电磁相互作用。如电子沿相互作用方向的耦合常数为  $e$ ; 单轻子沿分裂垂直方向的耦合常数为  $g_y = e/\cos 90^\circ$ , 即  $g_y = \infty$ , 表明粒子在沿分裂垂直方向的耦合强度为  $\infty$ , 粒子沿该方向不发生分裂 (可视为两粒子中心点重合, 耦合强度为  $\infty$ )。

当  $\theta_w = 0^\circ$  时, 表明粒子已完成分裂, 弱相互作用结束。  $g_i = e/\sin 0^\circ$ ,  $g_i = \infty$ , 表明粒子在沿分裂方向耦合强度为  $\infty$ , 粒子沿该方向不再发生分裂;  $g_y = e/\cos 0^\circ$ , 对于自由粒子, 弱作用耦合常数退化为纯电磁耦合常数  $e$ 。  $\theta_w = 90^\circ$  和  $\theta_w = 0^\circ$  的两种情况, 均处于自由粒子态。

$\theta_w$  是联系弱作用和电磁作用耦合常数 ( $e$ ,  $g$ ) 的一个参量。此外, 弱电统一场  $W_\mu^3$  及  $B_\mu$  和弱中性场  $Z_\mu^0$  及电磁场  $A_\mu$  之间的关系可以用图 9.2.4 表示。仍取  $y - \sigma_3$  为弱电统一场的两个轴 ( $y$  对应的是  $\sigma_1 - \sigma_2$  构成的二维面在  $y$  轴上的投影,  $\sigma_3$  对应  $x$  轴, 弱作用场具有三维结构), 同时对于电磁场和弱中性场也取两个互相垂直的轴。两组轴之间有一旋转角  $\theta_w$ ,  $A_\mu^3$  及  $B_\mu$  在电磁场和弱中性场轴上的投影为

$$A_\mu = B_\mu \cos \theta_w + A_\mu^3 \sin \theta_w \quad (9.2.27)$$

$$Z_\mu^0 = -B_\mu \sin \theta_w + A_\mu^3 \cos \theta_w \quad (9.2.28)$$

弱电统一理论  $SU(2) \times U(1)$  指出, 电磁场  $A_\mu$  和弱中性场  $Z_\mu^0$  不是基本场, 而是基本场  $W_\mu^3$  和  $B_\mu$  的混合物。混合方式及  $A_\mu$ ,  $Z_\mu^0$  的大小, 以及  $SU(2)$  和  $U(1)$  两个基本规范群的相对权重均由  $\theta_w$  决定。

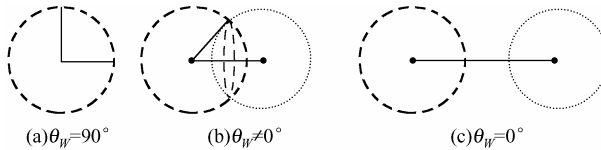


图 9.2.5 弱电统一作用中, 耦合常数  $e$  和  $g_i$  间关系

## 2. 弱作用内禀空间和粒子空间的对应关系

在表 9.2.5 中, 由  $\vec{\sigma}$  张成一个三维粒子空间, 由坐标基  $\vec{e}_i$  张成轻子内禀空间。  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$  是沿  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  的场应变, 构成轻子内禀空间的弱力场。

质量的产生最基本的条件是存在球形应变,  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$ 。只有三个维度都存在向内 (或向外) 的球形应变才能形成有质量的轻子。如果只有两维应变存在,  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$ , 则形成中微子轻子。如果只有一维应变存在, 则形成量子波, 即光子。

轻子内禀空间的场是纤维场, 也就是弱力场。在相互作用时 (场分裂),  $A_\mu^i$  是传递相互作用的玻色子, 由于  $A_\mu^i$  只存在于内禀空间中, 我们可以把  $A_\mu^i$  粒子理解为虚粒子。利用内禀空间和粒子空间存在的对应性, 可把内禀空间的问题转到粒子空间。

表 9.2.5 粒子空间和轻子内禀空间的对应性

粒子空间	SU(2)		U(1)
	生成元	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$Y/2$
	规范场	$A_\mu^1(x), A_\mu^2(x), A_\mu^3(x)$	$B_\mu(x)$
轻子内禀空间	三维轻子坐标空间		一维坐标空间
	坐标基	$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	$x$
	场应变	$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	$\varepsilon_x$

粒子空间的  $B_\mu(x)$  对应  $\varepsilon_x$ ，则可知  $B_\mu(x)$  粒子的场形变只有一个方向，显然就是无静质量的光子。而  $\varepsilon_{ii}$  对应  $A_\mu^i(x)$ ，单一的  $A_\mu^i(x)$  粒子在内禀场只能构成一个方向的形变，这样的粒子无法产生静质量，只有当三个方向的  $A_\mu^1(x), A_\mu^2(x), A_\mu^3(x)$  同时向球心内禀空间传播，才形成一个有静质量的轻子。

3. 耦合常数 $g$ 的性质及 $\theta_w$

有了上述图像，就可以具体地计算  $\theta_w$ 。弱力场就是电力线前端，因而弱作用耦合常数  $g$  和电磁耦合常数  $g_e$  在本质上是同一种，之所以表现不同，是由于两个原因：第一，作用的空间不同，弱作用耦合常数  $g$  是内禀空间内粒子中心点分裂区域内的电磁耦合常数  $g_e$ （取平均值），电磁耦合常数  $g_e$  是两带电粒子在粒子中心点分裂区域外的内禀空间的耦合常数；第二，电磁相互作用在普通空间中进行，而弱作用只存在于半向空间中。

把场纤的诱导分为两部分：球对称向中心拉伸（或压缩）的部分  $g_t$  和向中心形变的非球对称部分  $g_y$ 。从弱作用玻色子  $W$  的传递的角度来看，玻色子  $W$  存在两类场纤通道：球对称的和非球对称的。做了这样的分解之后，就可以把  $g$  视为一个类似矢量的量，由  $g_y$  和  $g_t$  组成，矢量分解之后如图 9.2.4 所示。

现在来看看  $g_y$  和  $g_t$  的关系。通过对中心分裂过程进行分析，可以得到它们的比例关系并求出  $\theta_w$ 。

首先来解释一下图 9.2.4 中为什么  $\vec{g}_y$  会垂直于  $\vec{g}_t$ 。 $\vec{g}_t$  为球对称向中心拉伸（或压缩）的部分， $\vec{g}_t = \vec{g}_{tx} + \vec{g}_{ty} + \vec{g}_{tz}$ 。 $\vec{g}_y$  是沿弱作用玻色子传递方向的部分，把  $\vec{g}_y$  定为  $y$  轴方向，则  $\vec{g}_y$  和  $\vec{g}_t$  之间的夹角为  $45^\circ$ 。弱场是半向空间， $\vec{g}_y$  和  $\vec{g}_t$  之间的夹角为全向空间的两倍，即为  $2 \times 45^\circ$ ，所以  $\vec{g}_y \perp \vec{g}_t$ 。

考虑图 9.2.4 中弱作用的中心区域。设中心分裂前是一个极小的球体，然后由一个分裂为两个。两球相切时，球心间的距离  $d$  为弱作用的最大力程。球面为二维场，其值为  $4\pi r^2$ 。弱作用过程可以简化为两球体分裂， $g_y$  的大小和两球相交的作用面有关，换言之，两球刚开始分裂时， $g_y$  为最大，这样才能发生分裂，分裂结束后，处于低能极化态的  $g_y$  为最小值。相交的作用面垂直于相互作用的方向  $\sigma_3$ ，相交作用面越大，则诱导分裂的非球对称场纤量就越大，即沿  $g_y$  耦合的概率就越大，即  $g_y \propto$  相交作用面。

$$g_y \propto 2 \int_{-\theta}^{\theta} r \cos \theta d\theta \int_{-r}^r dr$$

(9.2.29)

乘以 2 是因为有两个作用场相重叠。

球对称部分的  $g_t$  的大小则对应于中心球体的表面积。表面积越大，则所包围的球对称的场纤量就越多， $W$  玻色子沿球对称场纤传递的概率就越高，即  $g_t \propto$  中心球体表面积。

$$g_t \propto \int_{-\pi}^{\pi} r d\theta \int_{-r}^r dr \quad (9.2.30)$$

由式 (9.2.29) 和式 (9.2.30) 可得

$$\frac{g_y}{g_t} = \frac{2 \int_{-\theta}^{\theta} r \cos \theta d\theta \int_{-r}^r dr}{\int_{-\pi}^{\pi} r d\theta \int_{-r}^r dr} = \frac{2 \int_0^{\theta} \cos \theta d\theta}{\pi} \quad (9.2.31)$$

如图 9.2.4 所示，在分裂前， $O_1$  和  $O_2$  完全重合，此时  $\varepsilon = r$ 。在完全分裂的瞬间， $\varepsilon = 0$ ，此时弱作用结束。所对应的  $O_1$  和  $O_2$  间的距离为  $2r$ ，即弱作用力程。找出由完全重叠到完全分离时这一过程的平均值所对应的  $g_y / g_t$ ，便可以求出这一过程的  $\theta_w$  值。由图 9.2.4 可知

$$h = \sqrt{r^2 - (r - \varepsilon)^2} = \sqrt{2r\varepsilon - \varepsilon^2}$$

两球相交的面积为

$$S = \pi h^2 = \pi(2r\varepsilon - \varepsilon^2) \quad (9.2.32)$$

上面两式中， $r - \varepsilon$  为圆心  $O_1$  到相交面的距离， $\varepsilon$  为相交面沿  $Y/2$  轴到  $O_1$  球面的距离。 $O_1$  和  $O_2$  完全重叠到  $O_1$  和  $O_2$  完全分裂时的平均的相交面的大小为（由完全重叠  $\varepsilon = r$  变为两球相切  $\varepsilon = 0$ ）

$$\bar{S} = \frac{\int_0^r \pi(2r\varepsilon - \varepsilon^2) d\varepsilon}{\int_0^r d\varepsilon} = 0.667\pi r^2 \quad (9.2.33)$$

由  $\bar{S} = \pi(2r\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^2)$  有

$$\bar{\varepsilon}^2 - 2\bar{\varepsilon}r + 0.667r^2 = 0$$

解之得  $\bar{\varepsilon}_1 = 0.423r$ ， $\bar{\varepsilon}_2 = 1.155r$ （ $\bar{\varepsilon}_2$  因大于  $r$ ，不合理，故舍去）。

$\bar{\theta} = \arccos\left(\frac{r - \bar{\varepsilon}}{r}\right) = \arccos(1 - 0.423) = 54.76^\circ$ ，由  $g_y / g_t = \tan \theta_w$  和式 (9.2.36) 可得

$$\theta_w = \arctan \left[ \frac{2 \int_0^{\bar{\theta}} \cos \theta d\theta}{\pi} \right] = \arctan \left( \frac{2 \sin 54.76^\circ}{\pi} \right) = 27.47^\circ \quad (9.2.34)$$

这与  $r$  的取值无关， $r$  在弱作用过程中是一个变量。

这里的  $\theta_w$  就是大家所熟知的温伯格角。理论计算值  $\sin^2 \theta_w = 0.213$ ，与实验值  $\sin^2 \theta_w = 0.215$  是很接近的。

#### 4. 自作用

规范场有自作用，它们是

$$\mathcal{L}_{\text{si}} = -g \partial_\mu \bar{A}_\nu \cdot \bar{A}^\mu \times \bar{A}^\nu - \frac{g^2}{4} (\bar{A}_\mu \times \bar{A}_\nu) \cdot (\bar{A}^\mu \times \bar{A}^\nu)$$

## 5. 相互作用

由于 Higgs 场不存在, 因而只需要考虑轻子和规范场的相互作用。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{li}} &= \bar{L} \left( \frac{g_t}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{A} - \frac{g_y}{2} \mathbf{B} \right) L - g_y \bar{l}_R \mathbf{B} l_R \\
 &= (\bar{\nu}_L \quad \bar{l}_L) \gamma_\mu \left( \frac{g_t}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{pmatrix} - \frac{g_y}{2} \mathbf{B} \right) \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} - g_y \bar{l}_R \gamma_\mu l_R B_\mu \\
 &= (\bar{\nu}_L \quad \bar{l}_L) \frac{\gamma_\mu}{2} \begin{pmatrix} g_t A_\mu^3 - g_y B_\mu & g_t (A_\mu^1 - iA_\mu^2) \\ g_t (A_\mu^1 + iA_\mu^2) & -g_t A_\mu^3 - g_y B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} - g_y \bar{l}_R \gamma_\mu l_R B_\mu \\
 &= (\bar{\nu}_L \quad \bar{l}_L) \frac{\gamma_\mu}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{g_t^2 - g_y^2} Z_\mu & \sqrt{2} g_t W_\mu^+ \\ \sqrt{2} g W_\mu^- & \frac{-2g_t g_y}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} A_\mu + \frac{g_y^2 - g_t^2}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \\
 &\quad - \bar{l}_R \gamma_\mu l_R \left( \frac{g_t g_y}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} A_\mu - \frac{g_y^2}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} Z_\mu \right)
 \end{aligned}$$

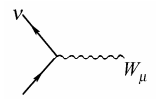
这里利用了  $\vec{A}_\mu$ ,  $B_\mu$  和  $W_\mu^\pm$ ,  $Z_\mu$ ,  $A_\mu$  的关系。把上列矩阵乘出来就得到

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{li}} &= \frac{g_t}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \bar{\nu}_L \gamma^\mu l_L - W_\mu^- \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L) + \sqrt{g_t^2 + g_y^2} Z_\mu \left( \frac{\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - \bar{l}_L \gamma^\mu l_L}{2} + \sin^2 \theta_W \bar{l} \gamma^\mu l \right) \\
 &\quad - \frac{g_t g_y}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} A_\mu \bar{l} \gamma^\mu l
 \end{aligned}$$

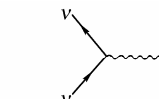
回到轻子的质量本征态, 上式变为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{li}} &= \frac{g_t}{2\sqrt{2}} [W_\mu^+ \bar{\nu} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) l + W_\mu^- l \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \nu] \\
 &\quad + \frac{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}}{4} Z_\mu [\bar{\nu} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \nu + \bar{l} \gamma^\mu (4 \sin^2 \theta_W - 1 - \gamma_5) l] - \frac{g_t g_y}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} A_\mu \bar{l} \gamma^\mu l
 \end{aligned}$$

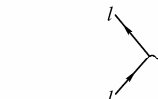
相应的顶角及顶角因子




(a)  $\frac{ig_t}{2\sqrt{2}} \gamma_\mu (1 + \gamma_5)$



(b)  $\frac{i\sqrt{g_t^2 + g_y^2}}{4} \gamma_\mu (1 + \gamma_5)$



(c)  $\frac{i\sqrt{g_t^2 + g_y^2}}{4} \gamma_\mu (4 \sin^2 \theta_W - 1 - \gamma_5)$



(d)  $-\frac{ig_t g_y}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} \gamma_\mu = -ie \gamma_\mu$

图 9.2.6 顶角及顶角因子

## 6. 特性参数

理论中引入的原始参数有  $\nu$ ,  $g_t$ ,  $g_y$ 。它们确定了中间玻色子、轻子的质量。

$$m_W = \frac{1}{2} g_t \nu$$

$$m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g_t^2 + g_y^2} \nu$$

$$m_l = g_t \nu$$

$g_t, g_y$  还确定各种顶角的作用强度。三个参数  $\nu, g_t, g_y$ , 由于

$$e = \frac{g_t g_y}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}}, \quad \tan \theta_W = \frac{g_y}{g_t}$$

而换成  $\nu, e, \theta_W$ 。在真空场理论中,  $e$  和  $\theta_W$  是可以算出来的, 这样  $g_t, g_y$  就不再是参数。 $\nu$  是轻子在质量空间的投影值, 因而也不是参数。这样在弱相互作用中, 就没有参数存在。

### 9.3 夸克弱相互作用

先从最为熟知的例子入手, 来看一下弱作用的特性。例如, 中子衰变,  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ , 是能量守恒所允许的, 并且重子数守恒。中子的寿命约为 15min, 远远大于通过电磁作用衰变的粒子的寿命。例如,  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  的衰变是电磁作用的结果, 寿命约为  $10^{-16}\text{s}$ 。

由于  $\alpha_s^2 / \alpha^2 = (10^4 \sim 10^6)$ , 粒子通过电磁作用衰变的寿命应比粒子通过强作用衰变的特征时间至少长  $\tau_e / \tau_s \approx (10^4 \sim 10^6)$  倍。仅有  $\alpha$  和  $\alpha_s$  两个标度不能解释比  $10^{-16}\text{s}$  长得多的寿命。带电  $\pi$  介子 ( $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}$ ) 的寿命为  $10^{-12}\text{s}$ 。一系列观测到的奇异粒子的寿命量级也都为  $10^{-10}\text{s}$ 。从能量角度看, 弱衰变  $\Sigma \rightarrow n + \pi$  和强衰变  $\Delta \rightarrow n + \pi$  几乎是一样的, 它们的寿命却相差了 13 个量级。因此, 还有一个新的标度  $\alpha_w$  用来描写这种弱相互作用。

$$\tau(\Delta \rightarrow \pi + n) / \tau(\Sigma \rightarrow \pi + n) = 10^{-23}\text{s} / 10^{-10}\text{s} = (\alpha_w / \alpha_s)^2$$

$$\alpha_w \approx 10^{-6}$$

它是发射或吸收弱相互作用的量子的几率 (与  $\alpha_s \approx 1$  和  $\alpha \approx 10^{-2}$  相比较)。

传递弱相互作用的量子与传递强相互作用的胶子不同, 它与轻子耦合的强度跟与夸克耦合的强度一样。弱作用还有一个新奇的特性, 它能将  $u$  夸克变成  $d$  夸克, 将  $\mu$  子变成中微子, 也就是说, 弱作用可以改变夸克和轻子的“味道”。现在实验上已发现传递弱相互作用的量子有带正电、负电和中性三种。

如果认为图 9.3.1 (b) 和图 9.3.1 (c) 中,  $W$  的耦合强度与电磁作用相同, 也就是说发射  $W$  的几率大体上与发射光子的几率相同, 则弱作用的缓慢衰变率是由于  $W$  有极大的质量而引起的。因此, 与交换光子相比, 交换  $W$  的可能性变小, 不是因为  $W$  不易发射, 而是由于它的质量太大。大质量  $M_W$  压低了弱作用的中间玻色子的耦合强度, 给出了有效的耦合强度,  $\alpha_w = \alpha / (M_W / m_p)^2 \approx 10^{-6}$ 。由于量纲原因, 可用某个参考质量表示 ( $M_W \approx 10^2 m_p$ ), 这一结果也暗示了弱作用的短程性。发射一个虚的  $W$  至少需要的能量为  $M_W c^2$ , 因而可存活的时间  $\Delta t, \hbar / M_W c^2$ , 然后它再被吸收, 最远能运行  $c \Delta t = \hbar / M_W c^2 \approx 10^{-3}\text{fm}$ 。这一距离比强作用的 1fm 力程小许多。

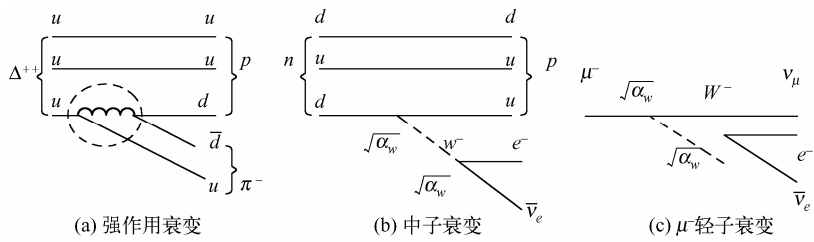


图 9.3.1 粒子的衰变

9.3.1 卡比波角

要了解卡比波角的来源，就有必要了解一下夸克的结构。夸克是一种带弦的轻子，当轻子在其背景场中不稳时，便会形成弱作用中心。弱作用中心是一份场基本单元质，前面谈到过  $W$  玻色子的内禀结构，弱作用的中心和夸克轻子中心点耦合便发生弱作用。这里要注意的是，虽然夸克带分数电荷，但耦合并不影响弱作用的中心。

夸克的弱作用和轻子的弱作用在本质上是是一致的，但也存在差异。最大的差异在于夸克带弦，而轻子不带弦。弦的存在对弱作用耦合常数是有影响的。现在来具体看一下弦是如何影响弱作用耦合常数的。

当弦存在时，弦和中心相连，此时中心裸露，中心衰变不可能沿弦的方向，只能沿弦以外的方向传递弱作用玻色子。因此弦的截面  $S_{\text{弦}}$  会遮挡住中心球面  $S_{\text{球}}$  的很小部分面积，由于遮挡的部分不可能诱导弱作用产生，这样便降低了耦合强度， $G_F < G_\mu$ 。在轻子内禀空间中，弱作用玻色子的传递具有方向性，因此有必要考虑耦合常数的方向，因而有

$$\vec{G}_\mu = \vec{G}_x + \vec{G}_y + \vec{G}_z \tag{9.3.1}$$

$$\vec{G}_x \propto S_x$$

设弦是沿  $x$  方向的，如图 9.3.2 所示。把球面沿坐标空间  $x, y, z$  方向分解，球面在  $x$  方向上的投影为  $S_x$ ，弦截面在  $x$  方向的投影为  $\Delta s$ ，则在  $x$  方向上被屏蔽的面积就是  $\Delta s$ ，未被屏蔽的面积就是  $S_x - \Delta s$ 。考虑屏蔽效应后的耦合常数为

$$\vec{G}_F = \frac{S_x - \Delta s}{S_x} \vec{G}_x + \vec{G}_y + \vec{G}_z \tag{9.3.2}$$

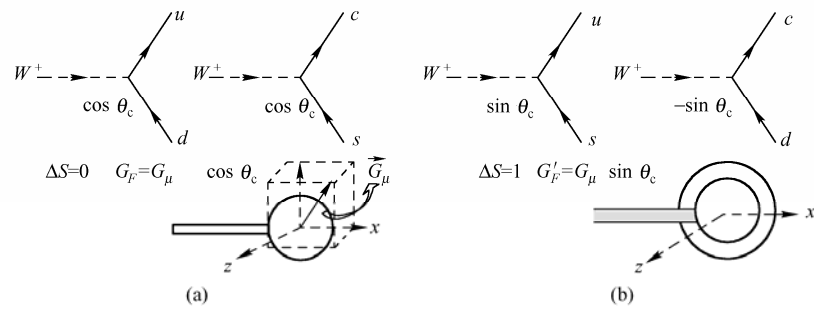


图 9.3.2 卡比波角的场本质

由  $G_\mu = (1.458 \pm 0.003) \times 10^{-49} \text{erg} \cdot \text{cm}^3$ ,  $G_F = (1.415 \pm 0.003) \times 10^{-49} \text{erg} \cdot \text{cm}^3$  ( $1 \text{erg} = 10^{-7} \text{J}$ ), 说明弦是很细的, 对弱作用中心的影响极小。同时也表明了弱荷 (即弱作用中心) 是一个整体不可分裂的非游离态场基本单元质。无论是轻子还是夸克, 弱荷都是相同的。

了解了  $G_F$  的成因, 再来看  $G'_F$ 。由第 10 章可知  $s$ ,  $c$  夸克比  $u$ ,  $d$  夸克多出一层达到形变 (压缩或拉伸) 极限的场质, 而达到形变极限的场质丧失了弹性, 同时也丧失了物理性质。夸克中心外形成一个坚硬的球壳, 阻止了中心和弱荷的作用。相反, 弦却可以传递动量, 于是弦成了中心和弱荷作用的唯一通道。通道的大小正是弦的截面大小。弦的截面  $\Delta s$  是  $x$  方向上的投影值, 于是存在如下关系:

$$\vec{G}'_F = \frac{\Delta s}{S_x} \vec{G}_x \quad (9.3.3)$$

由式 (9.3.2) 和式 (9.3.3) 可以写出如下表达式:

$$\vec{G}_\mu = \frac{S_x - \Delta s}{S_x} \vec{G}_x + \vec{G}_y + \vec{G}_z + \frac{\Delta s}{S_x} \vec{G}_x \quad (9.3.4)$$

或者写为

$$\vec{G}_\mu = \vec{G}_F + \vec{G}'_{Fx} \quad (9.3.5)$$

这里  $\vec{G}'_{Fx}$  很小, 因而  $\vec{G}_F \approx \vec{G}_\mu$ ,  $|\Delta s| = 1$ 。而  $\vec{G}_\mu$  和  $x$  轴之间的夹角为  $45^\circ$ ,  $\vec{G}'_{Fx}$  是沿  $x$  方向的, 因而  $\vec{G}_\mu$  和  $\vec{G}'_{Fx}$  之间的夹角应为  $45^\circ$ 。

特别需要注意的是, 弱场是半向空间, 所以  $\vec{G}_\mu$  和  $\vec{G}'_{Fx}$  之间的夹角应为全向空间的两倍,  $\vec{G}_\mu$ ,  $\vec{G}'_{Fx}$  之间的夹角则为  $2 \times 45^\circ$ , 则  $\vec{G}_F$  和  $\vec{G}'_{Fx}$  之间的夹角近似为  $90^\circ$ 。换言之,  $\vec{G}_F \perp \vec{G}'_{Fx}$  即

$$G_\mu = \sqrt{G_F^2 + G'^2_{Fx}} \quad (9.3.6)$$

$$G_F = G_\mu \cos \theta_c^v \quad (9.3.7)$$

$$G'_F = G_\mu \sin \theta_c^v \quad (9.3.8)$$

这就是我们熟知的卡比波角表达式。  $G'_F / G_F = \tan \theta_c^v$ ,  $\theta_c^v = 0.247 \pm 0.008$ 。

这里还要顺便说一下, 盖莫夫—泰勒型允许  $\beta$  跃迁 (实际上是赝矢量流  $A_\mu$  起作用) 中的耦合常数为  $G_{G-T} = (1.26 \pm 0.02) G_F$ 。

实验上通过比较  $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$  和  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$  两个纯盖莫夫—泰勒型跃迁几率, 可以得到  $G'_{G-T}$  和  $G_{G-T}$  两个耦合常数之比。

$$\theta_c^A = \arctan \left( \frac{G'_{G-T}}{G_{G-T}} \right) = 0.226 \pm 0.005 \quad (9.3.9)$$

可知  $\frac{G'_{G-T}}{G_{G-T}} \approx \frac{G'_F}{G_F}$ 。说明夸克弦对弱作用的影响是一致的。至于  $G_{G-T}$  和  $G_F$  之间有 26% 的差别, 应该是夸克的背景场不同而造成的。



### 9.3.2 夸克弱电统一规范理论

下面把夸克纳入 GWS 统一规范理论，来描述强子的弱电作用过程。规范群仍然是  $SU(2) \times SU(1)$  群。相应的生成元仍然是同位旋  $T_1, T_2, T_3$  和超荷  $\frac{Y}{2}$ 。相应的规范场仍然是  $\bar{A}_\mu$  和  $B_\mu$ 。类似于轻子，夸克在真空中质量空间的投影值为  $\phi_m(x) = (0, v)$ 。生成元  $T_+ = \frac{1}{2}(T_1 + iT_2)$ ,  $T_- = \frac{1}{2}(T_1 - iT_2)$ ,  $T_3 - \frac{Y}{2}$  对应于中间玻色子场的  $W_\mu^-$ ,  $W_\mu^+$ ,  $Z_\mu$ 。保持对称的生成元  $Q = T_3 - \frac{Y}{2}$ ，和光子场  $A_\mu$  相应。

#### 1. 夸克场

考虑夸克  $u, d, c, s$  的情况。根据唯象分析的结果，参与弱作用的夸克本征态是  $u_L$ ,  $c_L$  和  $d_{L\theta} = d_L \cos \theta_c + s_L \sin \theta_c$ ,  $s_{L\theta} = s_L \cos \theta_c - d_L \sin \theta_c$ ,  $\theta_c$  是卡比玻角。对于  $SU(2)$  群， $u_L$  和  $d_{L\theta}$ ,  $c_L$  和  $s_{L\theta}$  分别组成二重态。

$$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_{L\theta} \end{pmatrix}, \quad q'_L = \begin{pmatrix} c_L \\ s_{L\theta} \end{pmatrix}$$

决定它的变换性质的生成元是  $\frac{\vec{\sigma}}{2}$ 。对于  $U(1)$  群，它的超荷为

$$\frac{Y}{2} = Q - T_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}$$

所以，在  $SU(2) \times U(1)$  群的规范变换下，它的变换规律是

$$q_L(q'_L) \rightarrow \exp \left[ -i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} - i\frac{\theta}{6} \right] q_L(q'_L)$$

与此相应，它们的协变导数是

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_t \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \bar{A}_\mu - i\frac{g_y}{6} B_\mu$$

夸克是有质量的。它们不仅有左手态  $u_L, d_{L\theta}, c_L, s_{L\theta}$ ，还有右手态  $u_R, d_{R\theta}, c_R, s_{R\theta}$ 。在  $SU(2) \times U(1)$  群下，左手态有如上所述的性质，那么右手态呢？它们不出现在唯象的弱作用理论中，因而假定它们是  $SU(2)$  单态。在  $U(1)$  群下，它们的超荷是  $Y/2 = Q$ ，即对于  $u_R$  和  $c_R$ ，有  $\frac{Y}{2} = Q = \frac{2}{3}$ ；对于  $d_{R\theta}$  和  $s_{R\theta}$ ，有  $\frac{Y}{2} = Q = -\frac{1}{3}$ 。

所以，在  $SU(2) \times U(1)$  群下，它们的变换规律是

$$u_R(c_R) \rightarrow \exp \left[ -i\frac{2}{3}\theta \right] u_R(c_R)$$

$$d_R(s_R) \rightarrow \exp \left[ i\frac{1}{3}\theta \right] d_{R\theta}(s_{R\theta})$$

与此相应，它们的协变导数是

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_y \frac{2}{3} \mathbf{B}_\mu$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_y \frac{1}{3} \mathbf{B}_\mu$$

夸克场是自旋为  $\frac{1}{2}$  的费米场。它们的拉格朗日密度具有狄拉克理论的形式，即

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{qg} &= i\bar{q}_L \not{D} q_L + i\bar{q}'_L \not{D} q'_L + i\bar{u}_R \not{D} u_R + i\bar{d}_{R0} \not{D} d_{R0} + i\bar{c}_R \not{D} c_R + i\bar{s}_{R0} \not{D} s_{R0} \\ &= i\begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_{L0} \end{pmatrix} \left( \not{\partial} - i\frac{g_t}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{A} - i\frac{g_y}{6} \mathbf{B} \right) \begin{pmatrix} u_L \\ d_{L0} \end{pmatrix} + i\bar{u}_R \left( \not{\partial} - i\frac{2}{3} g_y \mathbf{B} \right) u_R \\ &\quad + i\bar{d}_{R0} \left( \not{\partial} + i\frac{1}{3} g_y \mathbf{B} \right) d_{R0} + i\bar{c}_R \left( \not{\partial} - i\frac{2}{3} g_y \mathbf{B} \right) c_R + i\bar{s}_{R0} \left( \not{\partial} + i\frac{1}{3} g_y \mathbf{B} \right) s_{R0} \end{aligned} \quad (9.3.10)$$

## 2. 夸克的顶角和传播子

在式 (9.3.10) 中，有夸克和规范场的相互作用项。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{qg}^j &= \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_{L0} \end{pmatrix} \left( \frac{g_t}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{A} + \frac{g_y}{6} \mathbf{B} \right) \begin{pmatrix} u_L \\ d_{L0} \end{pmatrix} + \bar{u}_R \frac{2}{3} g_y \mathbf{B} u_R - \bar{d}_{R0} \frac{g_y}{3} \mathbf{B} d_{R0} + (u \rightarrow c, d \rightarrow s) \\ &= \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_{L0} \end{pmatrix} \frac{\gamma^\mu}{2} \begin{pmatrix} g_t A_\mu^3 + \frac{g_y}{3} B_\mu & g_t (A_\mu^1 - iA_\mu^2) \\ g_t (A_\mu^1 + iA_\mu^2) & -g_t A_\mu^3 + \frac{g_y}{3} B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_{L0} \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{2}{3} g_y \bar{u}_R \gamma^\mu u_R B_\mu - \frac{g_y}{3} \bar{d}_{R0} \gamma^\mu d_{R0} B_\mu + (u \rightarrow c, d \rightarrow s) \\ &= \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_{L0} \end{pmatrix} \frac{\gamma^\mu}{2} \begin{pmatrix} \frac{g_t^2 - \frac{g_y^2}{3}}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} Z_\mu + \frac{4}{3} \frac{g_y g_t}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} A_\mu & \sqrt{2} g_t W_\mu^+ \\ \sqrt{2} g_t W_\mu^- & -\frac{g_t^2 - \frac{g_y^2}{3}}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} Z_\mu - \frac{2}{3} \frac{g_y g_t}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} A_\mu \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} u_L \\ d_{L0} \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \left( \frac{g_y g_t}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} A_\mu - \frac{g_y^2}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} Z_\mu \right) \bar{u}_R \gamma^\mu u_R \\ &\quad - \frac{1}{3} \left( \frac{g_y g_t}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} A_\mu - \frac{g_y^2}{\sqrt{g_t^2 + g_y^2}} Z_\mu \right) \bar{d}_{R0} \gamma^\mu d_{R0} + (u \rightarrow c, d \rightarrow s) \\ &= \frac{g_t}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \bar{u}_L \gamma^\mu d_{L0} + W_\mu^- \bar{d}_{L0} \gamma^\mu u_L) + \frac{2}{3} e A_\mu \bar{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} e A_\mu \bar{d} \gamma^\mu d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sqrt{g_t^2 + g_y^2} Z_\mu \left( \bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \bar{u}_L \gamma^\mu u_L \right) \\
& - \frac{1}{2} \sqrt{g_t^2 + g_y^2} Z_\mu \left( \bar{d}_L \gamma^\mu d_L - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \bar{d}_L \gamma^\mu d \right) + (u \rightarrow c, d \rightarrow s) \\
& = \frac{g_t}{2\sqrt{2}} \left[ W_\mu^+ \bar{u} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) d_\theta + W_\mu^- \bar{d} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) u \right] + \frac{2}{3} e A_\mu \bar{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} e A_\mu \bar{d} \gamma^\mu d \\
& + \frac{1}{4} \sqrt{g_t^2 + g_y^2} Z_\mu \bar{u} \gamma^\mu \left( 1 + \gamma_5 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W \right) u \\
& - \frac{1}{4} \sqrt{g_t^2 + g_y^2} Z_\mu \bar{d} \gamma^\mu \left( 1 + \gamma_5 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W \right) d + (u \rightarrow c, d \rightarrow s) \tag{9.3.11}
\end{aligned}$$

与之相应的顶角和顶角因子如图 9.3.3 所示。

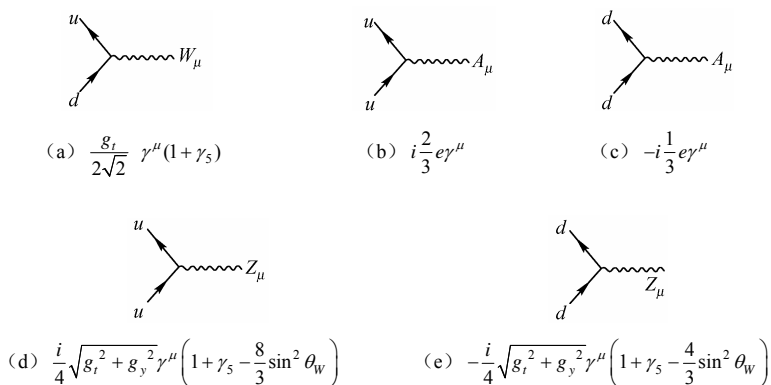


图 9.3.3 顶角和顶角因子

$$L_q^0 = \bar{q}_i (i \not{\partial} - m_i) q_i, \quad i = u, d, c, s \tag{9.3.12}$$

它们决定着夸克的传播子:

$$\frac{p}{q_i} \quad \frac{i}{p - m_i}$$

总体来说, 式 (9.3.10)、式 (9.3.11) 和式 (9.3.12) 一起, 以及相应的图形和因子, 构成了夸克和轻子的 GWS 弱电统一规范理论。利用它们可以计算各种弱电过程。

# 第10章 强子结构

这一章从真空场的角度来理解强子和构成强子的夸克的结构。前面的所有章节都是讲述量子场弹性形变的，而现在将要讲述的强子则是真空场基本单元塑性形变的产物。这一部分的理论将由弹性理论转变为塑性理论。真空场中的塑性理论就是以弦理论为基础的理论，弦描述了质量荷的情况。进入到塑性理论部分，本书前面关于真空的4条基本假设中，有必要在基本假设II、III的基础上附加这样的性质：场基本单元的塑性形变会造成维度分裂而构成弦，弦的质量正比于弦的长度。

由于强作用极其复杂，本章的讨论仅限于对夸克性质、强子静态内禀结构以及强作用场成因的最基本物理图像的理解<sup>①</sup>。

强子由夸克构成。夸克的内禀结构和轻子是一致的，略有不同的是夸克带弦，弦构成强作用空间。如同电子一样，夸克也存在三代，见表10.0.1。

表 10.0.1 轻子和夸克的代

代	轻子			夸克					
	符号	电荷 $Q$	质量	符号	电荷 $Q$	质量	符号	电荷 $Q$	质量
I	e	-1	0.511MeV	u	2/3	2~8MeV	d	-1/3	5~15MeV
II	$\mu$	-1	105.66MeV	c	2/3	1.3~1.7GeV	s	-1/3	100~300MeV
III	$\tau$	-1	1784.1MeV	t	2/3	137GeV	b	-1/3	4.7~5.7GeV

真空中发生任何真空物质（场基本单元）的得失都会构成荷电点粒子。荷电点粒子一定存在静质量、电荷、自旋自由度。具有静质量的最简单基本粒子就是电子和夸克。

轻子和夸克具有完全相同的内部结构，也存在三代。自由夸克和自由电子具有形式上完全相同的波函数 $\varphi$ 。具有静质量的强子由夸克构成。和轻子不同的是，由于夸克源自于场基本单元维度分裂，这使得夸克带弦，因而不存在自由夸克。

在真空场理论中，场基本单元的三个维度是永远不可分的，而场基本单元的维度不可分正是构成夸克禁闭及无色单态存在的物理机制。下面将具体介绍真空场中关于强子的弦模型图像。

## 10.1 $\pi^0$ 介子态的真空场图像

由场基本单元的三维特性可以做出这样的假设：场基本单元塑性形变会造成维度分裂。分裂遵循这样的法则：一场基本单元维度分裂构成介子态；两场基本单元维度分裂构成重子态。

<sup>①</sup> 目前公认的最为正确的强相互作用理论是量子色动力学理论（QCD）。本章讨论由真空场的性质来建立强子静态的内禀结构，从真空场的角度来研究强相互作用，还需要投入巨大的精力才能完善该理论。

轻子场内禀空间是半向空间。对于正轻子场只有  $x, y, z$  三维单向坐标维度，反轻子场有  $-x, -y, -z$  三个单向维度，这使场基本单元只有三个单向维度，如图 10.1.1 所示。半空间中，一基本单元场物质的总量为 1，那么场基本单元的每一维度所占有的场物质的量就为  $1/3$ 。考虑场基本单元  $P$  处于基态，为非游离态场，不带电荷。由场基本单元  $P$  的形变，可以构造出  $\pi^0$  介子态。

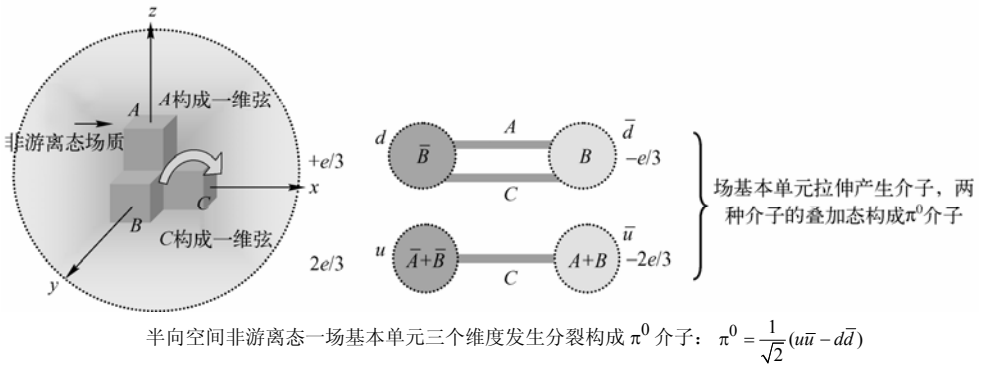


图 10.1.1  $\pi^0$  介子的构成

## 1. $\pi^0$ 介子的产生

### (1) $d\bar{d}$ 态

在碰撞区中的  $P$  处的场基本单元受到冲击会发生强烈的形变，三个维度间存在着场物质得失，这种得失以  $1/3$  为基本量。设想  $y$  维场物质受冲击后，把  $y$  维场物质交给  $x$  维，这样由于  $y$  维失去了场物质，而出现  $-1/3$  的场物质空穴；而在  $x$  维上则多出  $1/3$  的场物质，所以就产生一对对偶轻子场，所带电荷为  $\pm e/3$ 。在冲击下产生一对轻子场后，必然要分离，而单一维场物质是不可能独立存在的，因而这一对轻子场不可能完全分离而独立存在，于是就拉伸原  $x$  维场物质（基态不带电荷）形成一维  $x$  弦，如图 10.1.1 所示，对于带  $-1/3 e$  的  $y$  维上的轻子场用字母  $d$  表示，并称  $d$  夸克；而  $+1/3 e$  在  $x$  维上的轻子场用  $\bar{d}$  表示，称  $\bar{d}$  反夸克。这种维度分裂构成一个二维分裂态，称为  $\pi^0$  介子的一个态。这种介子态由  $d\bar{d}$  构成。

### (2) $u\bar{u}$ 态

$\pi^0$  介子还存在另一种介子态，即  $z$  维上也发生场物质丢失，把  $z$  维场物质交给  $x$  维， $z$  维上丢失  $1/3$  的场物质，出现  $-1/3$  的空穴电荷，而  $x$  维在得到  $1/3$  场物质的前提下，又获得  $1/3$  的场物质， $x$  维上的场物质总量为  $2/3$ ，所以  $y, z$  维带电荷  $-e/3$ ，而  $x$  维带电荷为  $2e/3$  的轻子场用字母  $u$  表示，由于  $y, z$  维都把自己的  $1/3$  的场物质交给  $x$  维， $y, z$  维没有场物质，只留下  $-1/3$  的空穴，空穴总量是  $-2/3$ ，带电荷量是  $-2e/3$ 。

$y, z$  维都失去场物质，两个空穴之间没有场物质来形成弦，于是  $\bar{d}_y, \bar{d}_z$  就合成一个更大的空穴，这个空穴形成一个夸克，仍存在  $yz$  维结构，空穴没有场物质，弦  $x$  的场物质的量为  $1/3$ ， $u$  场物质的量为  $2/3$ 。最终，这种介子态可以用  $u\bar{u}$  表示， $\bar{u}$  夸克带  $-2e/3$  的电荷。

## 2. $\pi^0$ 介子是叠加态

对于实验和模型来说，没有  $e/2$  态存在，因而只能认为处于一种叠加态，这种叠加态的介子称为  $\pi^0$  介子。

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \quad (10.1.1)$$

介子态最终要回到完备的基态三维场结构，处于稳定结构，夸克和反夸克会湮灭， $x, y$  弦把  $ud$  和  $\bar{u}\bar{d}$  拉到一起， $ud$  和  $\bar{u}\bar{d}$  相遇湮灭。考虑动量守恒，湮灭产生的量子波要分离形成两个动量相反的量子波。这就很容易理解  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ 。

## 10.2 $\pi^\pm$ 介子的真空场图像

### 1. 电子中心点的结构

现在来看激发态场基本单元的形成。当一场基本单元  $A$  受到激发，从原位置中脱出至  $C$  时，就形成了游离态的场基本单元，构成激发态，如图 10.2.1 所示。

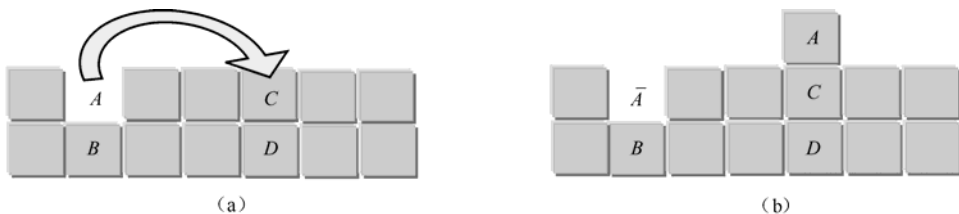


图 10.2.1 电子的产生

在  $\bar{A}$  出现一基本单元空穴，形成轻子场  $e^-$ ，在  $C$  处多一场基本单元，挤压周围的真空场形成反轻子场  $e^+$ 。

所形成的轻子场的内禀空间是半向空间。反轻子场内禀空间只有  $-x, -y, -z$  三个坐标维度及三个方向的场质；正轻子场的情况正相反，内禀空间内只有  $x, y, z$  三个方向的场质。 $e^-$  内禀空间中心点是一个空穴，空穴本身是没有维度结构的，以空穴为中心点会形成一种很稳定的结构。当受到扰动时有可能形成亚稳态结构。

### 2. $e^-$ 的亚稳态结构

所谓形成的亚稳态结构是指由  $B$  这一场基本单元进入到轻子场中心点空穴内，并发生膨胀而造成维度分裂， $B$  场质和空穴紧密结合构成半空间维度结构，均分空穴（相对于均分反轻子而言，均分空穴是很困难的，如图 10.2.2 (a) 所示）。这是一种亚稳态的轻子场结构，也可以变为稳态的正轻子场结构。这种转变是没有可观测效应的。

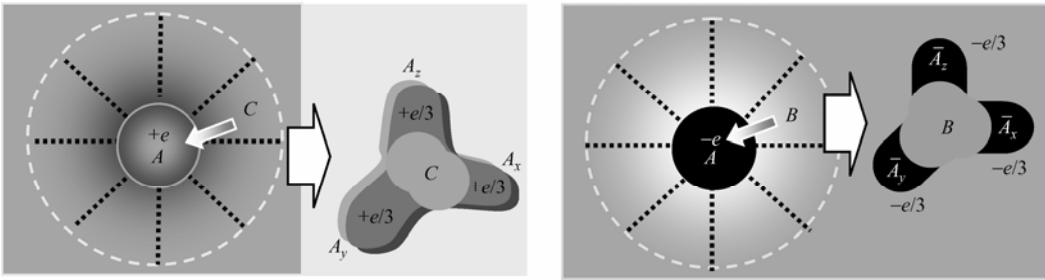
### 3. $e^+$ 的亚稳态结构

对于反轻子场而言，也存在两种结构态，其一是  $A$  这一游离态场基本单元强压入三维场中，场基本单元  $A$  被外部场质强烈地压缩而形成一个小球，如图 10.2.2 (a) 所示，没有发生维度分离，但场质  $A$  在应变为非球对称时容易发生形变，形成亚稳态反轻子场。

### 4. $e^+$ 的稳态结构

对反轻子场而言，中心点场质处于叠加状态， $A$  和  $C$  的叠加态使得  $A$  被挤压变形， $A$  被挤压而出现极微弱的维度分裂，无论是  $A$  在中心点还是  $C$  在中心点都只存在如图 10.2.2 (a) 所示

的结构。游离态的  $A$  在轻子场内禀空间只有半向三维结构，对于  $C$  而言也是同样的。 $C$  不是游离态场质，因而不带电荷。 $A$  是游离态质，被挤压的结果导致  $A$  被  $C$  均分为三等份，每一份场质有  $e/3$  的电荷，对于反轻子场而言，这种结构是稳态结构。图 10.2.2 (a) 和图 10.2.2 (b) 的结构为对偶结构，但对于正轻子场是亚稳态结构，而对于反轻子场则是稳定结构。



(a) 亚稳态结构→反轻子空穴稳态结构 (b) 正轻子空穴稳态结构→亚稳态空穴分裂态

图 10.2.2 电子中心点的结构

5. 激发态场基本单元的维度分离

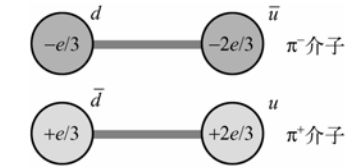


图 10.2.3  $\pi^+$  介子

反轻子场在强冲击下，把  $A_y$  这一份场质强加入  $A_x$  中形成  $A'_x$ 。 $A'_x$  要发生分离，于是拉伸场质  $C$  的  $x$  维， $A_x$  不可能独立存在，便形成  $x$  弦，如图 10.2.3 所示。 $A'_x$  带有  $2/3$  的游离场质，因而有电荷  $2e/3$ ， $A_z$  没有变化，仍带有  $1/3$  的反游离场质，有  $e/3$  的电荷。对于  $y$  维来说， $A_y$  场质交给  $A_x$  后，没有场质，所以也不存在电荷。但基态场质  $C$  在  $y$  方向仍有  $y$  维场质。 $A_z$  带电荷  $e/3$ ，而  $A_x$  带  $2e/3$  电荷，静电场相斥，对于弦  $x$  来说，可以构成一种相对稳定的结构，该结构的场称为介子态，反轻子场产生的介子态带总电荷量为  $+e$ ，用符号  $\pi^+$  表示，并称为  $\pi^+$  介子。对于  $A_z$  部分来说，形成轻子场，场质的量为  $1/3$ ，带电荷  $e/3$ ，用字母  $\bar{d}$  来表示，并把这种轻子场称为  $\bar{d}$  反夸克， $A'_x$  也是轻子场，所含游离态场质的量为  $2/3$ ，带电荷为  $2e/3$ ，用字母  $u$  表示，称为  $u$  夸克。

$$\pi^+ = u\bar{d} \tag{10.2.1}$$

对于轻子场来说存在自旋波，在正反轻子场相碰时，正反轻子场自旋相反，叠加后自旋为零。和  $\pi^+$  介子的情况类似，由正轻子的亚稳态结构的场质（即游离态空穴场质）的得失，也能得出  $\pi^-$  介子的结构，它是  $\pi^+$  介子的对偶结构， $\pi^-$  介子由  $d$  夸克和  $\bar{u}$  反夸克构成， $\pi^-$  介子自旋为零。

$$\pi^- = d\bar{u} \tag{10.2.2}$$

介子态为二维分离态，是非稳定态。

$\pi^0$  介子为实标量场粒子， $K^0, \bar{K}^0$  介子为赝标量场粒子， $\pi^\pm$  为复标量场粒子。为了本章的后续讲述，这里需要建立一个一般的真空场的实标量场模型。可以把实标量粗略地视为“源”和“汇”的叠加态。

(1) “源”结构

考虑在真空中，真空场  $\xi^i(\lambda)$  的某一点  $\lambda_0$  产生应变，应变量为  $\varepsilon$ 。 $\xi^i = \xi^i(\lambda_0 + \varepsilon/2)$ ，

或者说点  $\lambda_0$  沿  $\vec{\xi}$  正方向拉伸, 真空产生形变, 真空有 4 个维度, 球对称应变量为  $\varepsilon/2$ , 则有

$$\xi^i \rightarrow \xi'^i = \exp\left[\frac{\varepsilon}{2}\vec{\xi}\right]\xi^i = \varphi(x^i)\xi^i$$

应变  $\varphi_a(\xi) = \frac{\xi^i(\lambda_0 + \varepsilon/2)}{\xi^i(\lambda_0)} = \exp\left[\frac{\varepsilon}{2}\vec{\xi}\right]$  就构成了“源”结构的场函数, 如图 10.2.4 所示。

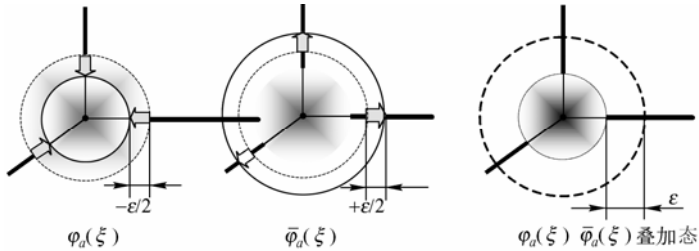


图 10.2.4 真空场中的“源”和“汇”叠加构成有质量的“点”

### (2) “汇”结构

用类似的方法可以得到“汇”结构的场函数。 $\lambda_0$  产生应变,  $\xi'^i = \xi^i(\lambda_0 + \varepsilon/2)$ ,  $\lambda_0$  沿  $\vec{\xi}$  负方向压缩, 真空产生形变, 球对称应变量为  $-\varepsilon/2$ , 则有  $\bar{\varphi}_a(\xi) = \exp\left[-\frac{\varepsilon}{2}\vec{\xi}\right]$ 。

“源”和“汇”进行叠加 (不考虑叠加后产生的湮灭效应, 也不考虑形变方向, 场的总形变量绝对值相加), 得到标量粒子的内禀场函数。

$$\phi(\xi) = \bar{\varphi}_a(\xi) \varphi_a(\xi) = \exp[|\varepsilon|\vec{\xi}]$$

$$\phi(\xi) = \exp\left\{\begin{pmatrix} \varepsilon_{00}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right\} = \exp(E_0 t - p_0 x^4)$$

将内禀场转到我们熟知的  $x$  空间, 考虑引入算符 (8.1.3a) 后, 算符作用于场函数要得到实数, 因而要乘上一个虚数单位  $i$ , 得到

$$\phi(x(\xi)) = A \exp i [Et - \vec{k}\vec{x}(\xi) - p_0 x_4]$$

这就是标量场的场函数。

## 10.3 质子结构

### 10.3.1 质子的形成

前面两节介绍了  $\pi^{0\pm}$  介子的构成。接下来介绍质子和中子的构成。三维非激发态和激发态的单一基本单元场质的二维分裂态构成了  $\pi^{0\pm}$  介子; 而两个场基本单元的三维分离则会造成重子的产生, 换言之, 质子是三维轻子场分裂形成的。



在图 11.3.1 中，先考虑轻子场的中心点，如正电子的中心点，这一中心点正是一场基本单元的游离态场质，这一游离态场质可视为反场基本单元。游离态场质与非游离态场质的结合使中心点部分的场被压缩发生形变，换言之，即发生微小的维度分离。游离态场质与非游离态场质的场基本单元紧密地结合成一体。

$$p=uud$$

(10.3.1)

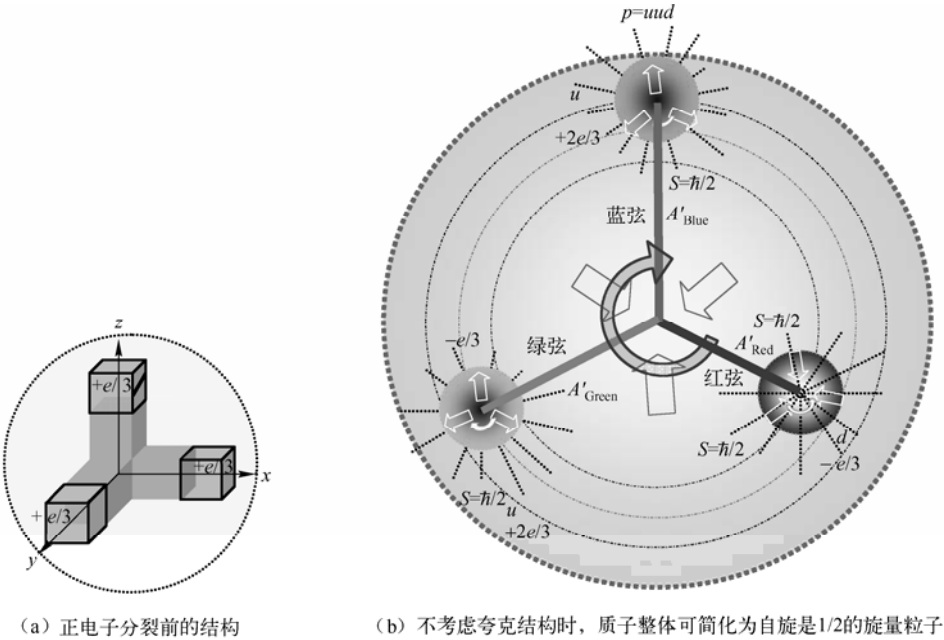


图 10.3.1 质子结构示意图

由反场基本单元和某一非游离态场基本单元所构成的场，便表现为一个完整的带正电荷的轻子场，这种场发生强烈激发就会产生维度分离。 $y$  维把  $1/3$  的反场基本单元（从电荷量的角度则为  $e/3$ ）转移到  $z$  维上，然后再把  $1/3$  的反场基本单元转移到  $x$  维上，于是  $x, z$  维均获得  $1/3$  的基本单元的场质而成为  $2/3$  场基本单元游离态场质，表现为带  $2e/3$  电荷的夸克场。这些夸克场都有自己相应的  $\hbar/2$  的自旋。

这里的夸克是永远无法分离的，因为：背景场是三维的，不允许二维或一维结构的场独立存在，只允许三维结构存在；三维场的三维性本身就是场基本单元所固有的性质，因而本身也不可能发生维度分离。如图 10.3.1 (b) 所示，质子具有三维稳定结构，这就是质子最终的静态结构。和前面介子态的情况一样，把质子中带  $-e/3$  电荷的轻子场用  $d$  表示，带  $2e/3$  电荷的夸克用  $u$  表示。于是质子由三个夸克组成，分别是  $u, u, d$  夸克。 $R_q$  是夸克内禀空间半径。

场基本单元维度分裂构成三维弦，和弦相连的夸克的能级是不一样的。能级越高则弦张力越大，相应的长度就越长；能级最小，则弦的长度应该最短。这些能级相对只有三种态，即大、中、小。可以这样规定，把三个维度的能级态对应 B, G, R 三种颜色态。夸克通过弦传递量子波改变能级态，即改变颜色态。

场基本单元的维度不可分是构成夸克禁闭及无色单态存在的物理机制。强作用本质上是由夸克间弦的相互作用构成的。场基本单元维度的两分裂构成强作用的介子。场基本单元

维度的三分裂构成强作用的重子。

对于强子来说，带电荷的场基本单元进行相应的维度场的转换便形成了强子。现在具体来看一下质子是怎样形成的。在图 10.1.1 中， $x$  把  $1/3$  的场交给  $y$ ， $x$  又将另外  $1/3$  的场交给  $z$ ，这样  $x$  维便留下  $1/3$  的空穴，形成  $d$  夸克。而另外两个维度则形成带有  $+2e/3$  电荷的  $u$  夸克。中间的非游离态场基本单元则被拉伸形成三个维度的弦。场基本单元被拉成很细的弦之后，中心的体积突然变小，类似于产生空穴效应，便形成了自旋波，这便是质子的自旋。对于夸克来说，它的结构和轻子的结构是相同的，因而每个夸克都有自己的自旋波，夸克的三个维度态就对应着红、绿、蓝三种颜色态。把三个维度所对应的能级状态定义为三个颜色态。这里的弦存在三个维度，对应三个颜色态。颜色的本质就是维度。

中子及所有三个夸克构成的重子，都可以由两场基本单元通过维度的场质的交换而得到，重子的内部结构和质子的结构一致，所不同的是夸克的电荷和质量。

强相互作用的本质就是夸克间通过弦进行相互作用，夸克除了自身带弦以外，还可以诱发非激发态场基本单元拉伸构成弦来传递强相互作用。

### 10.3.2 质子自旋

要理解质子自旋，首先要了解一下弦的情况。在图 10.3.1 (a) 中，场质 II 为轻子场中心点的非游离态（非激发态）场基本单元，经历三维分裂后，这一场基本单元便构成了质子的三维弦。对于正轻子场中心点是两份基本场质的叠加态，对于游离态场质形成夸克在离中心点  $O$  很远的地方，而基态场质被拉成很长的弦，如图 10.3.1 (b) 所示，在该处，场质 II 的体积  $V$  变小， $V \rightarrow 0$ ，这样相当于  $O$  处缺了一份场质，于是  $O$  点形成和场质出现空穴相同的效应，形成了正轻子场效应的场， $R_0$  是这种近似正轻子场的内禀空间的半径，这个场没有空穴，因而不会形成场纤维结构，所以不存在电荷。形成具有正轻子场效应的中心点区后，自然存在自旋波，自旋  $S = \hbar/2$ ，就是质子自旋。自旋量子波在质子中心区，中心点离夸克很远，因而质子自旋和夸克自旋几乎没有什么直接联系，彼此是独立的。

反质子和质子的情况完全相同，由轻子场的亚稳态结构可以得到反质子的结构，即是质子的对偶结构：

$$\bar{p} = \overline{uud}$$

要注意的是，反质子中心点部分轻子场的形成也是一基态场基本单元拉成三维弦而造成的，这一点和质子完全一样，也是正轻子场。

夸克本身带有分数电荷，自然带有纤维结构，自旋波在电场纤维中传播便产生了夸克磁矩。因而重子的磁矩主要是由夸克自旋造成的。重子的自旋对磁矩的影响很小。正因如此，我们能通过夸克模型估算出重子的磁矩。

最近的实验表明，由夸克（包括全部价夸克和海夸克）的自旋所提供给质子的自旋成分是  $\Sigma = 0.27 \pm 0.05$ ，而其中由  $s$  夸克提供的成分是  $-0.10 \pm 0.03$ ，此处负号指  $s$  夸克的贡献与质子自旋方向相反。以上的数值都是直接的测量结果，而且两大高能加速器（CERN 和 SLAC）的结果趋于一致。质子自旋  $1/2$  的组成是

$$\frac{\Sigma}{2} + L_q + L_G + \Delta G = \frac{1}{2} \quad (10.3.2)$$

其中， $\Sigma$  是全部夸克提供的百分比， $L_q$  是夸克轨道角动量的贡献， $L_G$  是胶子轨道角动量的

贡献,  $\Delta G$  是胶子自旋贡献<sup>①</sup>。

从场的角度来看, 胶子就是弦, 并没有真正意义上的自旋。和质子自旋一样, 强子自旋波作为一个整体表现出来, 自旋波中心点和夸克中心点相对独立, 因而夸克自旋对整体强子自旋贡献很小。考虑到三维中某维夸克  $q_z$  自旋和强子自旋波  $z$  轴完全重合,  $q_x$  和  $q_y$  自旋方向与  $z$  垂直而无贡献, 因而  $q_z$  对强子自旋的最大贡献不可能超过  $1/3$ , 这种简单的估算是显而易见的。夸克、弦和背景场相对于自旋波来说是静止的, 对强子自旋的贡献应为零。在后面谈及夸克海时, 我们会知道点状胶子就是夸克海中的场基本单元起伏所产生的效应。

### 10.3.3 质子的弦与稳定性

#### 1. 质子的弦

如图 10.3.1 (a) 所示, 场基本单元  $\Pi$  为轻子场中心点的非游离态。由于  $\Pi$  发生塑性变形, 被拉成很长的三根弦, 于是在原来的  $O$  点处,  $\Pi$  的体积为  $V_\Pi$ , 拉成弦后在  $O$  点邻域  $\Pi$  的体积  $V_\Pi \rightarrow 0$ , 这样相当于  $O$  处缺了一份场基本单元, 于是  $O$  点产生和场质出现空穴相同的效应, 形成轻子场。 $R_0$  是轻子场的内禀空间的半径。和以前不同的是轻子场并没有出现真正的场质得失, 或者说没有场质空穴, 仅是体积形态不同而造成的表象, 因而不会产生纤维结构, 也就无电荷可言。形成这种无荷轻子场后, 自然存在自旋波, 自旋  $S = \hbar/2$ , 这就是质子自旋值。这样质子就存在 4 个轻子场和 4 个自旋波。而这些自旋波是彼此独立的。塑性形变的弦是有静质量的, 静质量为

$$m_L = T \frac{(L_R + L_G + L_B)}{3} \quad (10.3.3)$$

这里  $L_R, L_G, L_B$  分别是红、绿、蓝三根弦的长度,  $T$  为单位长度的质量。

要特别注意的是, 场基本单元的应变极限  $\hbar$  是维度未分离时的性质, 作为协变场的一个基本组成单元, 任何应变都会影响到周围的场。但当一场基本单元发生三维分裂后, 形成三条很细的弦, 虽然场质的总量并没有改变, 但体积形变的最大量为  $\Delta V$ , 形变限制在  $V \pm \Delta V$  ( $V$  为场基本单元体积), 和维度未分离前是一致的。维度分裂, 形成三条很细长的弦后, 场基本单元分散在一个很大的区域, 场应变对于背景场的影响变小, 近似于一个独立体, 场基本单元的形变满足弹性场的拓扑形变。

#### 2. 正物质的稳定性

对于反质子来说, 它和质子的情况相同, 是一种对偶结构。特别值得一提的是, 与质子不同的是对于负电子来说, 是一份游离的基本单元空穴场。这样一份基本单元空穴, 拉伸周围的非游离基态的场 (也可以理解为真空非游离基态场向中心点空穴坍塌), 形成带  $-e$  电荷的轻子场。由于中心点空穴无场存在, 自然也就无维度分裂可言, 因而中心点是极其稳定的, 构成非常稳定的轻子场。而由游离态空穴场质构成的轻子场就是我们所熟知的  $e^-$ , 为正物质。如图 10.3.2 所示, 这就是  $e^-$  中心点的场质结构, 和  $e^+$  是大不一样的。 $e^+$  中心点的结构有两种形式, 这两种形式中心点都存在游离态场质, 在强大的基态场质的挤压下, 受到扰动后, 很容易发生维度分裂而形成质子。由于  $e^-$  中心点的这种形式使这种空穴轻子场异常地稳定, 很难形成维度分离而形成反重子, 所以这也是为什么我们所见到的大量物质是以

① 张礼. 近代物理学进展. 清华大学出版社, 1997, p293.

$e^-$  和质子的形态存在的, 而极少见到反物质。从这里可显而易见地得知宇宙中并无反物质世界存在。

关于反物质迄今为止, 已发射的宇宙飞船做了近距离观测<sup>①</sup>, 所有的观测结果都未发现反物质的存在。估计在星系尺度上, 反物质的含量不会超过百万分之一。从现有的理论进行分析, 它应该满足对称性, 那么重子数和反重子数应该完全相等, 从宇宙大爆炸开始演化到现在, 宇宙的重子数

(包括正反两种) 和光子数目的比例应该是  $10^{-19}:1$ 。但事实上, 目前观测到的比例却是  $10^{-10}:1$ 。造成这种现象的合理解释只有认为当初重子数和反重子数不相等。这种现象称为对称破缺, 其破缺程度为  $10^{-10}$ 。在真空场理论中, 正反粒子在产生时, 这种破缺就已存在了。

### 10.3.4 中子结构

中子是这样形成的, 在正轻子场的中心点区的基态质由于场密度太大, 而出现叠加态, 是由两份非游离态基本单元的场叠加而成的, 在半空间中只有单向三维。

在受到冲击之后, 场被击穿发生场质得失,  $y, z$  维上的  $1/3$  的场质交给  $x$  维, 于是  $y, z$  维就出现了  $1/3$  的空穴, 而电荷为  $-1/3e$ , 而在  $x$  维上得到两份  $1/3$  的场物质, 于是多出  $2/3$  的游离态场物质, 构成带电荷  $+2e/3$  的轻子场, 其结构完全类似于质子, 参见图 10.3.1 (b) 所示, 用夸克表述为

$$n = udd \quad (10.3.4)$$

反中子是由  $x$  维的场质全部  $2/3$  中的一半给  $y$  维, 一半给  $z$  维, 于是  $x$  维形成  $2/3$  的空穴, 带  $-2e/3$  电荷,  $y, z$  维则多出  $1/3$  的游离态场质, 分别带  $e/3$  的电荷, 用夸克表述为

$$\bar{n} = \bar{u}\bar{d}\bar{d} \quad (10.3.5)$$

### 10.3.5 强子的 $SU(3)$ 表述

类似于颜色的表述形式, 可以把  $u, d, s$  三种不同味的夸克视为  $SU(3)$  群的三个基底。

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

构成

$$\phi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad (10.3.6)$$

这样便能根据  $SU(3)$  群的理论得到由两个夸克系统所构成的介子八重态 (如图 10.3.3 所示, 这和夸克颜色八重态在数学上是完全一致的, 只是符号不同而已), 而由三夸克所构成的系统组成的强子八重态和十重态, 其具体的组成见表 10.3.1 和表 10.3.2。

强子的味和颜色相比较并不是严格对称的。原因如下。

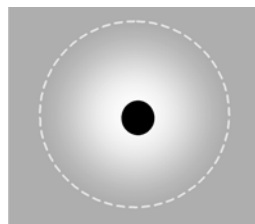


图 10.3.2  $e^-$  中心点的场质结构

<sup>①</sup> 何香涛. 观测宇宙学. 北京师范大学出版社, 2007, p74~75.

味对应的是极化态，极化态存在三代，因而夸克也存在三代。对于每一代相应的夸克来说都存在相应的背景场。例如，低应变的背景场只会存在低态的夸克轻子场，相应的高应变的背景场才会存在高态的夸克轻子场。因而 $u,d$ 夸克不可能和 $t,b$ 夸克同时出现在一个重子中，构成某一强子，因为在同一重子的内禀空间内背景场是相同的。对于同代夸克，若质量差异太大，对背景场的要求也存在差异。由于背景场的限制，代与代之间不能任意组合，相应地，对于同代则容易组合，同种夸克对背景场的要求是完全一致的，则更容易组合（当然要在满足整数电荷的前提条件下）。高代的轻子场要具有高应变的背景场才能形成。若把高应变背景场视为局域参照系，则该局域参照系要么以非常接近光速的速度在运动；要么处于静态高应变区，如黑洞内部；或者在两极高能粒子强烈撞击的瞬间区域。这些苛刻的条件使得高代夸克不容易出现。

表 10.3.1  $J^P = 0^-$  介子的夸克组成

夸克组成	$J^P = 0^-$
$d\bar{u}$ , $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$ , $u\bar{d}$	$\pi^-$ , $\pi^0$ , $\pi^+$
$d\bar{s}$ , $u\bar{s}$	$k^0$ , $k^+$
$s\bar{u}$ , $s\bar{d}$	$k^-$ , $\bar{k}^0$
$(u\bar{u} + d\bar{d} + 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	$\eta(549)$
$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	

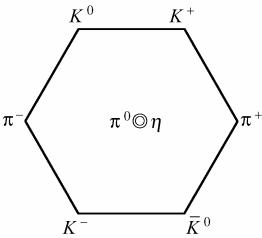


图 10.3.3 介子八重态

表 10.3.2 重子的夸克组成

夸克组成	$J^P = 1/2^+$	$J^P = 3/2^+$	$m/\text{MeV}/c^2$	
udd, uud	n, p		938	八重态
$(du - ud)/\sqrt{2}$	$\Lambda$		1116	
$dds$ , $(du + ud)s/\sqrt{2}$ , $uus$	$\Sigma^-$ , $\Sigma^0$ , $\Sigma^+$		1189	
$(uu + dd)/\sqrt{2}$	$\Xi^-$ , $\Xi^0$		1315	
ddd, udd, uud, uuu		$\Delta^-$ , $\Delta^0$ , $\Delta^+$ , $\Delta^{++}$	1232	十重态
dds, uds, uus		$\Sigma^{*-}$ , $\Sigma^{*0}$ , $\Sigma^{*+}$	1385	
dss, uss		$\Xi^{*-}$ , $\Xi^{*0}$	1530	
sss		$\Omega^-$	1672	

另一方面，对于低代夸克，虽然构成某种强子，但由于组合的不同，极化态对应的场应变也不同，而场应变直接决定了轻子场的能量及传播性质，换言之，轻子场的代不能精确确定其质量。综合上述两方面的原因， $SU(3)$ 对称性是不精确的，并且不能构成更大的群。

10.4 强相互作用

从真空场的性质出发，我们建立了强子模型。该模型和夸克模型一致，并有更深的理解。这里把强子的内部夸克结构进行简化，不考虑其内禀结构，视强子为一种结构简单的旋量粒子，则可借助于对称性来确定强相互作用的 $\mathcal{L}_I$ 。

### 10.4.1 中性 $\pi^0$ 介子与核子的强相互作用

#### 1. 强相互作用Lagrange函数密度

将强子视为点粒子。中性  $\pi^0$  介子与核子的相互作用为强相互作用。这种相互作用通过厄米标量场与旋量场的相互耦合来实现。厄米标量场-旋量场系统的Lagrange函数密度为<sup>①</sup>

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_I \quad (10.4.1)$$

$\pi^0$  介子是实标量场，则

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi \phi \quad (10.4.2)$$

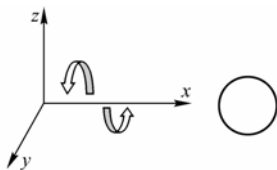
核子为旋量场，则

$$\mathcal{L}_\psi = -\bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial_\mu + M)\psi \quad (10.4.3)$$

这里把核子视为一个点粒子， $m$  和  $M$  分别是  $\pi^0$  介子和核子的质量。对于  $\mathcal{L}_I$  按照下述的考虑来确定它： $\mathcal{L}_I$  必须具有空间反演不变性（实验事实表明，在强作用过程中，宇称守恒）和正 Lorentz 不变性； $\mathcal{L}_I$  的形式要尽可能简单。因为  $\pi^0$  介子的内宇称为奇，故  $\phi$  是一个赝标量，而由旋量场函数构成的最简单的赝标量是  $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ ， $\gamma_5$  就是相互作用顶角空间，故可取

$$\mathcal{L}_I = iG\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi \quad (10.4.4)$$

其中的虚数单位  $i$  是为了保证  $\mathcal{L}_I$  的厄米性而引入的。 $G$  是强相互作用的耦合常数，它与电磁耦合中的  $e$  相当。上式的  $\mathcal{L}_I$  称为 Yukawa 耦合。



只有  $x$  维参与相互作用， $y, z$  维与  $x$  维无关，则具有转动对称性，即轴对称性

图 10.4.1 强相互作用顶角空间具有轴对称性

#### 2. 强相互作用顶角空间 $\gamma_5$

强相互作用顶角空间为什么是  $\gamma_5$ ？这在真空场理论中有一个直观的物理学图像——强相互作用通过一维弦来实现强相互作用。对于三维空间内的一维弦而言，只有轴对称性质。因为考虑三个维度  $x, y, z$  中，若只有  $x$  维参与相互作用， $y, z$  维与  $x$  维无关，那么在三维空间看来，相互作用就是  $x$  轴对称的，如图 10.4.1 所示。因而强相互作用顶角空间是  $\gamma_5$  轴对称空间的原因源自于强相互作用的弦作用特性。

#### 3. 耦合常数

式 (10.4.4) 中的  $\mathcal{L}_I$  与电磁相互作用拉氏量  $\mathcal{L}_I = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$  相比较，二者的区别主要在于耦合强度相差很大。

① 这部分采用泡利度规。

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \quad \frac{G^2}{4\pi} = (1 \sim 15)$$

已经知道电磁耦合常数  $\alpha = 1/137$  是由于电子和光子的纤维结构造成的，现在来考虑  $\pi$  介子和核子的耦合常数为什么是  $1 \sim 15$ ，这是由夸克的结 构决定的。每一个夸克有三个维度，在相互作用时每一个 维度有可能形变构成一根弦，每一根弦都有可能成为相互 作用的通道。从粒子的外部空间看，粒子是一个整体，被 视为类点粒子，弦的整体发生相互作用，每一根弦的最大 贡献为 1。这里粗略地估算一下  $\pi$  介子与核子的强耦合常 数，如图 10.4.2 所示，考虑到核子有 3 个夸克， $\pi$  介子有 2 个夸克，总计有 5 个夸克参与 强相互作用，相互作用的通道总数为  $5 \times 3 = 15$ 。

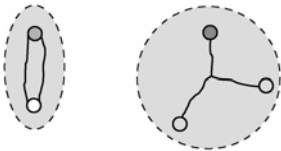


图 10.4.2  $\pi$  介子与核子的强耦合常数

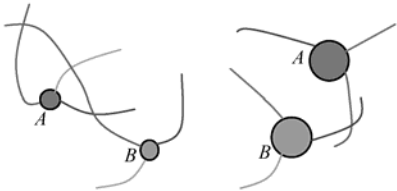
对于耦合常数的定义是建立在单粒子相互作用的概率上的，这样的定义不适用于多粒 子体系相互作用的耦合常数。 $\pi$  介子与核子的强相互作用本质上是多夸克的相互作用，相互 作用耦合常数就可以大于 1，于是通道数决定了相互作用的强度。

4. 最大强耦合常数

$\pi$  介子与核子内的夸克相互之间距离较远（低能情况）， $\pi$  介子的 2 个夸克的 6 个维度 （每个夸克有 3 个维度通道）同时和核子的 3 个夸克总计 9 个维度通道同时作用，此时相互 作用通道总数为 15，耦合强度为 15。

5. 最小强耦合常数

$\pi$  介子进入核子内禀空间（高能情况）， $\pi$  介子的 2 个夸克的其中 1 个通道（一旦进入 内禀空间中， $\pi$  介子的夸克所看到的核子内部空间夸克的弦是细而长的，弦的局部和弦的局 部发生相互作用，一根弦的最小贡献是  $1/3$ ，如图 10.4.3 所示。每个夸克有 3 个维度通道， 其中一维是  $1/3$ ）仅和核子的 3 个夸克中的 1 个夸克的其中一维起作用，总计  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$  个 通道同时作用，此时相互作用通道总数为 1，耦合强度为 1（内禀空间内外的维度通道定义 不一致）。



夸克低能相互作用中， $A$  夸克的 1 根弦最多会和  $B$  夸克的 3 根弦发生相互作用，这样 1 根 弦的最大贡献率为  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ ；高能时，夸克靠得很近， $A$  夸克的 1 根弦常处于最少相 交状态，只和  $B$  夸克的 1 根弦相互作用，1 根弦的最小贡献率为  $\frac{1}{3}$

图 10.4.3 夸克弦的最强和最弱的相互作用

6. 强相互作用场方程

把式 (10.4.1) ~ 式 (10.4.4) 所确定的  $\mathcal{L}$  代入 Euler-Lagrange 方程，得到  $\psi$  与  $\phi$  发生强 相互作用（强作用顶角为  $\gamma_5$ ）场系统的场方程组（在泡利度规下）。

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + M)\psi = iG\gamma_5\psi\phi$$

$$\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu - M) = iG\bar{\psi}\gamma_5\phi$$

$$(\square - m^2)\phi = -iG\bar{\psi}\gamma_5\psi$$

这些方程式同样是非线性非齐次方程式，要求得它们的精确解是困难的。

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + iG\gamma_5\phi + M)\psi = 0$$

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + iG\gamma_5\phi + \gamma_m \partial_m)\psi = 0$$

$$\psi = \exp(ik_\mu x^\mu + imx^M + i \cdot 0x^5)$$

对旋量场而言，强作用仅是核子旋量场的一个自由度。在没有强相互作用时，核子的强力场是平直的，强力场这一自由度的空间维度是  $x^5$ ，由于该维度是平直的，沿  $x^5$  维度的形变量为 0。

当存在强相互作用时，核子的强力场由平直变为弯曲，相互作用的空间顶角为  $\gamma_5$

$$[\gamma_\mu \partial_\mu + \gamma_5(\partial_5 + iG\phi) + \gamma_m \partial_m]\psi = 0$$

$$[\gamma_\mu \partial_\mu + \gamma_5 D_5 + \gamma_m \partial_m]\psi = 0$$

这就是中性  $\pi^0$  介子与核子产生强相互作用时核子所满足的场方程。

场的正则坐标和正则共轭动量分别是  $\phi$ ， $\pi = \dot{\phi}$ ， $\pi = \psi$ ， $\pi_\psi = i\psi^+$

Hamilton 函数为

$$H = \int_V d^3x \mathcal{H}(x), \quad (10.4.5)$$

其中，

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &= \pi \dot{\phi} + \pi_\psi \dot{\psi} - \mathcal{L} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]}_{\mathcal{H}_\phi} + \underbrace{\bar{\psi}(\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + M)\psi}_{\mathcal{H}_\psi} + \underbrace{(-iG\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi)}_{\mathcal{H}_I = -\mathcal{V}_I} \end{aligned} \quad (10.4.6)$$

### 10.4.2 $\pi$ 介子与核子的相互作用

除  $\pi^0$  介子外，还有  $\pi^\pm$  介子，那么，就要把三种  $\pi$  介子统一处理，并将质子、中子统一处理。

#### 同位旋与同位旋多重态

所有强子（包括介子、核子和超子等）均可按它们的质量和带电状态区分为不同的同位旋多重态。为便于理解，这里以自旋为例来说明多重态的意义。电子自旋为  $1/2$ ，即

$$|s|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right), \quad \hbar = 1 \quad (10.4.7)$$

在普通空间第三轴上的投影值  $+\frac{1}{2}$  和  $-\frac{1}{2}$  分别与电子的两种自旋态对应。这两种自旋态是同一电子可能具有的两种本征态。由这两种本征态又可线性组合成为许多对两两独立的自旋态。因此，电子具有两种独立的自旋态，称之为电子的自旋二重态。

质子与中子质量十分相近，在强相互作用中表现出相同的性质。质子质量  $M_p \approx 1836m_e$ ，中子质量  $M_n \approx 1839m_e$ （ $m_e$  是电子质量），两者质量相差约为千 2‰（这一质



量差是电磁作用的干扰造成的)。实验表明, 质子与质子、中子与中子、质子与中子之间的强相互作用力(当不考虑电磁相互作用时)是相同的, 这就是强作用力的电荷无关性。因此, 若只考虑强作用, 就可把质子与中子视为同一种粒子(核子)的两种不同的带电状态。用波函数 $\psi$ 来描写核子的状态, 并假定核子除自旋角动量 $s$ 之外, 还有另一种抽象的内禀“角动量” $I$ , 它不是平常三维欧氏空间的矢量, 而是所谓“同位旋空间”的矢量, 即“同位旋角动量”, 简称同位旋。 $\hat{I}^2$ 的本征值是

$$|I|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

即核子的同位旋量子数为 $1/2$ 。矢量 $I$ 在同位旋空间第三轴上的投影值为 $I_3 = \pm \frac{1}{2}$ , 分别对应于质子态和中子态。换言之, 质子与中子同属于核子的同位旋二重态。这样, 核子波函数 $\psi$ 应是时空坐标 $x$ , 自旋变数 $m_s$ 及同位旋变数 $I_3$ 的函数。

$$\psi = \psi(x, m_s, I_3) = \begin{cases} \psi_p, & \text{当 } I_3 = +\frac{1}{2} \text{ 时} \\ \psi_n, & \text{当 } I_3 = -\frac{1}{2} \text{ 时} \end{cases} \quad (10.4.8)$$

核子不但可以处于纯粹的质子态和纯粹的中子态, 而且可以处于二者的叠加态(当发生相互作用时, 情形就是这样)。

$$\psi'_p = a\psi_p + b\psi_n \quad (10.4.9a)$$

$$\psi'_n = c\psi_p + d\psi_n \quad (10.4.9b)$$

强相互作用的电荷无关性意味着: 把质子与中子对换, 强作用理论的形式是不变的, 这种对换相当于同位旋矢量 $I$ 在同位旋空间旋转角度 $\pi$ 。还可用任意的核子态 $\psi'_p$ 去代替 $\psi_p$ , 用 $\psi'_n$ 去代替 $\psi_n$ 。这相当于同位旋矢量 $I$ 在同位旋空间旋转任意角度。在由旋量波函数 $\psi_p$ 、 $\psi_n$ 张成的复二维空间, 这一转动变换便是线性变换。将它写为如下矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \psi'_p \\ \psi'_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (10.4.10)$$

列矩阵 $\begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \psi'_p \\ \psi'_n \end{pmatrix}$ 分别是同位旋空间的基本旋量 $\psi$ 和 $\psi'$ 的阵例。它们的每一分量又都是 Minkowski 空间的双旋量。因此, 所要建立的强作用理论应当同时对上述两个空间的变换(即 Lorentz 变换和三维同位旋空间的正转动变换)具有协变性。由于在同位旋空间的转动变换下, 旋量 $\psi$ 的模不变, 即

$$\psi'^+ \psi' = \psi^+ \psi$$

故式(10.4.10)的变换矩阵 $U$ 应为 $2 \times 2$ 么正矩阵。一个任意的 $2 \times 2$ 么正矩阵可以表示为

$$U = e^{i\varphi} u \quad (10.4.11a)$$

$$\det u = 1 \quad (10.4.11b)$$

变换矩阵(10.4.11a)的全体构成 $U(2)$ 群。由于常数相位因子 $e^{i\varphi}$ 在我们讨论的问题里不导致任何物理结果, 因而可以把对称群缩小, 只考虑满足条件(10.4.11b)的子群, 即 $SU(2)$ 群。 $SU(2)$ 群的任一变换 $u$ 可表示为

$$u = e^{i\frac{1}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}} = e^{i\frac{1}{2}(\alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau_2 + \alpha_3\tau_3)} \quad (10.4.12)$$

其中,  $\alpha_j (j=1,2,3)$  是  $SU(2)$  群的三个实参数,  $\frac{1}{2}\tau_j$  是  $SU(2)$  群的三个生成元。矩阵  $\tau_j$  是熟知的泡利矩阵, 它们的对应关系便是  $SU(2)$  群的代数关系。这些代数关系在初等量子力学里已见到过。

$$\left[\frac{1}{2}\tau_j, \frac{1}{2}\tau_i\right] = i\sum_k \varepsilon_{jlk} \frac{1}{2}\tau_k \quad (10.4.13)$$

现在可以把  $\psi'$  写为

$$\psi' = u\psi \quad (10.4.14)$$

由于同位旋空间的转动变换就是变换 (10.4.14) 的映射, 故凡有核子参与的强相互作用理论, 应具有  $SU(2)$  不变性。

现在再来看  $\pi$  介子。 $\pi$  介子的质量约为  $273m_e$ 。 $\pi^0$  介子质量约为  $264m_e$ , 它们的质量相差约为 3%。实验事实证明, 当不考虑电磁作用时, 三种  $\pi$  介子与核子之间的强作用力是相同的。因此, 可以把三种  $\pi$  介子视为同一种“标量介子”的三种不同带电状态, 并用一个统一的“同位旋矢量”场的三个分量来描述三种  $\pi$  介子, 每个分量又都是 Minkowski 空间的标量场。对于  $\pi$  介子, 用复标量场的两个独立的实分量。

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi + \phi^*) \quad (10.4.15a)$$

$$\phi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\phi - \phi^*) \quad (10.4.15b)$$

来描述, 再把描述  $\pi^0$  介子的实标量场记为  $\phi_3$ , 这样, 三种  $\pi$  介子就联属于三分量的实际量场  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ 。从量子力学观点看来,  $\Phi$  亦即是上述“标量介子”的波函数, 因此, 与核子的情形类似, 假定“标量介子”具有同位旋  $I$ ,  $\hat{I}^2$  的本征值是  $|\mathbf{l}|^2 = l(l+1)$ , 矢量  $I$  在同位旋空间第三轴上的投影值

$$I_3 = +1, 0, -1$$

分别与  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ 、 $\pi^-$  介子对应。换言之, 三种  $\pi$  介子构成一个同位旋三重态。强相互作用对于交换三种  $\pi$  介子具有对称性, 这就相当于矢量  $I$  在同位旋空间旋转任意角度时, 强作用力不变。波函数  $\phi$  同样可视为同位旋空间的矢量, 在同位旋空间的上述转动变换下,  $\phi$  按  $SU(2)$  群的三维幺正表示  $D^1$  变换。

$$\phi_{i'} = \sum_k^3 b_{jk} \phi_k \quad j=1, 2, 3 \quad (10.4.16)$$

其中, 系数  $b_{jk}$  满足如下行、列正交条件:

$$\begin{aligned} \sum_j^3 b_{kj} b_{lj} &= \delta_{kl} \\ \sum_j^3 b_{jk} b_{jl} &= \delta_{kl} \end{aligned} \quad k, l=1, 2, 3 \quad (10.4.17)$$

除了核子的同位旋二重态和  $\pi$  介子的同位旋三重态以外, 还有许多强子的同位旋单态和多重态。

如上所述, 核子与  $\pi$  介子相互作用的理论应具有  $SU(2)$  协变性。除此以外, 这一理论当然还应具有 Lorentz 协变性。因此,  $\mathcal{L}_I$  在  $SU(2)$  群的变换下和 Lorentz 变换下都应当是一个不变量。据此, 从简单性考虑, 可取  $\mathcal{L}_I$  为如下的形式:

$$\mathcal{L}_I = iG\bar{\Psi}\gamma_5\bar{\tau}\Psi \cdot \Phi \quad (10.4.18)$$

其中, 与  $\Psi$  相乘的  $\gamma_\mu$  和  $\gamma_5$  应理解为如下形式:

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} \gamma_5 & 0 \\ 0 & \gamma_5 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_4 = (\psi_p^\dagger \gamma_4 \quad \psi_n^\dagger \gamma_4)$$

$$\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$$

相互作用场系统的 Lagrange 函数密度为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_I \quad (10.4.19a)$$

其中,  $\mathcal{L}_N$  为自由质子场的  $\mathcal{L}_p$  与自由中子场的  $\mathcal{L}_n$  之和。

$$\mathcal{L}_N = -\bar{\Psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + M)\Psi = -\bar{\psi}_p(\gamma_\mu \partial_\mu + M)\psi_p - \bar{\psi}_n(\gamma_\mu \partial_\mu + M)\psi_n \quad (10.4.19b)$$

$\mathcal{L}_\pi$  是所有  $\mathcal{L}_{\phi_j}$  之和, 即

$$\mathcal{L}_\pi = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi \cdot \partial_\mu \Phi + m^2 \Phi \cdot \Phi) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (\partial_\mu \phi_j \cdot \partial_\mu \phi_j + m^2 \phi_j \cdot \phi_j) \quad (10.4.19c)$$

利用式 (10.4.14) 和式 (10.4.16) 不难验证  $\mathcal{L}_N$  和  $\mathcal{L}_\pi$  的  $SU(2)$  不变性。根据第 3 章的讨论,  $\mathcal{L}_N$  和  $\mathcal{L}_\pi$  具有显示的 Lorentz 不变性。再利用式 (10.4.14), 可以证明任  $\bar{\Psi}\bar{\tau}\Psi$  在  $SU(2)$  变换下像同位旋空间矢量  $\Phi$  一样地变换。因此,  $\mathcal{L}_I$  是两个同位旋空间矢量的标积, 因而是一个同位旋空间的标量 (即  $SU(2)$  交换下的不变量); 另一方面可把  $\mathcal{L}_I$  写为如下形式:

$$\mathcal{L}_I = i \sum_j^3 G(\bar{\psi}_p \quad \bar{\psi}_n) \gamma_5 \tau_j \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \Phi_j \quad (10.4.20)$$

此式右边是形如下面的一些 Yukawa 项的和:

$$iG\bar{\psi}_p\gamma_5\psi_p\phi_j, \quad iG\bar{\psi}_n\gamma_5\psi_p\phi_j, \quad iG\bar{\psi}_p\gamma_5\psi_n\phi_j, \quad iG\bar{\psi}_n\gamma_5\psi_n\phi_j$$

由于每一项都是两个 Lorentz 赝标量的乘积, 所以  $\mathcal{L}_I$  是一个 Lorentz 标量。综上所述, 式 (11.4.18) 中的  $\mathcal{L}_I$ , 就是所要寻找的相互作用项。从式 (11.4.19) 中的  $\mathcal{L}$  出发可以建立起一个同时具有以上两种协变性的强作用理论。但是,  $\mathcal{L}_I$  的正确性最终还要通过实验事实来判断。

## 10.5 夸 克

### 10.5.1 夸克的味

轻子存在三代，即  $e, \mu, \tau$ 。类似于轻子，夸克这种轻子场也存在相应的三代。如图 10.5.1 所示， $A$  为夸克中心点的场质，和轻子不同的是，轻子中心点存在一份完整的游离态的场基本单元（或者为一份完整基本单元空穴场质），而夸克的中心点存在的场质是分数态而非整数态的场基本单元（或空穴），这种非整数态的场质是不能独立地存在于三维空间中的。和轻子的代的原理一致，当场质  $A$  形变达到形变极限时，轻子场存在静质量且为最低能态，此时轻子场电荷为分数电荷，为夸克的第一代，空间形变量为  $\Delta x^1$ 。

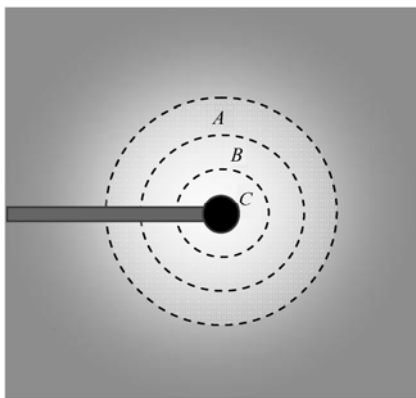


图 10.5.1 夸克的代

在夸克第一代形变的基础上，外层  $B$  的场基本单元再次形变，也达到形变极限（ $A, B$  均达到形变极限），空间形变量为  $\Delta x^2$ ，此时  $A$  的游离态场质的量没有改变，所以电荷值不变，为夸克第二代。显然第二代夸克四动量变大，静质量明显大于第一代夸克。

对于第三代来说是，在夸克第二代形变的基础上， $A, B, C$  均达到形变极限，电荷值不变，但静质量大于第二代，空间形变量为  $\Delta x^3$ 。

本章前面的表 10.0.1 列出了夸克代。在表 10.0.1 中，相应的反粒子并未列出。和以前的分类不一样的是这里并没有考虑中微子，因为中微子为非完备的三维轻子场，而夸克是三维轻子场。

由于夸克内禀结构和电子一致，因而可以直接写出不同夸克代的质量关系式：

$$m_i c = \frac{h_f}{\phi_{\min} \cdot \exp[A \cos \sum_{n=1}^n \theta_i]}$$

上述公式不足之处在于参数是可调的，可喜的是该公式的曲线的确刻画了轻子和夸克代之间的质量关系。值得注意的是上式采用  $10^2 \text{MeV}$  作为单位，这个单位表达粒子的能量是恰当的。

夸克的轻子场形态称为味，夸克轻子场的形态不同构成夸克味的不相同。

## 10.5.2 夸克的颜色

在 QCD 中, 夸克有三种“颜色”, 分别定义为红、绿、蓝。颜色作为一种自由度在 QCD 中没有更深的解释, 现在在场理论来解释颜色自由度的物理本质。现在来看一个一般的重子结构, 如图 10.5.2 所示, 在这个结构中, 颜色的本质就是维度的能级状态。

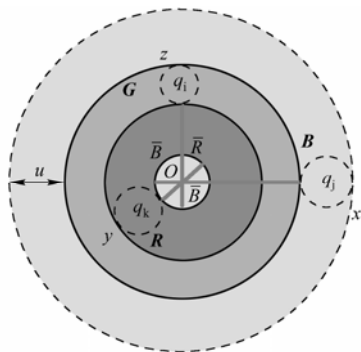


图 10.5.2 夸克的颜色

$x, y, z$  的维度以  $O$  点为坐标中心, 场质维度分裂后指向外的维度, 换成名称为  $R$  (红)、 $G$  (绿)、 $B$  (蓝) 的三种颜色态。这里要特别强调的是维度的反色态本身并不存在, 之所以存在这样的结果因为探测粒子探测到了。但探测到的未必真实存在, 之所以这样, 是由于探测粒子进入到核子内禀空间扰动后, 探测粒子看到了反色态维度。同样, 反夸克也是探测粒子进入到核子内禀空间扰动后产生的结果。如果仍以  $O$  点为坐标中心, 与维度的方向相反, 那么向内便构成  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  反三维空间, 并称这样的维度为反色态。于是可以把单独的一维  $x$  弦理解为  $\bar{R}, \bar{G}, \bar{B}$  由  $\bar{R}-R$  所张成的弦。 $\bar{R}, \bar{G}, \bar{B}$  由外向内汇集于  $O$  点。和介子不同的是  $\bar{R}-R$  维、 $\bar{G}-G$  维、 $\bar{B}-B$  维弦是不可分的, 必须构成三维态才满足场基本单元的不可分的要求。当三维弦连接在一起, 这三维弦的能级是不一样的。能级越高, 则弦张力越大, 相应的长度就越大; 能级最小, 则弦的长度应该最短。这些能级相对只有三种态, 即大、中、小。而这些能级很难完全相同, 总会存在差异。于是可以这样规定, 即三个维度的能级态对应  $R, G, B$  三种颜色态。

由于三种颜色态对应的是三个维度的三个能级。对于强子体系而言, 强作用的胶子不会跑出强子体系, 因而体系能量守恒, 所对应的就是颜色守恒, 表示为

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10.5.1)$$

在重子内禀空间内, 谈论  $x, y, z$  的维度是毫无意义的, 于是可以把能级最高态即弦最长的维规定为  $B$  态, 弦最短的维规定为  $R$  态, 而介于中间的则规定为  $G$  态。当然这种规定是人为的, 换一种规定并不影响物理结果和物理意义。

处于  $R$  维度上的夸克具有  $R$  态, 类似地有  $G, B$  态夸克, 但是某一夸克不可能同时处于  $R, G, B$  态, 只可能处于其中某一态。

强作用是夸克在弦之间进行四动量交换的过程。当任意两个夸克发生强相互作用时, 例如  $B$  夸克和  $G$  夸克发生强作用,  $G$  夸克通过胶子将能量传递给  $R$  夸克, 则原  $G$  夸克能级变低, 弦变长。胶子改变了弦的长度状态, 于是两种夸克就发生了颜色互换, 用费曼图表示的结果如图 10.5.3 所示。

夸克和胶子在两种情况下不发生相互作用, 一是将夸克变为另一种夸克, 即改变夸克的味; 二是导致整体颜色不守恒, 例如输入的是  $R$  和  $B$ , 但输出的是  $G$  和  $B$ , 该过程不可能发生, 对应的物理事实是输入的是  $R$  和  $B$  能级, 输出的是  $G$  和  $B$  能级,  $G$  能级大于  $R$  能

级，于是体系能量凭空增加，违反能量守恒。

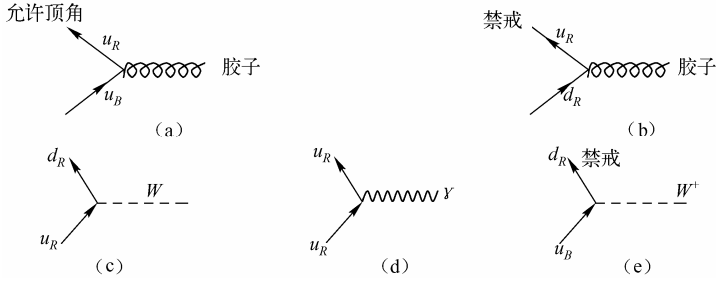


图 10.5.3 夸克和玻色子作用的费曼图

电磁弱作用是发生在轻子场本身的作用，轻子无维度分裂，即和三维弦无关，因而不改变颜色。在场理论中，夸克和弦是密不可分，是由两份基本单元（游离态和非游离态）场拓扑形变而形成的三维弦结构的场，场的三维基本属性使夸克和色不可能独立存在。如图 10.5.2 所示，质子可写为

$$p \sim \sum \varepsilon_{ijk} u_i u_j d_k \quad (10.5.2)$$

$i, j, k$  取 1, 2, 3, 为色（能级）的状态。

对于介子来说，它是一维弦结构的场，不存在颜色的问题，所以可以（如  $\pi^+$  介子）表示为

$$\pi^+ \sim u\bar{d} \quad (10.5.3a)$$

在 QCD 中，把重子的三色概念进行了引申，把  $\pi^+$  介子表示为

$$\pi^+ \sim \sum_i u_i \bar{d}_i \quad (10.5.3b)$$

$i$  取  $R, G, B$  三种态，而  $R+G+B$  为无色态，这样就消除了色单态存在的可能性。在场论中，颜色态的概念只限于强子中的夸克，而介子这样做没有必要。当然这样做后，无色态也不影响实验观测结果，和场论中不引入色概念的结论一致。

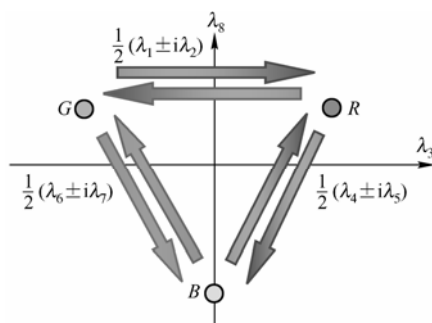
对于夸克来讲，仅限于强子内部胶子传递能量是交换颜色态。可以以三种颜色态填充  $SU(3)$  群的基础表示。 $SU(3)$  群的基础表示是三重态。在这个表示中，生成元是  $3 \times 3$  矩阵，习惯上写为  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, 8)$ ，称为盖尔曼（Gell-Mann）矩阵，其中，

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

它们共同的本征矢为  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。图 11.5.4 画出了  $SU(3)$  中 6 个生成元的升降算符。

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  对应三个泡利矩阵。盖尔曼矩阵有如下对易关系：

图 10.5.4  $SU(3)$  中 6 个生成元的升降算符

$$\left[ \frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2} \right] = i \sum_k f_{ijk} \frac{\lambda_k}{2} \quad (10.5.4)$$

其中，结构常数  $f_{ijk}$  是全反对称的，不为 0 的有

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1 \\ f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f_{147} &= f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

这些矩阵也满足反对称关系，即

$$\left\{ \frac{1}{2} \lambda_i, \frac{1}{2} \lambda_j \right\} = \frac{1}{3} \delta_{ij} + d_{ijk} \left( \frac{1}{2} \lambda_k \right)$$

其中， $d_{ijk}$  对交换任意两个指标是全对称的。

$$\begin{aligned} d_{118} &= d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ d_{146} &= d_{137} = d_{236} = d_{344} = d_{355} = \frac{1}{2} \\ d_{247} &= d_{366} = d_{377} = -\frac{1}{2} \\ d_{448} &= d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

重子内的各种味的夸克 ( $u, d, s$  等) 都有三种颜色:  $R, G$  和  $B$ 。夸克是色  $SU(3)$  群的三重态。与味  $SU(N)$  对称性不同，味对应的是极化态，极化态的本质对应场应变，不同夸克轻子场的组合所构成的重子的总应变不是简单的加减，而是非线性的。换言之，轻子场的代不能精确确定其质量，因而味的  $SU(3)$  对称性是不精确的；而色  $SU(3)$  对称性是精确的。在 QCD 中给出了优美的表述。传递色相互作用的胶子有 8 种不同的色组合，分别是  $R\bar{G}, R\bar{B}, G\bar{R}, G\bar{B}, B\bar{R}, B\bar{G}, \frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{R} - G\bar{G}), \frac{1}{\sqrt{6}}(R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B})$ ，这就是  $SU(3)$  八重态。还有一

个  $SU(3)$  色单态  $\frac{1}{\sqrt{3}}(R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B})$ , 它不能传递色相互作用。

### 10.5.3 强耦合常数 $\alpha_s$

两个夸克间的电磁耦合常数与场纤量相关, 耦合强度为  $e_1 e_2 \alpha$ , 其中,  $e_i$  为电荷 ( $e_i = 2/3$  或  $-1/3$ ),  $\alpha$  为精细结构常数。类似地, 在 QCD 中, 两个色荷间单胶子交换的强耦合强度为  $\frac{1}{2} c_1 c_2 \alpha_s$ , 其中,  $c_1$  和  $c_2$  为与顶点相联系的色系数, 习惯上称

$$C_F \equiv \frac{1}{2} |c_1 c_2| \quad (10.5.5)$$

为色因子。现在先来考虑一下  $\alpha_s$  而暂不考虑  $C_F$ 。

第 5 章对电磁耦合常数进行过分析和估算, 现在以同样的原理来分析强作用的耦合常数。在场中, 两夸克相互作用是通过弦作为通道交换胶子来实现四动量的传递的。对于一个夸克来说, 它总是和弦构成一体而密不可分的, 在高能态时, 弦的长度拉得很细, 弦细到接近场纤时, 在强子内禀空间内, 强作用的通道只有  $1/3$  基本单元的场质, 通道宽为  $1/3$ , 作用最弱。所以对于单夸克来说, 形成通道的概率为  $1/3$ , 比电磁耦合的情况要简单得多。夸克只有一根弦, 不考虑空间因素, 两夸克相互作用的概率为 (即耦合常数)

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = 0.111 \quad (10.5.6)$$

由此得到强作用的耦合常数有可能的最小值为 0.11, 而强作用的耦合常数在 QCD 中定义为  $\frac{1}{2} c_1 c_2 \alpha_s$ , 系数  $\frac{1}{2}$  是 QCD 遗留下来的, 这里仍然遵从以前的习惯, 因此估算值要乘以 2, 即  $\alpha_s = 0.22$ 。在量色动力学微扰论中, 对于大  $Q^2$  近距离相互作用, 这时  $\alpha_s$  很小, 实验数据表明  $\alpha_s \approx 0.22$ , 和估算值是一致的。

这里要特别注意的是: 当耦合常数  $\alpha \ll 1$  时, 量子场论微扰论计算才有效。由于单通道场纤维 (即弦) 耦合才使得耦合常数  $\alpha \ll 1$ , 因而在强子内禀空间中, 夸克弦耦合是量子场论用费曼图来进行微扰计算的前提条件。若探测粒子动量不大, 无法穿透强子, 强子作为一个整体, 耦合常数  $\alpha$  变大 ( $>1$ ), 则微扰论失效。

和 QCD 一样, 色因子  $|c_1 c_2|$  可以通过胶子的 8 种不同的色组合形式计算得出, 其结果如下:

$$-\alpha \rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \alpha_s, & \text{介子} \\ -\frac{2}{3} \alpha_s, & \text{重子} \end{cases} \quad (10.5.7)$$

这里的介子并无色概念, 引入色概念, 可以认为颜色是三种能级状态。能级不同, 夸克之间的弦长也不同, 耦合强度也不一样, 表现为色因子不同。

## 10.6 胶子

胶子是由弦和弦内波两部分构成的。弦把夸克紧紧连接在一起而组成介子和重子。夸克之间传递动量是通过弦内的波动来进行的。一维波表现出强作用, 改变夸克的颜色, 但不



改变味, 这种波动还改变弦的长度, 因而带有颜色量子数, 不带味量子数。

### 10.6.1 考虑某根弦内的波

对于弦来说, 它是一根细而长的弹性场, 弦的粗细是均匀的。当某一维弦上的夸克振动时, 就会压缩弦, 弦截面发生微小的纵向位移, 那么它的邻近部分就将产生拉伸或压缩。这种微小的纵向位移及拉压应力就会以纵波的形式向远处传播, 则弦的纵向位移可用一维波动方程来描述。如图 10.6.1 所示, 沿弦轴向建立坐标  $x$ , 夸克中心点在弦轴向的位移为  $u$ , 弦的弹性模量为  $E$ , 密度为  $\rho$ , 弦的截面积为  $A$ , 考虑长为  $dx$  的微元, 可得运动方程为

$$AE \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) - AE \frac{\partial u}{\partial x} = A\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

或者

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10.6.1)$$

其中,

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (10.6.2)$$

这里的  $c$  是波在弦中的传播速度。这个速度是在形变场内的传播速度, 应为光速。要注意的是  $E$  和  $\rho$  是经典概念, 并不适用于场理论, 这里仅作为一种借用。波动方程 (10.6.1) 的一般解为

$$u = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (10.6.3)$$

这种解称为波动方程的达朗贝尔解。其中函数  $f$  与  $g$  必须由边界条件和初始条件确定。考虑  $f(x - ct)$  这一部分。若取以速度  $c$  沿  $x$  正方向移动的坐标轴  $\xi$ , 则动坐标  $\xi$  与固定坐标  $x$  之间的关系为

$$\xi = x - ct$$

于是得到

$$f(x - ct) = f(\xi)$$

这表明, 在动坐标系中, 函数的值取决于坐标  $\xi$ , 而与时间  $t$  无关, 即函数的图形相对于动坐标保持不变。因而  $f(x - ct)$  表示一个以速度  $c$  向  $x$  正方向移动且保持形状及大小不变的行波。同理,  $g(x + ct)$  表示一个以速度  $c$  向  $x$  负方向传播的行波。

如图 10.5.2 所示, 处于  $B$  态的夸克  $q_j$  向中心  $O$  点压缩弦, 压缩量为  $u$ , 放出一份波  $f(x - ct)$ , 由  $B$  态降为  $G$  态, 而原  $G$  态夸克  $q_i$  吸收一份波  $f(x + ct)$ , 由  $G$  态升为  $B$  态, 夸克  $q_j$  和夸克  $q_i$  颜色态互换。这里要特别注意的是  $f(x - ct)$  是一份孤立波。对式 (10.6.3) 求  $t$  偏导数, 可求得夸克向下或向上跃迁的速度:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial u}{\partial t} = -cf'(x - ct) + cg'(x + ct) \\ &= -cf'(\xi) + cg'(\eta) \end{aligned} \quad (10.6.4)$$

将式 (10.6.3) 对  $x$  求偏导数, 可得弦中的应变:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - ct) + g'(x + ct) \quad (10.6.5)$$

其中,  $f'$  和  $g'$  分别是对各自自变量的导数。

胶子波带有颜色量子数，在 QCD 中用如图 10.6.2 所示的费曼图来表述。

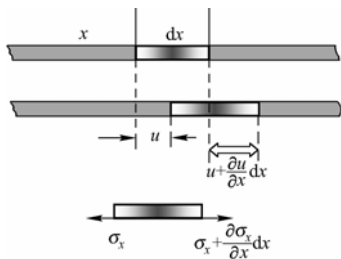


图 10.6.1 弦的波动

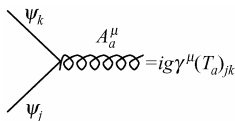


图 10.6.2 胶子波的费曼图

## 10.6.2 弦及夸克海

### 1. 弦

胶子是由弦和弦上的波动共同构成的。胶子的弦除了传递波以外，还直接传递力，使场存在三顶点作用。正是由于三顶点作用才使得 QCD 理论具有渐近自由性质。费曼图如图 10.6.3 所示。

$$-gf_{abc}[g_{ab}(p_1 - p_2)_\gamma + g_{\beta\gamma}(p_2 - p_3)_\alpha + g_{\gamma\alpha}(p_3 - p_1)_\beta]$$

在场中，由于强子内部只有三根弦，所以不存在胶子 4 点自相互作用，只有 4 个夸克在一起才存在 4 胶子相互作用。

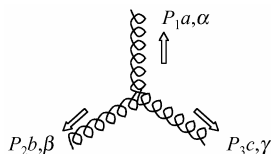


图 10.6.3 三弦自相互作用的费曼图

### 2. 夸克海

根据中微子（和  $e, \mu$  等轻子）和核子非弹性散射的实验数据，我们对核子内禀空间有了更具体的了解。结构函数具有近似的标度无关性，表明质子内部存在类点粒子，这些粒子被称为部分子。

质子由各种类型的“类点”部分子组成（ $i = u, d, \dots$ ，相应的电荷为  $e_i$ ，当然还有胶子）。现在引入部分子动量分布，即受撞部分子  $i$  携带质子动量  $p$  的份额为  $x$  的几率。

$$f_i(x) \frac{dp_i}{dx} = p \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} xp \\ (1-x)p \end{array} \right. \quad (10.6.6)$$

所有的份额相加，和为 1，即

$$\sum_{i'} \int dx x f_{i'}(x) = 1 \quad (10.6.7)$$

这里  $i'$  对应所有部分子。式中，

$$x = \frac{1}{\omega} = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (10.6.8)$$

其中， $Q^2 = -q^2$  为四动量转移； $\nu = E - E'$ ， $E$  和  $E'$  分别为探测粒子的初态和末态能量； $M$  为质子质量。核子的结构函数  $F_2(x)$  等于核子内部具有动量为  $xp$  的部分子的几率  $f(x)$  和  $x$

的乘积, 即

$$F_2(x) = xf(x) \quad (10.6.9)$$

大  $Q^2$  时电子散射获得质子非弹性结构函数, 相应的算式为

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} F_2^{ep}(x) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] \\ &+ \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \end{aligned} \quad (10.6.10)$$

由电子散射获得中子非弹性结构函数, 相应的算式则为

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} F_2^{en}(x) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^n(x) + \bar{u}^n(x)] \\ &+ \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^n(x) + \bar{d}^n(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^n(x) + \bar{s}^n(x)] \end{aligned} \quad (10.6.11)$$

共有 6 个未知的夸克结构函数。

$$\begin{aligned} u^p(x) &= d^n(x) \equiv u(x) \\ d^p(x) &= u^n(x) \equiv d(x) \\ s^p(x) &= s^n(x) \equiv s(x) \end{aligned} \quad (11.6.12)$$

质子有三个价夸克  $u_v, u_v, d_v$ , 再加上夸克—反夸克对的夸克海。

$$\begin{aligned} u_s(x) &= \bar{u}_s(x) = d_s(x) = \bar{d}_s(x) = s_s(x) = \bar{s}_s(x) = S(x) \\ u(x) &= u_v(x) + u_s(x) \\ d(x) &= d_v(x) + d_s(x) \end{aligned} \quad (10.6.13)$$

其中,  $S(x)$  为所有夸克味公有的海夸克分布。对所有给出贡献的部分子求和, 必须用到质子的量子数, 电荷为 1, 重子数为 1, 奇异数为 0, 由此要求

$$\begin{aligned} \int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx &= 2 \\ \int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx &= 1 \\ \int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] dx &= 0 \end{aligned} \quad (10.6.14)$$

把式 (10.6.13)、式 (10.6.10) 和式 (10.6.11) 合在一起, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} F_2^{ep} &= \frac{1}{9} [4u_v + d_v] + \frac{4}{3} S \\ \frac{1}{x} F_2^{en} &= \frac{1}{9} [u_v + 4d_v] + \frac{4}{3} S \end{aligned} \quad (10.6.15)$$

其中,  $4/3$  是对 6 种海夸克分布的  $e_i^2$  求和的结果。由于海中的夸克—反夸克对由胶子产生, 现在期望在小  $x$  时,  $S(x)$  有类韧致辐射的谱, 于是当  $x \rightarrow 0$  时, 海夸克的数目将呈对数增长, 对于给定的  $Q^2$ , 当  $x \rightarrow 0, \nu \rightarrow 0$  时, 若虚光子和质子总截面为常数, 则有  $f_i(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1/x$ , 在小  $x$  时, 部分子的数目呈对数增长。值得注意的是, 在小动量 ( $x \approx 0$ )

时, 三个价夸克将被形成海  $S(x)$  多重的低动量的  $q\bar{q}$  对遮蔽。根据式 (10.6.15), 有

$$\frac{F_2^{\text{en}}(x)}{F_2^{\text{cp}}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad (10.6.16)$$

实验数据证实了这个结论。另一方面, 在大动量 ( $x \approx 1$ ) 时, 以高速的价夸克为主, 有

$$\frac{F_2^{\text{en}}(x)}{F_2^{\text{cp}}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{u_v + 4d_v}{4u_v + d_v} \quad (10.6.17)$$

对于质子, 在大  $x$  时显然有  $u_v \gg d_v$ , 式 (10.6.16) 的比值趋近于 1/4。

利用  $F_2^{\text{cp}}$  和  $F_2^{\text{en}}$  的实验数据积分, 得到:

$$\begin{aligned} \int dx F_2^{\text{cp}}(x) &= \frac{4}{9} \varepsilon_u + \frac{1}{9} \varepsilon_d = 0.18 \\ \int dx F_2^{\text{en}}(x) &= \frac{1}{9} \varepsilon_u + \frac{4}{9} \varepsilon_d = 0.12 \\ \varepsilon_g &\approx 1 - \varepsilon_u - \varepsilon_d \end{aligned} \quad (11.6.18)$$

由此得到  $\varepsilon_u = 0.36$ ,  $\varepsilon_d = 0.18$ ,  $\varepsilon_g = 0.46$ 。由此可见,

胶子大约携带了 50% 的动量。

根据实验, 得到的结构函数具有近似的标度无关性,  $F_2(x, q^2) \approx F_2(x)$ , 这表明核子内部包含类点狄拉克粒子。

这种组元具有自旋量子数 1/2;  $2xF_1(x) \approx F_2(x)$ 。还可以证明这些组元具有分数电荷。这些都和夸克模型一致。对这些部分量子数的研究, 能够把它们与夸克等同起来。

核子中约有 10% 的反夸克存在, 主要分布在小  $x$  范围内。更详细的实验结果表明, 核子内部的反夸克主要分布在  $x < 0.3$  范围之内, 如图 10.6.4 所示。

要特别注意的是, 这里 10% 左右的反夸克只存在于被探测的质子中, 对于未被探测到的质子并不存反夸克。这里的反夸克是由于探测粒子进入到核子内禀空间后扰动激发所产生的效应。换言之, 探测粒子所看到的并不真实存在。

夸克只占核子动量的一半, 其余一半由胶子占有, 胶子传递夸克间的强相互作用, 改变夸克的颜色<sup>①</sup>。质子动量中相当大的份额被中性部分子所携带, 而不是夸克。这些中性部分子就是QCD中的胶子, 它们不与光子发生相互作用。

从质子结构来看, 构成胶子的弦是有静质量的, 满足式 (10.3.3), 弦上的波无静质量, 但有动量。处于波动状态的弦就是胶子, 其总动量占核子动量的一半。探测粒子与不带电荷的弦作用, 其结果是探测到中性部分子。

质子总的场形变由三部分构成: 夸克场应变、场基本单元维度分裂构成的弦的应变和内禀空间向质子中心点区应变的场。这三部分场应变构成了质子内禀空间的场应变。

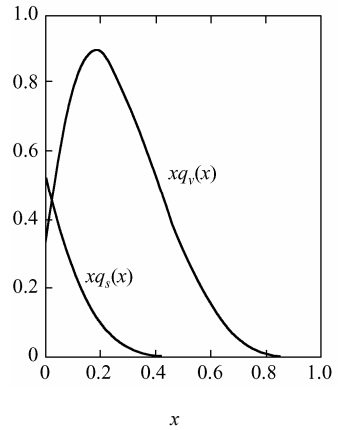


图 10.6.4 质子内禀空间的动量分布

① 章乃森, 粒子物理学下册, p256.

在这里感兴趣的是粒子海。所有基本粒子受到扰动都激发出与之相对应的粒子海，于是受扰动的真空中便有了基本粒海，真空结构就变得非常复杂。

对于平静的真空场来说，量子场的传播本身就是一种扰动。探测粒子穿过强子内禀空间时，强子内禀场受到扰动（如图 10.6.5 所示），使得强子内部系统发生振动，弦都会发生振动，出现夸克海。于是探测粒子“看到了”质子内部存在反夸克。达到量子波反射条件，能产生大量的光子。

当探测轻子场在进入核子内禀空间内进行探测时，若探测粒子四动量  $p$  越大，则探测轻子场的体积越小，探测粒子本身对核子内禀场扰动越小，所探测到的夸克海的结构越精细。反之，探测到的夸克海的结构越粗糙。

强扰动时，作用力极强，则产生瞬态完整的由弦联结的游离态场基本单元和对偶完整的游离态基本单元空穴，形成介子态，包括虚介子态和实介子态（即大量  $K, \pi$  介子）。介子态的存在使得强耦合常数变大，成为一个复杂的函数。若扰动强大到使弦时断裂，可产生轻子对和夸克对。

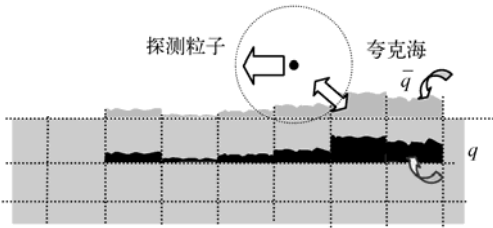


图 10.6.5 探测粒子扰动导致量子场的起伏

## 10.7 核子内禀空间场函数

### 10.7.1 核子真空内禀场函数

根据前面的讨论，现在要对质子和中子进行总结，先来考虑核子内禀空间场函数。强子可以视为一个整体，

$$\varphi[x(\xi(\sigma))] = \exp i \{ \Delta E t - \vec{p} \vec{x} + \varepsilon_Q g_{\mu\nu} \xi \}$$

其中， $\Delta E$  为强子整体动能， $\vec{p}$  强子整体动量， $\varepsilon_Q$  为三个夸克应变项， $g_{\mu\nu}$  为夸克背景空间度规。

对于夸克而言，它和轻子有完全相同的内禀结构，因而内禀空间场函数完全一致。上式描述了夸克具有的电荷及电磁场、静质量、自旋  $\hbar/2$ 、四动量。用  $\psi_q$  表示场函数。由于核子的三个夸克分别占据三个维度，核子本身有自旋。

对于处于静止状态的强子，四动量为零， $\varphi[x(\xi(\sigma))] = \exp(i\varepsilon_Q g_{\mu\nu} \xi)$ 。这里  $g_{\mu\nu}$  是夸克的背景时空。由于质量很小，不考虑引力效应，所以时空平直， $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ 。对于静止的强子而言，内禀空间是球对称应变，类比电子的情况，剪应变为零。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_Q g_{\mu\nu} \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{00} & \varepsilon'_{01} & \varepsilon'_{02} & \varepsilon'_{03} \\ \varepsilon'_{10} & (\varepsilon'_{11} + \varepsilon_{q1} + L_1) & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{20} & \varepsilon'_{21} & (\varepsilon'_{11} + \varepsilon_{q2} + L_2) & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{30} & \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & (\varepsilon'_{22} + \varepsilon_{q3} + L_3) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \quad (10.7.1)$$

这就是核子内禀空间场函数的完整表述形式。其中,  $\varepsilon_{q1}, \varepsilon_{q2}, \varepsilon_{q3}$  是核子内的三个价夸克。对于其中任意价夸克的内禀空间场函数  $\varepsilon_q$  为

$$\begin{aligned} \varepsilon_q = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mu\nu} \boldsymbol{\eta}_{\mu\nu} \boldsymbol{\xi} = & \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{00}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{能量 } p_0 \text{ 项}} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{动量 } p_1 \text{ 项}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{动量 } p_2 \text{ 项}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \\ & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}}_{\text{动量 } p_3 \text{ 项}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma^3 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix}}_{\text{静质量}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ 0 & -\varepsilon_{21} & 0 & -\varepsilon_{23} \\ 0 & -\varepsilon_{31} & -\varepsilon_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{夸克自旋项}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix} \\ & + \underbrace{\begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}}_{\text{标势、矢量项}} \begin{pmatrix} \sigma^0 \\ \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon'_{01} & -\varepsilon'_{02} & -\varepsilon'_{03} \\ \varepsilon'_{10} & 0 & -\varepsilon'_{12} & -\varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{20} & -\varepsilon'_{21} & 0 & -\varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{30} & -\varepsilon'_{31} & -\varepsilon'_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{电磁项}} \begin{pmatrix} \sigma^0 \\ \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix} \quad (10.7.2) \end{aligned}$$

空间分为三个层次:  $x$  是观测时空标架,  $\xi$  是强子内禀时空标架,  $\sigma$  是夸克内禀时空标架。将核子的应变场进行分解。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_Q = \begin{pmatrix} \varepsilon_{00} & \varepsilon'_{01} & \varepsilon'_{02} & \varepsilon'_{03} \\ \varepsilon'_{10} & (\varepsilon'_{11} + \varepsilon_{q1} + L_1) & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{20} & \varepsilon'_{21} & (\varepsilon'_{11} + \varepsilon_{q2} + L_2) & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{30} & \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & (\varepsilon'_{22} + \varepsilon_{q3} + L_3) \end{pmatrix} \quad (10.7.3)$$

分解后得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_Q = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}}_{\text{静质量项}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon'_{01} & \varepsilon'_{02} & \varepsilon'_{03} \\ \varepsilon'_{10} & 0 & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{20} & \varepsilon'_{21} & 0 & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{30} & \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{核子自旋项}} \quad (10.7.4)$$

强子主应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ii} = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}'_{ii}}_{\text{强子内禀背景空间主应变}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_{qi}}_{\text{夸克总应变}} + \underbrace{\boldsymbol{L}_i}_{\text{弦的应变}} \quad (10.7.5)$$

强子主形变量为

$$\boldsymbol{u}_i = \underbrace{\boldsymbol{u}'_{ii}}_{\text{强子内禀背景空间主形变}} + \underbrace{\boldsymbol{u}_{qi}}_{\text{夸克总形变}} + \underbrace{\boldsymbol{u}_{Li}}_{\text{弦的形变}}$$

强子自旋应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} - \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right)$$

可见，强子的自旋由多种成分构成，即强子自身内禀空间对强子总自旋有贡献，夸克和弦对强子总自旋也有贡献。回过头来看质子的自旋构成：

$$\frac{\hbar}{2} = \frac{\Sigma}{2} + L_q + L_G + \Delta G$$

其中， $\Sigma$  是全部夸克提供的百分比； $L_q$  是夸克轨道角动量的贡献，对应的是

$$\frac{\Sigma}{2} + L_q = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{qi}}{\partial \xi_j} - \frac{\partial u_{qj}}{\partial \xi_i} \right); \quad L_G \text{ 是胶子轨道角动量的贡献; } \Delta G \text{ 是胶子自旋贡献, 对应的是}$$

$$L_G + \Delta G = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_{ii} + u_{Li}}{\partial \xi_j} - \frac{\partial u'_{jj} + u_{Lj}}{\partial \xi_i} \right)。 \text{这就解释了所谓的“强子自旋危机”。}$$

### 10.7.2 量子色动力学的 $SU_c(3)$ 结构

由夸克构成的强子是没有颜色的（颜色态就是能级态）。也就是说夸克的能级被封闭在强子内禀空间中，夸克彼此之间存在能级差异，并有能级互换，但是体系本身是能量守恒的。能级之间互换满足  $SU_c(3)$  对称性。 $SU_c(3)$  是颜色对称性，为一种定域对称性。么正对称性是味道对称性，味道的改变导致强子的改变，么正对称性是整体对称性。

由整体规范对称扩展到定域对称，就意味着存在规范场。夸克具有  $SU_c(3)$  的定域对称性，就意味着  $SU_c(3)$  是一个定域规范群。它的群元素是

$$u(\theta) = \exp \left[ -i\theta^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2} \right] \quad (10.7.6)$$

其中， $\theta^\alpha(x)$  是与时空坐标有关的群参数， $\frac{\lambda^\alpha}{2}$  ( $\alpha=1,2,\dots,8$ ) 是三维表示的生成元。可以将  $\frac{\lambda^\alpha}{2}$  理

解为 8 个坐标基， $\theta^\alpha(x)$  是沿坐标基  $\frac{\lambda^\alpha}{2}$  理解的移动量。 $\lambda^\alpha$  是盖尔曼矩阵，满足如下对易关系：

$$\left[ \frac{\lambda^\alpha}{2}, \frac{\lambda^\alpha}{2} \right] = i f^{\alpha\beta\gamma} \frac{\lambda^\gamma}{2}, \quad \left[ \frac{\lambda^\alpha}{2}, \frac{\lambda^\alpha}{2} \right] = d^{\alpha\beta\gamma} \frac{\lambda^\gamma}{2} \quad (10.7.7)$$

$\lambda^\alpha$  的具体形式就是 10.5.2 节中的  $\lambda_i$ 。8 个坐标基就是弦的 8 个通道，每根弦上的移动产生一个波，这个波就是传递强相互作用的胶子场，有 8 个胶子场，它们的量子就是胶子。胶子场就是规范场。换言之，与 8 个生成元对应的是 8 个规范场  $A_\mu^\alpha(x)$  和

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + g f^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma \quad (10.7.8)$$

$A_\mu^\alpha(x)$  可称为规范势， $F_{\mu\nu}^\alpha(x)$  称为规范场强。

描写夸克和胶子及其相互作用的作用量是

$$S = \int d^4x [\bar{q}_\gamma (i\partial\delta_{ij} + g \frac{\lambda_{ij}^\alpha}{2} A_i^\alpha - m_i^r \delta_{ij}^{rs}) q_s^j - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\alpha\mu\nu}] \quad (10.7.9)$$

$$\psi_n(x) = \exp[-k_0 x_{0j}^i + \vec{k}\vec{x}_j^i + J_S x_{Sj}^i + e x_i^j + T l_i^\alpha x_{ij}^\alpha - m_i^r x_{ij}^{rs}]$$

## 10.8 质量荷塑性形变的弦模型理论

### 10.8.1 质量荷闭弦

前面介绍了轻子或夸克质量荷可以用点结构描述。更精细的研究可以研究质量荷的四维时空结构，还有一种研究方式就是将粒子内禀结构简化为二维时空结构。把闭弦  $\sigma(\tau, \sigma)$  理解为质量荷空间<sup>①</sup>。一维弦有两种存在形式：开弦和闭弦。

此时的质量荷形变函数为

$$u_m(\xi) = \alpha \exp[k_0 \xi^0(\tau, \sigma) - k \bar{\xi}(\tau, \sigma)]$$

开弦：  $\sigma^i(0) = \sigma^i(2\pi) = 0$ ,  $i = 0, 1$ , 描述夸克弦

闭弦：  $\sigma^i(\theta + 2\pi) = \sigma^i(\theta)$ ,  $i = 0, 1$ , 描述质量荷

$\alpha$  为时空塑性形变总量。所有 Fermi 子都是以传播的方式运动的，这和 Bose 子是一样的。塑性形变的质量荷也以波的形式存在。

质量荷是塑性变形，三维球对称形变内禀空间满足  $mc^2 \cdot R = h_f$ 。超过某一极限而发生维度分裂的塑性形变，质量荷的形状是开弦，但仍然满足该式。

对于运动粒子而言，  $p \cdot \lambda = h$  是永远成立的。因为维度具有独立性，粒子传播条件是达到形变极限（即刚好达到塑性变形），粒子沿传播方向是一维形变，一个维度无法约束粒子中心的点，因而无论应变大小，沿传播方向总能满足该式，  $\lambda$  为粒子的德布罗意波长。对于三维球形应变，当形变加大时，粒子质量荷无法沿传播方向逃走，换言之，三维约束使质量荷无处可逃，而不得不发生塑性形变，出现维度分裂效应，形成强子。

对于质量荷塑性变形，在没有发生维度分裂以前，质量荷的形状可以简化为一个小圆环，小圆环的半径是  $r$ ，时空总塑性形变量是  $T2\pi r$ ，就是粒子的静质量。质量荷的存在必然压弯内禀空间，于是有

$$mc^2 \cdot R = T2\pi r \cdot R = h_f \quad (10.8.1)$$

这种情况对应着轻子和夸克。轻子和夸克静质量越大，塑性形变越强，相应小圆环的半径  $r$  越大。小环的塑性形变沿自旋方向被拉长，成为更大的环，但内禀空间半径  $R$  却变小，如图 10.8.1 所示。

真空场理论中标量粒子荷波函数为

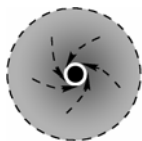


图 10.8.1 内禀空间的质量荷闭弦

① 真空场理论中质量荷的结构图像可参见本书第 7 章的内容。轻子质量荷的“点”结构和“环”结构等，都是为了理论简化和描述方便所采用的简化模型，相对于“点”结构而言，“线”结构更为高级。



$$\psi_m(\xi) = u \exp \left[ \frac{E_0}{\hbar_f} \xi^0(\tau, \sigma) - \frac{mc}{\hbar_f} \bar{\xi}(\tau, \sigma) \right] \quad (10.8.2)$$

这是弹性形变，为点粒子。对于时空维度  $\xi^\mu = x^\mu(\xi)$ ，上式可写为

$$\psi_m(\xi) = u \exp \left[ \frac{E_0}{\hbar_f} x^0(\tau, \sigma) - \frac{mc}{\hbar_f} \bar{x}(\tau, \sigma) \right] \quad (10.8.3)$$

轻子质量荷构成闭弦，满足

$$\sigma^i(\theta + 2\pi) = \sigma^i(\theta), \quad i = 0, 1, \quad \sigma^0 = \tau, \quad \sigma^1 = \sigma$$

该波函数描述了质量荷整体的运动性质，更精细的研究要考虑弦的运动性质。由  $mc^2 = T2\pi r$ ，质量荷波函数可以不必考虑内禀空间  $mc^2 \cdot R = \hbar_f$ ，而从塑性形变的角度来考虑。

$$u_m(\xi) = \alpha \exp[k_0 \xi^0(\tau, \sigma) - k_1 \bar{\xi}(\tau, \sigma)]$$

质量荷的塑性形变超出了前面真空场理论弹性研究的范畴，好在弦理论在这方面给出了深入的研究。

$$\psi_m(\xi) = u \exp[k_0 \xi^0 - k_1 \xi^1(\sigma)]$$

$$\xi^i(\sigma + 2\pi) = \xi^i(\sigma)$$

空间具有闭环对称性，直接把质量波函数写为

$$\psi_m(\xi) = u \exp[k'_0 \tau - k'_1 \sigma]$$

这样会使问题简化，但  $\xi^1$  为长度，而  $\sigma$  为角度，有必要用角度  $\sigma$  表示长度。

## 10.8.2 强子弦

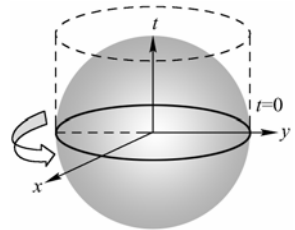
强子的维度分裂使强子具有开弦结构，强子在时空中传播的本质是弦的传播。对于核子而言，开弦就是红、绿、蓝三根弦，把三根弦归并为一根弦，这根弦为开弦。强子的质量，也可以视为弦，是闭弦。如果用二维时空结构来描述强子内禀结构，那么，强子内禀结构分为两部分：一部分是开弦，描述强子弦；另一部分是闭弦，描述强子质量。进行这样的分类后，强子的开弦视为无静质量弦，强子的总静质量归并在闭弦上。

### 1. 强子的质量与弦塑性形变

质量荷球具有四维时空结构，如果要用二维时空结构来描述，可以归并为一个质量环。弦是塑性形变的产物，只能用于描述有静质量的粒子，显然不能用于描述光子。强子的整体质量可以视为塑性形变的闭弦。

现在来看闭弦。如图 10.8.2 所示，闭弦初始结构为  $xy$  面上一个半径为  $R$  的圆环，其初速度  $\bar{v} = 0$ 。那么波动方程的解  $X^\mu = (t, x, y)$  满足如下的边界条件：

$$x = R \cos \frac{2\pi\tau}{l} \cos \frac{2\pi\sigma}{l} \quad (10.8.4)$$



质量荷被归并为一个质量闭环，质量环在时空中运动，其时间叶构成一个柱面。自旋波在质量环中传播，使质量环具有周期性

图 10.8.2 质量元构成的闭环

$$y = R \cos \frac{2\pi\tau}{l} \sin \frac{2\pi\sigma}{l} \quad (10.8.5)$$

$$t = \frac{2\pi R}{l} \tau \quad (10.8.6)$$

可验证一下约束条件:

$$\begin{aligned} \dot{X}^2 + X'^2 &= 0 \\ -\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - t'^2 + x'^2 + y'^2 & \end{aligned} \quad (10.8.7)$$

$$= -\left(\frac{2\pi R}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\pi R}{l}\right)^2 \sin^2 \frac{2\pi\tau}{l} + \left(\frac{2\pi R}{l}\right)^2 \cos^2 \frac{2\pi\tau}{l} = 0 \quad (10.8.8)$$

塑性形变弦的总能量为

$$P_0 = \int_0^1 d\sigma P_0^\tau = T \int_0^1 d\sigma \partial_\tau X_0 = T \int_0^1 d\sigma \partial_\tau t = \frac{2\pi RT}{l} \int_0^1 d\sigma = 2\pi RT = E \quad (10.8.9)$$

弦的长度是  $2\pi R$ ,  $T$  是单位长度的能量。

## 2. 自旋波对强子内夸克弦的影响

高角动量的强子是由自旋波造成的。对于低角动量而言, 只有一份自旋波, 自旋角动量为  $\hbar/2$ 。自旋波是量子场, 当低能级填满之后, 自旋波在更高的能级, 具有轨道角动量的性质 (这一特性类似于电子)。和最低能级自旋波不一样的是, 内侧电力线没有被封, 因而角动量为  $\hbar$  (关于自旋波可参见轻子自旋波)。当有两份自旋波时, 总的自旋角动量为  $3\hbar/2$ 。这里要强调的是, 强子自旋并非夸克和弦在转动, 而是自旋波效应, 如图 10.8.3 所示。

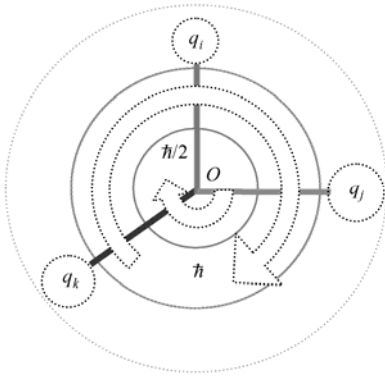


图 10.8.3 强子内的自旋波

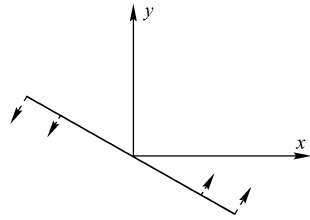


图 10.8.4 弦的转动

自旋波的存在使得我们可以反过来考虑问题, 为了方便分析问题, 可认为夸克弦在转动。前面已经说过强子的弦可以合并为一根弦。现在来考虑开弦在  $xy$  面上的转动, 如图 10.8.4 所示。波动方程的解为

$$x = R \cos \frac{\pi\tau}{l} \cos \frac{\pi\sigma}{l} \quad (10.8.10)$$

$$y = R \cos \frac{\pi\tau}{l} \sin \frac{\pi\sigma}{l} \quad (10.8.11)$$

$$t = \frac{\pi R}{l} \tau \quad (10.8.12)$$

弦上各点的速度为

$$\vec{v} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \frac{l}{\pi R} \left( \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau} \right) = \cos \frac{\pi \sigma}{l} \left( -\sin \frac{\pi \tau}{l}, \cos \frac{\pi \tau}{l} \right) \quad (10.8.13)$$

由上可得

$$\vec{v}^2 = \cos^2 \frac{\pi \sigma}{l} \quad (10.8.14)$$

在弦的两端  $\sigma = 0, l$ ，可知  $\vec{v}^2 = 1$ 。弦端点的传播速度为光速。因为弦无静质量，并且没有力作用在弦的端点（Neumann 边界条件）。弦的中间点速度小于光速。由前面可知弦的能量为

$$P_0 = TR\pi \quad (10.8.15)$$

算出弦的角动量为

$$\begin{aligned} J_{xy} &= T \int_0^l d\sigma (x \partial_a y - y \partial_a x) = T \int_0^1 d\sigma \frac{\pi R^2}{l} \left( \cos^2 \frac{\pi \tau}{l} \cos^2 \frac{\pi \sigma}{l} + \sin^2 \frac{\pi \tau}{l} \cos^2 \frac{\pi \sigma}{l} \right) \\ J_{xy} &= \frac{T\pi R^2}{l} \int_0^1 d\sigma \cos^2 \frac{\pi \sigma}{l} = \frac{1}{2} T\pi R^2 \end{aligned} \quad (10.8.16)$$

由总能量和角动量可得

$$\frac{J_{xy}}{E^2} = \frac{1}{2\pi T} = \alpha' \quad (10.8.17)$$

$\alpha'$  称为 Regge 斜率，如图10.8.5所示。现在，如果要让弦符合基本粒子，它们的角动量应符合粒子的角动量。其角动量为整数或半整数，这解释了具有维度分裂的强子自旋和质量的情况。

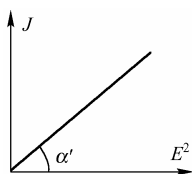


图 10.8.5 Regge 图

# 第 11 章 量子电动力学基本过程

量子电动力学是量子场理论的基础，内容很多<sup>①</sup>。本章通过一个例子来介绍电磁相互作用的协变微扰理论，即量子电动力学（QED）基本过程。在真空场理论中，粒子所有的内禀性质都可以归并于内禀中心点上，这样真空场理论退化为经典量子场论，本章将首先给出  $S$  矩阵元的动量空间费曼规则；接着举例计算微扰最低级近似下的康普顿散射截面，并从真空场的角度来讨论高价微扰论的发散困难和重整化。

## 11.1 QED 的微扰论和费曼规则

### 1. 非相对论性微扰理论

在低能情况下，在相互作用位势  $V(\vec{x}(\xi^\mu), t(\xi^0))$  内运动的粒子服从 Schrödinger 方程。

$$\begin{aligned}
 & \text{---} [H_0 + V(\vec{x}, t)]\psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} \text{---} \\
 & \quad \downarrow \text{求解} \\
 & \psi = \sum_n \frac{a_n(t)}{n} \varphi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t} \text{---} \\
 & \quad \downarrow \\
 & \text{因 } \psi\psi^* = |a_n|^2 \text{ 为相互作用波函数的几} \\
 & \text{率幅，求 } a_n(t) \text{ 的表达式} \\
 & \quad \rightarrow i \sum_n \frac{da_n}{dt} \varphi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t} = \sum_n V(\vec{x}, t) a_n \varphi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t} \\
 & \quad \quad \quad \times \varphi_f^*(\vec{x}) \\
 & \quad \quad \quad \downarrow \\
 & \frac{da_f}{dt} = -i \sum_n a_n(t) \int d^3x \varphi_f^* V(\vec{x}, t) \varphi_n(\vec{x}) e^{i(E_f - iE_n)t} \\
 & \quad \quad \quad \downarrow \\
 & a_n(-\frac{T}{2}) = \begin{cases} 1, & n = i \\ 0, & n \neq i \end{cases} \\
 & \quad \quad \quad \downarrow \\
 & \frac{da_f}{dt} = -i \int d^3x \varphi_f^* V(\vec{x}, t) \varphi_n(\vec{x}) e^{i(E_f - iE_n)t} \\
 & \quad \quad \quad \downarrow \text{积分} \\
 & a_f(t) = -i \int_{-T/2}^t dt' \int d^3x \varphi_f^* V(\vec{x}, t') \varphi_i(\vec{x}) e^{i(E_f - iE_i)t'}
 \end{aligned}$$

<sup>①</sup>量子电动力学过程的计算涉及一些基本知识，如费曼规则、跃迁几率、反应截面和衰变寿命和极化求和等知识。不熟悉的读者可以参看任何一本量子场理论的书籍，这里就不再累述。

$$S_{fi} \equiv a_f(T/2) = -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3x [\varphi_f e^{-iE_f t}]^* V(\vec{x}, t) [\varphi_i(\vec{x}) e^{-iE_i t}]$$

$$= \int d^3x \varphi_f^*(x) V(\vec{x}, t) \varphi_i(x)$$

上式只有在  $a_f(t) \ll 1$  时, 才有较好的近似。 $|S_{fi}|^2$  被解释为粒子从初态  $i$  散射到末态  $f$  的几率。考虑最简单的情况, 也就是  $V$  与时间无关的情况, 即  $V(\vec{x}, t) = V(\vec{x})$ , 则

$$S_{fi} = -i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \varphi_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}) \varphi_i(\vec{x})}_{=V_{fi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(E_f - E_i)t} = -i V_{fi} \cdot \underbrace{2\pi \delta(E_f - E_i)}_{\substack{\uparrow \\ \text{能量守恒}}}$$

在低能情况下, 粒子没有产生和湮灭, 属于量子力学的范畴。现在来考虑高能情况, 粒子存在产生和湮灭, 即为量子电动力学的范畴。在量子电动力学中, 利用费曼规则可以直接写出  $S$  跃迁矩阵元的表达式。

## 11.2 量子电动力学过程

### 11.2.1 电子的Rutherford散射

描述狄拉克粒子与光子之间电磁作用的有效拉氏量密度, 在洛伦兹规范下可表示为

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

其中,  $\mathcal{L}_0$  是自由狄拉克场和自由电磁场的拉氏量密度之和,  $\mathcal{L}_I$  为相互作用的拉氏量密度。

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2} \partial^\mu A_\nu \partial_\nu A^\mu$$

$$\mathcal{L}_I = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$$

现在来计算一个最简单的例子, 通过该例子了解 QED 求散射振幅的基本过程。电子在已固定的 Coulomb 势上的 Rutherford 散射, 如图 11.2.1 所示。

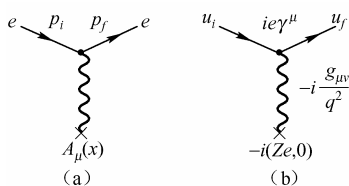


图 11.2.1 电子的 Rutherford 散射

$$S_{fi} = -ie \int d^4x \bar{\psi}_f(x) A(x) \psi_i(x) \quad (11.2.1)$$

式中,  $e < 0$  是电子电荷。 $\psi_i(x)$  被近似为一个具有动量  $p_i$ , 自旋  $s_i$  的电子的入射平面波  $\psi_i(x)$ 。

$$\psi_i(x) = \sqrt{\frac{m_0}{E_i V}} u(p_i, s_i) e^{-ip_i \cdot x} \quad (11.2.2)$$

$V$  表示归一化体积, 即  $\psi_i$  归一成在体积  $V$  的箱内的几率为 1。类似地, 出射波  $\bar{\psi}_f(x)$  表达式如下:

$$\bar{\psi}_f(x) = \sqrt{\frac{m_0}{E_f V}} \bar{u}(p_f, s_f) e^{i p_f \cdot x} \quad (11.2.3)$$

Coulomb 势  $A_0(x)$  由一个静点电荷  $-Ze$  产生, 从而有

$$A_0(x) = A_0(\mathbf{x}) = -\frac{Ze}{|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{A}(x) = 0 \quad (11.2.4)$$

在此假设下,  $S$  矩阵元 (11.2.1) 就成为

$$S_{fi} = iZe^2 \frac{1}{V} \sqrt{\frac{m_0^2}{E_f E_i}} \bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 \bar{u}(p_i, s_i) \int d^4x e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \quad (11.2.5)$$

可分离出对时间的积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 e^{i(E_f - E_i)x_0} = 2\pi\delta(E_f - E_i) \quad (11.2.6)$$

这个结果表明在时间无关势上的散射是能量守恒的。Coulomb 势  $A_0(x)$  的三维傅里叶变换为

$$A_0(\mathbf{q}) = -Ze \int d\mathbf{x}^3 \frac{1}{|\mathbf{x}|} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}$$

其中, 动量转移  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ , 利用分部积分可得

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x}^3 \frac{1}{|\mathbf{x}|} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} &= -\frac{1}{q^2} \int d\mathbf{x}^3 \frac{1}{|\mathbf{x}|} \Delta e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} = -\frac{1}{q^2} \int d\mathbf{x}^3 \left( \Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \\ &= -\frac{1}{q^2} \int d\mathbf{x}^3 (-4\pi\delta^3(\mathbf{x})) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} = \frac{4\pi}{q^2} \end{aligned} \quad (11.2.7)$$

从而  $S$  矩阵元 (11.2.5) 为

$$S_{fi} = iZe^2 \frac{1}{V} \sqrt{\frac{m_0^2}{E_f E_i}} \bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 \bar{u}(p_i, s_i) \frac{4\pi}{q^2} 2\pi\delta(E_f - E_i) \quad (11.2.8)$$

也可写为

$$S_{fi} = i2\pi\delta(E_f - E_i) e \bar{u}_f \gamma_\mu u_i \frac{1}{|q|^2} j^\mu(q)$$

现在要求出在动量范围  $d^3 p_f$  内的末态数  $dN_f$ , 它由下式给出

$$dN_f = V \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \quad (11.2.9)$$

这是因为在体积  $V = L^3$  的立方体箱中, 驻波需要满足

$$k_x L = n_x 2\pi, \quad k_y L = n_y 2\pi, \quad k_z L = n_z 2\pi$$

其中,  $n_x, n_y, n_z$  为整数, 对大  $L$ , 分立的一组  $k$  值趋于连续。态数为

$$dN = dn_x dn_y dn_z = \frac{L^3}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3p$$

现在就可以表述每个粒子到这些末态的跃迁几率。

$$\begin{aligned} dW &= |S_{fi}|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p \\ &= \frac{Z^2 (4\pi\alpha)^2 m_0^2}{E_i V} \frac{|\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 \bar{u}(p_i, s_i)|^2}{|q|^4} \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 E_f} (2\pi\delta(E_f - E_i))^2 \end{aligned} \quad (11.2.10)$$

这里令  $e^2 = e^2 / \hbar c = \alpha$ ,  $\alpha = 1/137$  为精细结构常数。现在来计算  $(2\pi\delta(E_f - E_i))^2$ , 由能量守恒  $\delta$  函数的平方的含义可得

$$(2\pi\delta(E_f - E_i))^2 = 2\pi\delta(0)2\pi\delta(E_f - E_i)$$

假定跃迁仅发生在有限时间间隔  $-T/2$  到  $T/2$  内, 则有

$$2\pi\delta(E_f - E_i) \Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E_f - E_i)t}$$

对  $E_f = E_i$ , 则有

$$\begin{aligned} 2\pi\delta(0) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} T \\ (2\pi\delta(E_f - E_i))^2 &= 2\pi\delta(0)2\pi\delta(E_f - E_i) = 2\pi T \delta(E_f - E_i) \end{aligned} \quad (11.2.11)$$

将上式代入每个粒子跃迁几率的表达式 (11.2.10) 中, 得到每个粒子在单位时间内到动量范围为  $d^3p_f$  的末态跃迁几率  $dR$ 。

$$dR = \frac{dW}{T} = \frac{4Z^2 \alpha^2 m_0^2}{E_i V} \frac{|\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i)|^2}{|q|^4} \frac{d^3p_f}{E_f} \delta(E_f - E_i) \quad (11.2.12)$$

散射截面被定义为每粒子单位时间的跃迁几率除以入射粒子流。

$$J_{\text{inc}}^\alpha = c \bar{\psi}_i(x) \gamma^\alpha \psi_i(x) \quad (11.2.13)$$

上标  $\alpha$  决定了沿入射粒子速度方向的流矢量分量。

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{E_i} \quad (11.2.14)$$

取沿  $z$  轴自旋极化的旋量, 速度方向平行于  $z$  轴的粒子流。

$$\begin{aligned} J_{\text{inc}}^\alpha &= c \bar{\psi}_i(x) \gamma^\alpha \psi_i(x) = c \frac{m_0 c^2}{E_i V} \bar{u}(p_i, s_i) \gamma^3 u(p_i, s_i) = c \frac{m_0 c^2}{E_i V} \gamma^0 u^*(p_i, s_i) \gamma^3 u(p_i, s_i) \\ &= c \frac{m_0 c^2}{E_i V} \frac{(E_i + m_0 c^2)}{2m_0 c^2} \left( 1, 0, \frac{p_i c}{E_i + m_0 c^2}, 0 \right) \gamma^0 \gamma^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_i c}{E_i + m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c \frac{m_0 c^2}{E_i V} \frac{(E_i + m_0 c^2)}{2m_0 c^2} \begin{pmatrix} 1, & 0, & \frac{p_i c}{E_i + m_0 c^2}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_i c}{E_i + m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= c \frac{m_0 c^2}{E_i V} \frac{(E_i + m_0 c^2)}{2m_0 c^2} \begin{pmatrix} 1, & 0, & \frac{p_i c}{E_i + m_0 c^2}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p_i c}{E_i + m_0 c^2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= c \frac{m_0 c^2}{E_i V} \frac{(E_i + m_0 c^2)}{2m_0 c^2} \begin{pmatrix} 1, & 0, & \frac{p_i c}{E_i + m_0 c^2}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p_i c}{E_i + m_0 c^2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$J_{\text{inc}}^\alpha = \frac{p_i c^2}{E_i} \frac{1}{V} \quad (11.2.15)$$

$$|J_{\text{inc}}| \stackrel{\text{式(11.2.14)}}{=} c^2 \frac{|\mathbf{v}_i|}{V} \quad (11.2.16)$$

式 (11.2.16) 的右边正是速度与体积之比, 这里假定了速度方向与  $z$  轴平行。考虑更一般的情况,

$$d\sigma = \frac{dR}{J_{\text{inc}}} = \frac{4Z^2 \alpha^2 m_0^2}{E_i V \frac{|\mathbf{v}_i|}{V}} \frac{|\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i)|^2}{|q|^4} \frac{p_f^2 d^3 p_f}{E_f} d\Omega_f \delta(E_f - E_i)$$

这里用到动量空间的体积元  $d^3 p_f = p_f^2 d|p_f| d\Omega_f$ 。散射粒子在单位立体角  $d\Omega_f$  内的微分截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{4Z^2 \alpha^2 m_0^2}{E_i |\mathbf{v}_i|} \frac{|\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i)|^2}{|q|^4} \frac{p_f^2 d^3 p_f}{E_f} \delta(E_f - E_i)$$

由  $E_f^2 = p_f^2 + m_0^2 \Rightarrow dE_f = |p_f| dp_f$  得

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{4Z^2 \alpha^2 m_0^2}{|q|^4} |\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i)|^2 \int_{\Delta p_f} \frac{|p_f| E_f \delta(E_f - E_i)}{E_i |\mathbf{v}_i| E_f} dE_f$$

由  $|\mathbf{p}_f|/E_i |\mathbf{v}_i| = |\mathbf{p}_i|/E_i |\mathbf{v}_i| \stackrel{\text{式(11.2.14)}}{=} |\mathbf{v}_i|/|\mathbf{v}_i| = 1$ ,  $\int_{\Delta p_f} \delta(E_f - E_i) dE_f = 1$  得

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{4Z^2 \alpha^2 m_0^2}{|q|^4} |\bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i)|^2 \quad (11.2.17)$$



$$\left| \bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i) \right|^2 \rightarrow \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = 1$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{4Z^2 \alpha^2 m_0^2}{|q|^4} \quad (11.2.18)$$

上式就是 **Rutherford** 散射截面。

在大多数实验中，无论是散射粒子的末态极化  $s_f$  还是初态极化  $s_i$ ，均不测量。所以，各种可能的初始极化态几率相同。实际测量的散射截面是对式 (11.2.17) 的末态极化  $s_f$  的求和及对初态极化  $s_i$  的平均。因而非极化散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{4Z^2 \alpha^2 m_0^2}{|q|^4} \frac{1}{2} \sum_{s_f, s_i} \left| \bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i) \right|^2 \quad (11.2.19)$$

对极化（自旋）有

$$\sum_{s_f, s_i} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f) \gamma_{\alpha\beta}^0 u_\beta(p_i, s_i) \bar{u}_\lambda^+(p_i, s_i) \gamma_{\lambda\delta}^{0+} \gamma_{\delta\sigma}^{0+} u_\sigma(p_f, s_f)$$

$$\stackrel{\gamma^{0+}=\gamma^0}{=} \sum_{s_f, s_i} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f) \gamma_{\alpha\beta}^0 u_\beta(p_i, s_i) \bar{u}_\delta(p_i, s_i) \gamma_{\delta\sigma}^0 u_\sigma(p_f, s_f) \quad (11.2.20)$$

对于任意一个算符  $\hat{\Gamma}$ ，有普遍规则

$$\left| \bar{u}(f) \hat{\Gamma} u(i) \right|^2 = \left( \bar{u}(f) \hat{\Gamma} u(i) \right) \left( \bar{u}(i) \hat{\Gamma} u(f) \right) \quad (11.2.21)$$

这里，

$$\hat{\Gamma} = \gamma^0 \hat{\Gamma}^+ \gamma^0$$

证明如下。

$$\begin{aligned} & \left( \bar{u}_\alpha(f) \hat{\Gamma}_{\alpha\beta} u_\beta(i) \right) \left( u_\gamma^+(i) \hat{\Gamma}_{\gamma\delta}^{0+} \gamma_{\delta\tau}^{0+} u_\tau(f) \right) \\ & \stackrel{\gamma^{0+}=\gamma^0}{=} \left( \bar{u}_\alpha(f) \hat{\Gamma}_{\alpha\beta} u_\beta(i) \right) \left( u_\gamma^+(i) \gamma_{\gamma\varepsilon}^0 \gamma_{\varepsilon\mu}^0 \hat{\Gamma}_{\mu\delta}^+ \gamma_{\delta\tau}^{0+} u_\tau(f) \right) \\ & = \left( \bar{u}(f) \hat{\Gamma} u(i) \right) \left( \bar{u}(i) \hat{\Gamma} u(f) \right) \end{aligned}$$

这里用了能量投影算符：

$$\hat{\Lambda}_\pm = \frac{\pm \boldsymbol{p} + m_0}{2m_0} \quad \text{或} \quad \hat{\Lambda}_r = \frac{\varepsilon_r \boldsymbol{p} + m_0}{2m_0} \quad (11.2.22)$$

现在可计算

$$\begin{aligned} \sum_{s_i} \bar{u}_\beta(p_i, s_i) \bar{u}_\delta(p_i, s_i) &= \sum_{\gamma, r=1}^4 \varepsilon_r \omega_\beta^r(p_i) \bar{\omega}_\gamma^r(p_i) \left( \frac{\boldsymbol{p}_i + m_0}{2m_0} \right)_{\gamma\delta} \\ &= \left( \frac{\boldsymbol{p}_i + m_0}{2m_0} \right)_{\beta\delta} = \left( \hat{\Lambda}_+(p_i) \right)_{\beta\delta} \end{aligned}$$

这里利用了狄拉克方程的性质：

$$\bar{\omega}^r(\boldsymbol{p} - \varepsilon_r m_0) = 0$$

$$\sum_{r=1}^4 \varepsilon_r \omega_\beta^r(p_i) \bar{\omega}_\gamma^r(p_i) = \delta_{\beta\gamma}$$

利用上述结构继续计算式 (11.2.20)。

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha, \sigma, \beta, \delta} \sum_{s_f, s_i} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f) \gamma_{\alpha\beta}^0 u_\beta \left( \frac{\sum_{s_i} (p_i, s_i) \bar{u}_\delta(p_i, s_i)}{\left( \frac{p_i + m_0}{2m_0} \right)_{\beta\delta}} \right) \gamma_{\delta\sigma}^0 u_\sigma(p_f, s_f) \\ &= \sum_{\alpha, \sigma} \sum_{s_f} \bar{u}_\alpha(p_f, s_f) u_\beta \left( \gamma^0 \frac{p_i + m_0}{2m_0} \gamma^0 \right)_{\alpha\sigma} u_\sigma(p_f, s_f) \\ &= \sum_{\alpha, \sigma} \sum_{s_f} \varepsilon_r \bar{\omega}_\alpha^r(p_f) u_\beta \left( \gamma^0 \frac{p_i + m_0}{2m_0} \gamma^0 \right)_{\alpha\sigma} \left( \frac{p_f + m_0}{2m_0} \right)_{\sigma\tau} \omega_\tau^r(p_f, s_f) \\ &= \sum_{\alpha, \sigma} \left( \gamma^0 \frac{p_i + m_0}{2m_0} \gamma^0 \right)_{\alpha\sigma} \left( \frac{p_f + m_0}{2m_0} \right)_{\sigma\alpha} \\ &= \text{Tr} \left[ \gamma^0 \frac{p_i + m_0}{2m_0} \gamma^0 \frac{p_f + m_0}{2m_0} \right] \end{aligned}$$

平均截面为

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} &= \frac{4Z^2 \alpha^2 m_0^2}{|q|^4} \left| \bar{u}(p_f, s_f) \gamma^0 u(p_i, s_i) \right|^2 \\ &= \frac{4Z^2 \alpha^2 m_0^2}{|q|^4} \text{Tr} \left[ \gamma^0 \frac{p_i + m_0}{2m_0} \gamma^0 \frac{p_f + m_0}{2m_0} \right] \end{aligned} \quad (11.2.23)$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \frac{4Z^2 \alpha^2 m_0^2}{2|q|^4} \left[ \text{Tr}(\gamma^0 p_i \gamma^0 p_f) + m_0^2 \text{Tr}(\gamma^0)^2 \right] \quad (11.2.24)$$

利用  $\text{Tr}(\gamma^0)^2 = \text{Tr}1 = 4$ ，对  $a(0,0,0,1)$  有  $\text{Tr}(\gamma^0 p_i \gamma^0 p_f) = \text{Tr}(a p_i a p_f)$ ，进一步利用如下定理：

$$\text{Tr} a_1 \cdots a_n = a_1 \cdot a_2 \text{Tr} a_3 \cdots a_n - a_1 \cdot a_3 \text{Tr} a_2 a_4 \cdots a_n + \cdots + a_1 \cdot a_n \text{Tr} a_2 \cdots a_{n-1}$$

可得到

$$\text{Tr}(\gamma^0 p_i \gamma^0 p_f) = a \cdot p_i \text{Tr} a p_f - a \cdot a \text{Tr} p_i p_f + a \cdot p_f \text{Tr} p_i a$$

利用  $\text{Tr} a b = 4a \cdot b$ ，可得到

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^0 p_i \gamma^0 p_f) &= 4(a \cdot p_i)(a \cdot p_f) - (a \cdot a)4(p_i \cdot p_f) + 4(a \cdot p_f)(a \cdot p_i) \\ &= 4E_i E_f - 4(E_i E_f - p_i \cdot p_f) + 4E_i E_f \\ &= 8E_i E_f - 4p_i \cdot p_f = 4E_i E_f + 4p_i \cdot p_f \end{aligned} \quad (11.2.25)$$

$\delta(E_i - E_f)$  表明能量守恒，即  $E_i^2 = E_f^2$ ，则

$$m_0^2 + p_i^2 = m_0^2 + p_f^2 \quad \text{或} \quad |p_i| = |p_f| = |p|$$

如图 11.2.2 所示，散射角为  $\theta$ ，那么初末态动量的标量积为

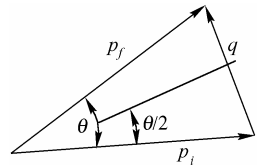


图 11.2.2 动量转换示意图

$$\begin{aligned}
 p_i \cdot p_f &= |p|^2 \cos \theta = |p|^2 \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = |p|^2 \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
 &\stackrel{|p|=|v|E=\beta E}{=} \beta^2 E^2 \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)
 \end{aligned} \quad (11.2.26)$$

$$|q| = |p_f - p_i| = 2|p| \sin \frac{\theta}{2} \quad (11.2.27)$$

微分截面式 (11.2.24) 可写为如下形式:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} &= \frac{4Z^2\alpha^2}{2(q^2)^2} [8E_i E_f - 4p_i \cdot p_f + 4m_0^2] \\
 &= \frac{Z^2\alpha^2}{2 \times 16|p|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} [8E_i E_f - 4p_i \cdot p_f + 4m_0^2] = \frac{Z^2\alpha^2}{32|p|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} [4E_i E_f + 4p_i \cdot p_f + 4m_0^2] \\
 &= \frac{Z^2\alpha^2}{8|p|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ E^2 + |p|^2 \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + m_0^2 \right] = \frac{Z^2\alpha^2}{4\beta^4 E^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ E^2 - \beta^2 E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right] \\
 &= \frac{Z^2\alpha^2}{4\beta^4 E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 1 - \beta^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right] \stackrel{\beta^2 E^2 = m^2 c^2 v^2 = c^2 |p|, c=1}{=} = \frac{Z^2\alpha^2 \left[ 1 - \beta^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right]}{4\beta^4 |p|^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}
 \end{aligned} \quad (11.2.28)$$

该式是著名的 Mott 散射公式。这里  $\beta = v/c$ 。在低速情况下,  $\beta \rightarrow 0$  退化为 Rutherford 散射公式, 即

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega_f} = \frac{Z^2\alpha^2}{4\beta^4 |p|^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (11.2.29)$$

显而易见,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim |\mathcal{M}|^2 \sim \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

其中,  $\theta$  为电子的偏转角。

### 11.2.2 重整化的例子

前面的计算只给出了  $O(\alpha^2)$  量级的微扰结果。现在进一步考虑  $O(\alpha^4)$  量级的微扰结果, 如图 11.2.3 所示。由一阶图 11.2.1 得到的 Coulomb 定理, 修正为

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= (-1)^n (ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i) \left( -i \frac{g_{\mu\mu'}}{q^2} \right) \\
 &\times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ (ie\gamma^{\mu'})_{\alpha\beta} \frac{i(\not{p} + m)_{\beta\lambda}}{p^2 - m^2} (ie\gamma^{\nu'})_{\lambda\tau} \frac{i(\not{q} - \not{p} + m)_{\tau\alpha}}{(q-p)^2 - m^2} \right] \\
 &\times \left( -i \frac{g_{\nu\nu'}}{q^2} \right) (-ij^\nu(q))
 \end{aligned}$$

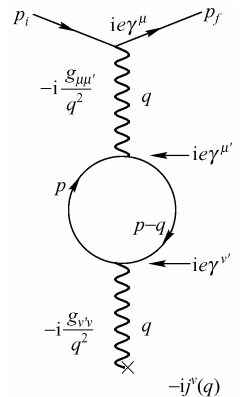


图 11.2.3 Rutherford 散射  
中交换光子的涨落形  
成  $e^+e^-$  电子对

对于  $n$  个 Feimi 子圈的图要有因子  $(-1)^n$ ，因而上式有  $(-1)$  项。积分  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$  源自于每一项顶点的四动量是守恒的，环绕的动量  $p$  却并不确定，环中的四动量的大小  $|p| = (p^2)^{1/2} = (p_0^2 - p^2)^{1/2}$  可以为  $0 \sim \infty$  中的任意值。由于  $p$  是不可观测的，因而必须对所有可能求和，固有此积分。

为了在形式上看起来更为明了，式 (11.2.8) 也可写为

$$S_{fi} = i2\pi\delta(E_f - E_i) \epsilon \bar{u}_f \gamma_\mu u_i \frac{1}{|q|^2} j^\mu(q) \quad (11.2.30)$$

这里去掉  $S_{fi}$  中的  $\delta$ ，得到协变振幅：

$$-i\mathcal{M} = ie \bar{u}_f \gamma_\mu u_i \frac{1}{|q|^2} j^\mu(q) \quad (11.2.31)$$

电子被静电荷反弹，动量发生改变， $p_i \neq p_f$ ，但能量守恒，即  $E_i = E_f$  或  $q_0 = 0$ 。于是有  $q^2 = -|q|^2$ ，所以上式可写为

$$-i\mathcal{M} = (ie \bar{u}_f \gamma_\mu u_i) \left( \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) [-ij^\nu(q)] \quad (11.2.32)$$

对于电量为  $Ze$  的静止核有

$$j^0(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) = Ze\delta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}) = 0 \quad (11.2.33)$$

将式 (11.2.30) 加到式 (11.2.32) 中，可看成对最低阶传播子的修正，即

$$\begin{aligned} -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} &\rightarrow -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + \left( -i \frac{g_{\mu\mu'}}{q^2} \right) I^{\mu'\nu'} \left( -i \frac{g_{\nu'\nu}}{q^2} \right) \\ &\rightarrow -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{(-i)}{q^2} I^{\mu\nu} \frac{(-i)}{q^2} \end{aligned} \quad (11.2.34)$$

其中，

$$I_{\mu\nu}(q^2) = (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ (ie\gamma_\mu) \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} (ie\gamma_\nu) \frac{i(\not{q} - \not{p} + m)}{(q - p)^2 - m^2} \right] \quad (11.2.35)$$

该传播子的这一  $O(\alpha)$  阶修正可用费曼图表示出来，如图 11.2.4 所示。这一修正可以一次计算出来，并替换进其他费曼图中。式 (11.2.35) 中的  $I_{\mu\nu}$ ，当  $|p| \rightarrow \infty$  时，有形如

$\int |p|^3 d|p|/|p|^2$  的项，这样的项是发散的。直接计算表明

$$I_{\mu\nu} = -ig_{\mu\nu} q^2 I(q^2) + \dots \quad (11.2.36)$$

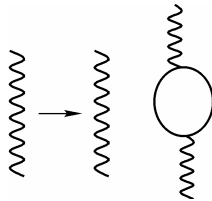


图 11.2.4 式 (11.2.34) 式的图形表示

其中,

$$I(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2} - \frac{2\alpha}{\pi} \int dz z(1-z) \ln \left( 1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right) \quad (11.2.37)$$

$m$  为电子的质量。式 (11.2.37) 将  $I(q^2)$  分成对数发散项和有限项。

对于小的  $(-q^2)$  有

$$\ln \left( 1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right) \approx -\frac{q^2 z(1-z)}{m^2}$$

式 (11.2.37) 变为

$$I(q^2) \approx \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \quad (11.2.38)$$

当  $(-q^2)$  很大时, 有

$$I(q^2) \approx \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left( -\frac{q^2}{m^2} \right) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left( \frac{M^2}{-q^2} \right) \quad (11.2.39)$$

在式 (11.2.37) 的计算中, 第一项的积分引入了截断  $M^2$ , 代替  $\infty$  作为积分上限。除非能去掉当  $M^2 \rightarrow \infty$  时  $I(q^2)$  的无穷大部分, 否则上面两式的结果在物理上是无意义的。对于真空场而言, 由于真空的维度不再是严格的四维时空, 如同用一维短尺去测量英国海岸线会得到无穷大的结果一样, 这是由于测度出了问题。

回到 Rutherford 散射, 包括式 (11.2.34) 的圈图贡献后, 振幅变为

$$-i\mathcal{Z} = (ie\bar{u}\gamma_0 u) \frac{-i}{q^2} \left( 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} + O(e^4) \right) (-iZe) \quad (11.2.40)$$

对小  $(-q^2)$  极限, 采用式 (11.2.38), 可以将式 (11.2.40) 改写为

$$-i\mathcal{Z} = (ie_R \bar{u}\gamma_0 u) \frac{-i}{q^2} \left( 1 - \frac{e_R^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2} \right) (-iZe_R) \quad (11.2.41)$$

其中,

$$e_R \equiv e \left( 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{M^2}{m^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11.2.42)$$

上式中的  $e_R$  就是粒子表中的电荷, 即  $\frac{e_R^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ 。把截断  $M \rightarrow \infty$  相联系的无穷大吸收到  $e_R$

中, 可以把无穷大藏起来。

通过电荷重新参数化, 理论中出现了一个有质量平方量纲的任意参数  $\mu^2$ 。重整化质量  $\mu^2$  的不同选择, 给出不变幅的不同展开形式, 称为不同的重整化方案。但是  $|\mathcal{Z}|^2$  是可观察量, 不应当依赖于  $\mu^2$  的选择, 这一要求可以表述为如下形式:

$$\mu \frac{d\mathcal{Z}}{d\mu} = \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_e + \mu \frac{\partial e}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial e} \right) \mathcal{Z} = 0 \quad (11.2.43)$$

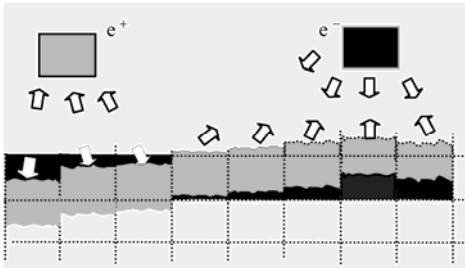
上式称为重整化群方程。

11.2.3 跑动耦合常数

1. QED情形

可以这样理解，当电子发生相互作用时，电子不可避免地存在扰动，电子能突然发射一个光子，该光子又可能转变成为一个虚电子对，之后湮灭成光子，再被电子吸收。相距越近，扰动越强，这一效应也随之增强。

如图 11.2.5 所示，电荷的存在导致真空量子场的起伏，距离越近，起伏越大。真空被理解为电中性的玻色子凝聚态<sup>①</sup>，量子场的起伏导致真空产生极化效应（规定空穴带负电荷，激发出“海”平面的带正电荷），该效应构成电荷屏蔽。



电荷的存在导致真空量子场的起伏，距离越近，起伏越大，该效应构成电荷屏蔽

图 11.2.5 电荷导致真空量子场的起伏随距离变化的示意图

对观测而言，原始被扰动后的电子对真空场作用，使真空场发生极化，并使该电子被  $e^+e^-$  对包围。由于异性电荷的相互吸引，正电子比较偏向于原始的电子。在 QED 中这称为电荷屏蔽，因此，电子被极化的电荷云包围着，正电荷靠近电子。这样一来，原始电子的负电荷被屏蔽了。如图 11.2.6 所示，如果想通过检验电荷所受到的库仑力来确定原始电子的电荷，那么就与检验电荷的位置有关。如果把检验电荷移向电荷，就要穿过由于靠近造成扰动所形成屏蔽电子的电荷云。检验电荷越靠近电子，即有更多的电力线相交，相互作用的通道增加，所测到的电荷就越大。

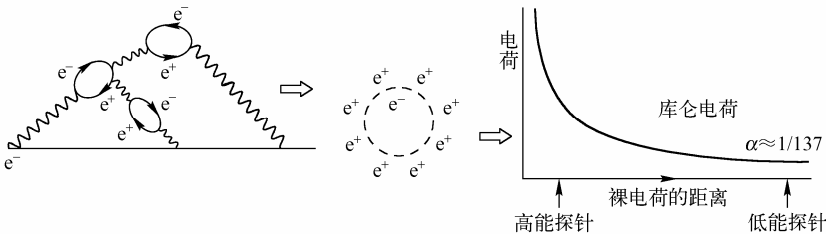


图 11.2.6 电荷屏蔽

“测量电荷值”依赖于探测电子电荷时的距离，通过考虑包围电子的所有可能的电荷云组态计算出来。

前面已看到电荷如何被光子传播子中的真空极化圈所修正。这种圈在高阶图中重复出现。

<sup>①</sup>罗泽恩，真空动力学，上海科学普及出版社，2003，p2.

$$e = e_0 \left\{ 1 - \text{self-energy loop} + \left( \text{self-energy loop} \right)^2 - \dots \right\} \quad (11.2.44)$$

对图中的几何级数求和可以得到

$$e = e_0 \left\{ \frac{1}{1 + \text{self-energy loop}} \right\} \quad (11.2.45)$$

对所有真空极化圈图求和，重新定义荷是一个好办法。在  $Q^2 = \mu^2$  处，式 (11.2.44) 给出物理的重整化后的电荷  $e$ ，消除了无穷大。由式 (11.2.45) 可得

$$e^2(Q^2) = e_0^2 \frac{1}{1 + I(q)} \quad (11.2.46)$$

这个式子给出了实验测量的电荷与实验中动量  $Q^2$  之间的依赖关系。 $\alpha(Q^2) \equiv \frac{e^2(Q^2)}{4\pi}$  称为跑动耦合常数。在大  $Q^2$  等于  $-q^2$  极限下， $I(q^2)$  由式 (11.2.39) 给出，上式变为

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left( \frac{Q^2}{M^2} \right)} \quad (11.2.47)$$

为消除  $\alpha(Q^2)$  对截断  $M$  的明显依赖关系，可选择一重整化的或参考的动量值  $\mu$ 。对于大  $Q^2$ ，则有

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu)}{3\pi} \ln \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right)} \quad (11.2.48)$$

这个式子只包含了可观察的有限的物理量。

跑动耦合常数  $\alpha(Q^2)$  描述了两个带电粒子作用时，它们的有效电荷与它们之间距离的依赖关系。

## 2. QCD情形

类似 QED 的情况，同样可以用夸克的色荷进行计算。假若不考虑胶子之间的相互作用，色屏蔽与电屏蔽十分相似。但由于胶子之间存在自相互作用，使 QCD 中的耦合常数  $\alpha_s(Q^2)$  对  $Q^2$  的依赖性与 QED 完全不同。

夸克带弦，色源自于弦的拉伸程度。弦又构成强相互作用的通道传递胶子，因而胶子本身带色。当使用检验色荷去测量原始色荷时，测量的本身就会对原始色荷产生扰动，这种扰动使被测夸克对背景真空场产生极化，激发出虚夸克对，虚夸克又发射胶子。夸克的振动产生胶子，胶子的振动又产生胶子对……这样的效应会不断发生，形成量子涨落，使被测夸克的周围变得异常复杂。虚夸克产生又消失，胶子、弦相互缠绕，致使原始色荷变得像迷宫一样，现在来考虑某一种色荷，如红的色荷。该色荷的扰动，使真空进行极化，红色色荷优先让红的色荷包围，如图 11.2.7 所示。当把检验色荷移近被测色荷时，检验色荷穿进红色荷

为主的球，所测量到的红色荷的量减少。这一效应便是红色的反屏蔽。它具有“渐进自由”的性质。对于“渐进自由”可以从两方面考虑：从动量的角度来看，可以做这样一个类比，考虑一粒子弹穿过一块玻璃板，速度越快，留下的洞越小，对整块玻璃的振动越小；相反，速度越慢，对整块玻璃的振动越大，玻璃的破损越厉害，子弹和玻璃的作用增强。从弦的角度来看，强相互作用场是一个充满弦的空间，两强子越靠近，则彼此相互看到对方的弦也少。反之，如果相互作用距离越远，则彼此相互看到对方的弦也就越多，弦相互缠绕的可能性加大。综合两方面的因素，可以做这样的类比：一个小昆虫要穿过蜘蛛网，数度越慢越容易被蜘蛛网缠绕住。对应的物理图像是相互作用距离越近，则强耦合常数越小。

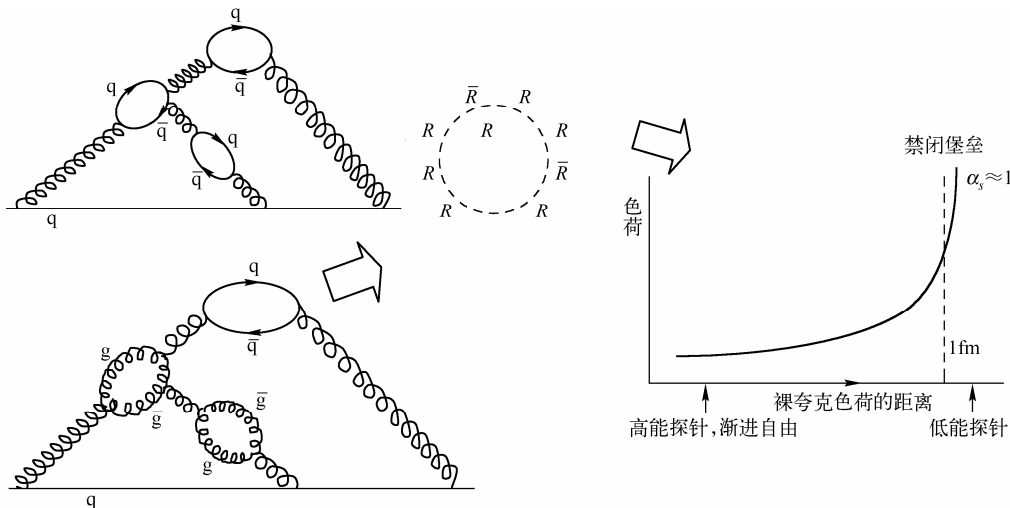


图 11.2.7 测量色荷

不论夸克极化对背景真空造成的量子涨落有多复杂，其所遵循的规律是简单的，只不过是这些简单效应的不断重复，因而可以确定出 QCD 中的耦合常数  $\alpha_s(Q^2)$  对  $Q^2$  的依赖关系。为此需要计算 QCD 的  $I(q^2)$ 。胶子传播子如下：

$$\left[ \begin{array}{c} \text{gluon line} \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{c} \text{gluon line} \end{array} \right] \left\{ 1 - \text{quark loop} - \text{gluon self-energy} - \text{ghost loop} + \dots \right\} \quad (11.2.49)$$

其中，额外的项来自于胶子的自作用。 $C$  和  $T$  分别表示 Coulomb 胶子和横向胶子。

上式中第一个圈涨落成一对虚  $q\bar{q}$ 。第二项为胶子自身发生相互作用，使得强作用理论是非 Abelian 的。胶子自身耦合的存在使 QCD 具有色反屏蔽。通过上式可以计算出 QCD 的跑动耦合常数（可参考任意一本量子色动力学理论的书籍）为

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{12\pi} (33 - 2n_f) \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad (11.2.50)$$

QCD 理论中， $\alpha_s(Q^2)$  随  $Q^2$  的增大而减小。

### 3. 真空背景场的硬化与相互作用耦合常数的统一

对于相互作用的量子场而言，相互作用越强，则对真空场的扰动越强，相应的真空场硬化越厉害。真空场的硬化严格正比于相互作用能量，随着能量的增加，相互作用区域背景



场逐步变硬。

在一个完全变硬失去弹性的背景场中，局域真空场达到形变极限，此时所有的形变不再是弹性形变，而只存在塑性变形。建立于弹性形变基础之上的量子场引力场会完全消退，相互作用实现统一，在这样的情况下，物理学也随之消失。这一情况类似于黑洞中心区域的情况。

具体而言，强子是场基本单元维度分裂成弦构成的，强相互作用是强子的弦相互作用构成的。电磁场是纤维场维度发生微小的移动构成的，弱作用场是质量荷分裂形成的。引力则是时空平滑弯曲形成的，背景空间越硬，引力越强。4 种力场都可以被认为是粒子自由度空间弯曲的效应，所有一切的存在都需要有一个弹性的背景空间作为平台。随着相互作用能量的增加，背景场硬化至形变极限，相互作用的跑动耦合常数必然归为同一点，如图 11.2.8 所示。

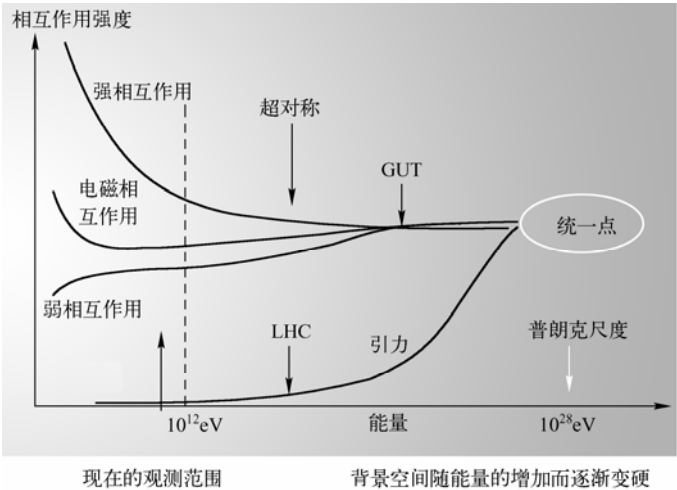


图 11.2.8 相互作用的一点

11.2.4 量子场的反常维度

在量子场论中，量子场的反常维度是作为一种数学手段存在的，并无实际的物理性质。事实上，量子场的反常维度的确存在于相互作用的量子场中，具有实际的物理意义和物理图像。本节将从真空场的角度研究量子场反常维度。

1. 量子场的邻域概念

相互作用的量子场分别如下：

$$\phi_R(x) = \sum_k [a_R(k)f_k(x) + a_R^+(k)f_k^*(x)] \tag{11.2.51}$$

$$f_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^D} \exp[ikx] \tag{11.2.52}$$

这里  $D=4$ 。在微扰论中，式（11.2.51）非线性相互作用 Bose 量子场被写为重整化的形式：

$$\phi_R(x) = Z_B^{-1/2}(e_R)\phi_b(x) \quad \text{QED} \tag{11.2.53}$$

QCD 的 Bose 场也有类似的表达式：

$$\phi_R(x) = Z_B^{-1/2}(g_R)\phi_b(x) \quad \text{QCD} \quad (11.2.54)$$

对于自旋  $J=1/2$  的 Dirac 量子场有

$$\phi_R(x) = Z_F^{-1/2}(e_R)\phi_b(x) \quad \text{QED} \quad (11.2.55)$$

$$\phi_R(x) = Z_F^{-1/2}(g_R)\phi_b(x) \quad \text{QCD} \quad (11.2.56)$$

$\phi_R(x)$  称为重整化量子场,  $\phi_b(x)$  称为裸量子场。  $Z_B^{-1/2}$  和  $Z_F^{-1/2}$  为重整化常数。

量子场  $\phi_R(x)$  和  $\phi_b(x)$  具有邻域。这里,  $\phi_R(x)$  和  $\phi_b(x)$  具有测度, 在这样的几何体中, 可以建立坐标架, 该坐标架具有分维结构。处于相互作用中的量子场  $\phi_R(x)$  具有分维 (泡沫化) 的几何结构,  $\phi_b(x)$  具有四维结构,  $Z_{B,F}^{-1/2} \phi_b(x)$  被理解为  $\phi_b(x)$  在分维 (康托线段  $0 < \sqrt{Z} < 1$  上) 坐标基上的投影, 投影的结果使得  $\phi_R(x)$  具有泡沫化结构。这样做的结果使得重整化常数具有几何线段的意义, 这一线段类似于康托集, 当然, 康托集只是一个特例。重整化 (常数) 的线段的几何结构可以异常复杂, 但是我们无法对量子场的内禀空间进行观测, 只关心该线段的维度。

## 2. 量子场的测度—维度 (数学概念)

维度的覆盖定义是用高位球覆盖未知几何对象  $Z$ , 球的维度为  $d$ , 球的半径为  $R$ , 所需要的球的个数为

$$N = \frac{Z}{R^d} \quad (11.2.57)$$

(1) 覆盖分如下两个步骤。球的半径  $R$  不变, 将  $Z$  各维放大  $\sigma$  倍, 放大后的  $Z$  记为  $Z(\sigma)$ ,  $Z(\sigma)$  增大  $k$  倍, 即

$$Z(\sigma) = kZ \quad (11.2.58)$$

覆盖  $Z(\sigma)$  的  $d$  维球的个数为

$$N_\sigma = \frac{Z(\sigma)}{R^d} \quad (11.2.59)$$

$$N_\sigma = \frac{kZ}{R^d} \quad (11.2.60)$$

(2)  $Z$  不变, 缩小高维球半径  $\sigma$  倍, 所需要个数为

$$N_\sigma = \frac{Z}{(R/\sigma)^d} \quad (11.2.61)$$

由式 (11.2.59) 与式 (11.2.61), 得到覆盖过程中  $Z(\sigma)$  的拓扑等式为

$$\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} Z(\sigma) = d \cdot Z(\sigma) \quad (11.2.62)$$

由式 (11.2.60) 与式 (11.2.61), 得到只与覆盖参数  $\sigma$  和  $k$  有关的拓扑等式为

$$k = \sigma^d \quad (11.2.63)$$

等式 (11.2.62) 与式 (11.2.63) 与高维球尺度无关, 刻画  $Z$  的拓扑性质, 放大与缩小是连续变换, 即拓扑变换。式 (11.2.62) 反映覆盖过程中的自相似性质。两个拓扑等式都刻画  $Z$  的维度性质。由式 (11.2.63) 可得到维度的表达式为

$$d = \frac{\ln k}{\ln \sigma} \quad (11.2.64)$$

对于 Cantor 点集  $C_T^{(3)}$  处处不稠密, 但具有 Hausdaoff 测度一维度。  $C_T^{(3)}$  的 Hausdaoff 维度为

$$D_I = \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad (11.2.65)$$

比较式 (11.2.65) 与式 (11.2.64), 一般可得

$$D_I = d \quad (11.2.66)$$

可见, 覆盖法得到的维度与 Cantor 超限法所得到的维度都具有 Hausdaoff 维度性质。

### 3. 量子场论反常维度的来源

由第 1 章可知分数维的定义式为

$$N(r) = r^{-D} \quad (11.2.67a)$$

或者

$$D = \frac{\lg N(r)}{\lg(1/r)} \quad (11.2.67b)$$

真空的空间按真空场基本单元的大小, 分割成无限多个大小为  $l^3$  的小立方体,  $l^3$  就是真空场基本单元的体积。用  $\alpha = 1, 2, \dots$  来标记。形成碎块的分布的分形维数就是

$$D = \frac{\lg \left( \frac{N_{m+1}}{N_m} \right)}{\lg \left( \frac{N_m}{N_{m+1}} \right)} = \frac{\lg(7P+1)}{\lg 2} \quad (11.2.68)$$

这一块真空场存在一种严格的分形结构, 即总是可分。真空物质经过无限次分裂后, 总存在一种最最基本的基元。真空具有颗粒结构, 那么可分的概率为 1, 即  $p=1$ , 则

$$D = \frac{\lg 8}{\lg 2} = 3 \quad (11.2.69)$$

流形的维度是三维。

如果真空受到扰动, 场的结构就会出现问題, 如场质缺损 (局域), 则  $0 < p < 1$ ,  $D < 3$ , 即在量子场相互作用区域, 真空场的空间维度将小于 3 维。

相互作用量子场的存在, 使得真空场中某一场基本单元发生塑性形变或发生缺损, 致使维度由 3 维变为 1 维或 0 维, 这样该点领域整个真空场的维度小于 3 维, 出现反常维度, 如图 11.2.9 所示。由此可知, 对真空的扰动越大, 反常维度越大。

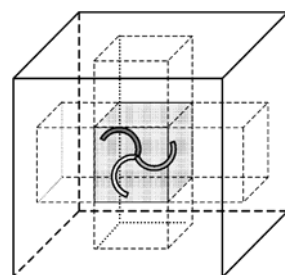
### 4. 量子场的测度-维度

在微扰论中, 自由标量粒子传播子为

$$\Delta_F(0, m_R, k) = \frac{-i}{k^2 + m_R^2 - i\varepsilon} \quad (11.2.70)$$

相互作用传播子为

$$\Delta_F^R(g_R, m_R, k) = \frac{1}{Z_B^{-1}(g_R)} \cdot \frac{-i}{k^2 + m_R^2 - i\varepsilon} \quad (11.2.71)$$



真空中某一场基本单元发生塑性形变, 致使维度由 3 维结构变为 1 维结构, 这样该点领域整个真空场的维度小于 3 维

图 11.3.9 出现反常维度的示意图

在微扰论中, 相互作用传播子与自由场的传播子只相差一个重整化常数。截断 Green 函

数与  $S$  矩阵微扰论等价。但是当它用于截断传播子时却只剩下重整化常数。截断步骤是将自由传播子除去。

$$\underline{G}_R^{(2)}(g_R, m_R, \sigma) = \frac{\Delta_F^R(g_R, m_R, k)}{\Delta_F(0, m_R, k)} \quad (11.2.72)$$

这里,  $\sigma$  表示不满足  $\delta(k^2 + m_R^2)$  的四维动量。相应地, 对于  $N$  点截断 Green 函数, 有下列表达式:

$$\underline{G}_R^{(2)}(g_R, m_R, \sigma) = \prod_{i=1}^{N_B} Z_B^{-1}(g_R, \sigma_i) \cdot \prod_{j=1}^{N_F} Z_F^{-1}(g_R, \sigma_j) \quad (11.2.73)$$

量子场微扰论没有截断传播子, 没有  $N$  点截断 Green 函数。

Hausdarff 测度-维度的定义如下:

$$\mu_H^\alpha(x) = Q_x^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad Q_x > 0 \quad (11.2.74)$$

$$\mu_H^0(x) = [-\ln Q_x]^{-1}, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (11.2.75)$$

这里的测度是  $\alpha$  的函数,  $\alpha$  是 Hausdarff 维度, 当  $Q \rightarrow 0$  时,  $\mu_H(x) \rightarrow 0_+$ 。Hausdarff 测度中两点“距离”不能为零, 没有零测度。

在量子物理中, 式 (11.2.74) 必须满足相对论,  $Q$  为相对论不变量, 即双曲距离。

$$Q^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (11.2.76)$$

式 (11.2.74) 与维度的关系可写为

$$\left( Q \frac{\partial}{\partial Q} \right)^+ \mu_H^\alpha = \alpha \mu_H^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (11.2.77)$$

## 5. 重整化常数

量子电动力学中, 在量子场重整化计算二阶微扰级数时, 重整化常数的发散 ( $\infty$ ) 的表达式为

$$Z_B^{-1/2}(\mathbf{e}_R, \sigma) = 1 + \frac{\alpha_e}{6\pi} \ln \left( \frac{\sigma^2 + m^2}{m^2} \right)_{\sigma \rightarrow \infty} \quad \text{QED} \quad (11.2.78)$$

$$Z_F^{-1/2}(\mathbf{e}_R, \sigma) = 1 - \frac{\alpha_e}{8\pi} \ln \left( \frac{\sigma^2 + m^2}{m^2} \right)_{\sigma \rightarrow \infty} \quad \text{QED} \quad (11.2.79)$$

质量重整化 ( $Z_m^{-1/2}(\mathbf{e}_R, \sigma)m = m_R$ ) 与电荷重整化 ( $Z_e^{-1/2}(\mathbf{e}_R, \sigma)e = e_R$ ) 的  $m_R, e_R$  对应实验值。质量重整化常数为

$$Z_m^{-1/2}(\mathbf{e}_R, \sigma) = 1 + \frac{3}{4\pi} \alpha_e \ln \left( \frac{\sigma^2 + m^2}{m^2} \right)_{\sigma \rightarrow \infty} \quad \text{QED} \quad (11.2.80)$$

这里  $\sigma$  是虚粒子的四维动量, 不是可测物理量。

由维度的覆盖定义式 (11.2.62) 与 Hausdorff 测度-维度定义式 (11.2.74)、式 (11.2.75), 可得

$$\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} Z_B^{-1/2}(\mathbf{e}_R, \sigma) = \gamma_B(\mathbf{e}_R) Z_B^{-1/2}(\mathbf{e}_R, \sigma) \quad (11.2.81)$$

由式 (11.2.78) 和式 (11.2.81) 得到 QED 中 Bose 量子场的反常维度为

$$\gamma_B(e_R) = \frac{1}{3\pi} \alpha_e \quad \text{QED} \quad (11.2.82)$$

由式 (11.2.79), 式 (11.2.80) 和式 (11.2.81) 可得到相应的量子场的反常维度:

$$\gamma_F(e_R) = -\frac{1}{2\pi} \alpha_e(Q^2) \quad \text{QED} \quad (11.2.83)$$

$$\gamma_m(e_R) = \frac{3}{2\pi} \alpha_e(Q^2) \quad \text{QED} \quad (11.2.84)$$

自旋顶角重整化  $\gamma_\mu(e_R, \sigma) = Z_\nu^{-1} \gamma_\mu$ , 这里  $\gamma_\mu$  为 Dirac 矩阵。定义自旋反常维度  $\gamma_\nu(e_R)$  为

$$\gamma_\nu(e_R) = \frac{\alpha_e(Q^2)}{2\pi} \quad \text{QED} \quad (11.2.85)$$

## 6. 跑动耦合常数

### (1) QED

上述的  $\alpha(Q^2) \equiv \frac{e^2(Q^2)}{4\pi}$  称为跑动耦合常数, 其中,  $e^2(Q^2) = e_0^2 \frac{1}{1 + I(q^2)}$ 。在大  $Q^2$  等于  $-q^2$  极限下, 有

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left( \frac{Q^2}{M^2} \right)}$$

为了消除  $\alpha(Q^2)$  对截断  $M$  的明显的依赖关系, 可以选择一个重整化的或参考的动量值  $\mu$ 。对于大  $Q^2$ , 有

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right)}$$

跑动耦合常数  $\alpha(Q^2)$  描述了两个带电粒子作用时它们的有效电荷与它们之间距离的依赖关系。当  $Q^2$  增加时, 光子看到越来越多的电荷, 一直到耦合常数  $\alpha(Q^2)$  变为无穷大。不过, 对于所有实验可达到的  $Q^2$ ,  $\alpha(Q^2)$  的变化非常小。随着  $Q^2$  的增加,  $\alpha(Q^2)$  由  $1/137$  极为缓慢地增大。对于电磁相互作用而言, 相互作用距离越短, 则相互作用就越强, 真空场的维度破坏越严重, 与之相应的反常维度越大。

量子场反常维度  $\gamma_{BF}(e_R)$  与量子场反常维度  $\gamma_m(e_R)$  的物理真实性问题, 需要新的物理假设, 这个假设必须得到大量实验支持。目前的实验支持存在量子场反常维度, 如电荷—电荷关联实验等。

### (2) QCD

QCD 的跑动耦合常数为

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_s}{12\pi} (33 - 2n_f) \ln \frac{Q^2}{\mu^2}}$$

在 QCD 理论中,  $\alpha_s(Q^2)$  随  $Q^2$  的增大而减小, 因而在小距离作用中变小。这一理论称为渐进自由。

强相互作用量子场反常维度  $\gamma_{\text{BF}}(g_R)$  存在于  $N$  强子产生的过程中。在质心系能量  $\sqrt{S} = (2 \sim 1800)\text{GeV}$  的范围内,  $-\gamma_B(g_R)$  逐渐变小,  $-\gamma_F(g_R)$  因实验数据少且误差大, 初步得到的结论是

$$-\gamma_B(g_R) = 0.060 \sim 0.030, \quad \sqrt{S} = (4 \sim 1800)\text{GeV} \quad (11.2.86)$$

$$-\gamma_F(g_R) = 0.45 \pm 0.12 \quad (11.2.87)$$

由式 (11.2.86) 可知, 在质心系能量  $\sqrt{S} = (2 \sim 1800)\text{GeV}$  的范围内,  $-\gamma_B(g_R)$  逐渐变小, 说明在小距离作用中, 强相互作用变弱, 核子内禀空间真空场的扰动变小, 相应的内禀空间反常维度变小。

## 11.3 真空场论与超弦/M理论

真空场理论是标准模型理论的延伸。该理论发展并完善了经典量子场理论, 其目标是建立一个能统一四种力场的基本理论。这一目标和目前超弦理论的目标是一致的。从达到最终目标的角度来看, 两种理论都只是朝这一目标在努力, 理论都未完善。由于两种理论的目标一致, 因而不可避免地要把两种理论基本特性进行一些比对, 这有助于更深入理解物质世界的本质。

在真空场理论看来, 理论分量部分: 弹性形变部分理论, 该部分是描述量子场内禀空间和背景空间的性质, 解释了各种自由度的成因。在这部分理论中, 量子场中心点仍然被视为一个点, 这使得理论大为简化, 是真空场理论的核心部分。另一部分是研究量子场中心点塑性形变的理论, 而中心点的塑性形变正是质量荷空间的情况, 这部分的理论就是弦理论, 从真空场的角度来看, 弦理论是研究质量荷空间的理论。

### 11.3.1 真空场论与弦理论的基本思想

#### 1. 弦理论中的电子和夸克

超弦/M理论建立的目的, 在于提供已知四种作用力统一的量子理论。理论物理学家十分热衷于这样一个思想<sup>①</sup>, 就是认为在高达  $10^{15} \sim 10^{19}\text{GeV}$  的尺度上来观察自然时, 自然的终极组成不是粒子或场, 而是弦。从弦的尺度来看, 其大小是质量荷的大小。

在真空场论看来, 平直真空场在任何尺度都是平直而光滑的, 近距离观测的本身导致真空场的强烈扰动, 当在高达  $10^{15} \sim 10^{19}\text{GeV}$  的尺度上来观察自然时, 观测者带给被观测对象强烈扰动, 致使量子场的波长缩短, 短至极限, 即普朗克尺度, 即  $10^{-33}\text{m}$ 。因而弦是观测者短距离观测时造就的。换言之, 高能量的观测导致量子场的产生, 使我们看到了量子场的质量荷, 荷的形态是弦。通俗地讲, 把高能输入观测对象, 会将观测对象塑造成  $10^{-33}\text{m}$  的弦。

弦理论的基本实体 (真空场的质量荷) 不再是理想化的点粒子, 而是一维弦、二维膜和高维广义膜的延伸性客体。超弦是具有超对称性的弦, 它并不意味着单个粒子或单种作用, 而是通过弦的不同的振动模式表示整个粒子谱系列即诸种作用的统一。这种弦就是空间时间中的一圈小小的间断, 是时间空间中沿着一圈分布着的小缺陷。和一条弦一样在张力的

① [美]理查德·费曼, S.温伯格 著, 李培康 译. 从反粒子到最终定理. 湖南科技出版社, 2003 年, p61.

作用下会以无穷多种模式振动。对于某种振动模式，这种振动模式可用诸如质量、自旋之类的各种量子数来刻画。弦论的基本思想是每一种弦的振动模式都携带一组量子数，而这组量子数与某类可区分的基本粒子相对应。这是一种终极统一：所有的我们所知的基本粒子都可用一种客体来描述，那就是弦。

2. 真空场中的电子和夸克

真空场中理论中的电子是由于真空场中场基本单元跃迁，造成真空场出现缺损而出现空穴，空穴及其周围形变的真空场构成电子，跃迁而出的游离态的场基本单元压缩周围的真空场便构成了反电子。对于夸克来说，情况和电子一样，不同的是跃迁的不是 1 场基本单元，而是 1/3 场基本单元并带有弦。费米子的质量决定于质量波的频率。

3. 模型的比对

由上面的概述，我们认为两者大相径庭，存在巨大的差异，但两者都是经典量子场论点模型理论的延伸。真空场论的研究的内禀空间和中心点关系的理论，更接近经典量子场论。对于质量荷的形变，目前的真空场理论无法描述，而弦理论是研究量子场中心点质量荷的理论。

真空场论的模型可以直接得出正负电子对会成对出现，并能给出场电子的纤维结构，解释电荷的成因，电磁场的性质。电子的汇聚波能解释自旋存在和为什么角动量是  $\hbar/2$ 。这是弦理论很难做到的。是研究的范围不同造成的，如图 11.3.1 所示。

4. 弦理论的基本结构

质量荷空间的曲面可以由其上布置的坐标网来描写。由于它是二维曲面（一维时间一维空间），它上面的一点  $\sigma(\sigma^1, \sigma^2)$  确定。这里的  $\sigma(\sigma^1, \sigma^2)$  就是粒子的内禀时空二维标架， $x_\mu$  则是观测时空标架。为了指明弦上任意点在曲面上在任何一个具体时刻在什么地方，你必须有一个明确的规则将内禀空间中心质量荷空间曲面上的点和观测是空中的点联系起来

$$x_\mu = x_\mu(\sigma^1, \sigma^2). \tag{11.3.1}$$

在四维的点粒子理论中，基本粒子的时空位形由其四维坐标  $x^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$  所描述，没有内禀空间一说，这是由于基本粒子被认为是一个点造成的，因为点是无内禀结构的。

弦理论中的粒子不再是点，而引入了内禀结构弦，弦的空间坐标有二维时空  $\sigma^1, \sigma^2$  描述，时空坐标  $x_\mu(\sigma^1, \sigma^2)$  对  $\sigma^1, \sigma^2$  的依赖，造成了弦模型和点粒子理论根本不同的特性。

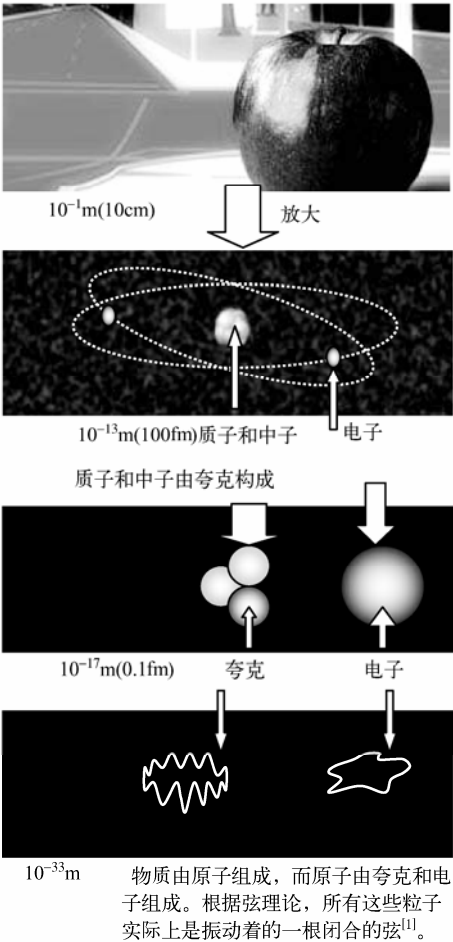


图 11.3.1 物质结构的层次

内禀空间的二维曲面是弯曲变化的，为了描述该曲面，有必要引入二维度规  $g_{\alpha\beta}(\sigma)$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$  描述曲面。曲面上两相邻的点  $\sigma$  和  $\sigma + d\sigma$ ，它们之间的长度为

$$ds = \sqrt{g_{\alpha\beta}(\sigma) d\sigma^\alpha d\sigma^\beta} \quad (11.3.2)$$

为了和实验观测联系起来，就必须求出相互作用的几率幅（几率幅的平方可以得到一给定碰撞过程的几率），你就得对碰撞过程所有可能发生的方式取加权平均。在弦理论中，意味着必须对二维曲面的所有那些能够产生这一特定过程的历史发展进行求和。而一个二维面的历史演化由上述两个函数： $x_\mu(\sigma)$  和  $g_{\alpha\beta}(\sigma)$  来描述。为了计算几率幅，实际上要做的是对着二维曲面的每一历史过程  $x, g$  计算一个数值量  $S[x, g]$ ，然后将  $e^{-[x, g]}$  对所有可能的曲面求和。量  $I[x, g]$  称为作用量，它是  $x_\mu(\sigma)$  和  $g_{\alpha\beta}(\sigma)$  的泛函，由下式给出：

$$S[x, g] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{-g(\sigma)} g^{\alpha\beta}(\sigma, \tau) \frac{\partial x^\mu(\sigma)}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^\nu(\sigma)}{\partial \sigma^\beta} \eta_{\mu\nu} \quad (11.3.3)$$

上式中， $\alpha, \beta$  是  $(\sigma, \tau)$  二维时空中的矢量指标， $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, D-1$  是  $D$  维时空中的矢量指标， $\eta_{\mu\nu}$  是  $D$  维时空的闵氏度规，即

$$\eta_{ij} = (+, -, -, \dots, -) \quad (11.3.4)$$

而量  $\frac{1}{2\pi\alpha'} = T$  是弦塑性形变的张力。为什么是  $D$  维时空中，而不是四维时空？是因为当一根弦在时空中移动时，由于弦的运动是如此的复杂，以至于三维空间已经无法容纳它的运动轨迹，必须有高达十维的空间才能满足它的运动（十维空间是数学方程计算的结果）。实际情况我们可观测的时空是三维空间和一维时间，为此要把多余的 6 维空间通过紧致化（卡—丘空间）卷缩在  $10^{-33} \text{ cm}$  的空间内。

点粒子内部的空间不是三维的，可能还有很多维。如水管的表面是二维的，但是当从远处看它时，它却像是一维的直线。绕着管子的那一个圆圈维很短，“卷缩起来了”，不容易发现。必须走近水管，才能看清绕着圆圈的那一维。因而，空间维有两种：它可能很大延伸得很远，能直接显露出来；它也可能很小，卷缩了，很难看出来。在最微小的尺度上，已证明，宇宙的空间结构既有延展的维，也有卷缩的维。就是说，宇宙有像水管在水平方向延伸的、大的、容易看到的维——寻常经历的三维，也有像水管在横向上的圆圈那样卷缩的维——这些多余的维紧紧卷缩在一个微小的空间，即使用最精密的仪器也根本不能探测它们（ $10^{-33} \text{ cm}$ ）。

这一理论最激动人心之处在于它第一次给我们带来了一个没有无穷大的引力理论，这种无穷大在所有先前企图描述引力的理论中都会出现的。那含有长而薄的管子的曲面会给出这样的结果，就是在初态粒子和与末态粒子之间的中间过程会发射一束辐射脉冲，它对应于一无质量的、自旋为 2 的粒子（如图 11.3.2 所示），引力子正好具有上述性质。从某种意义上可以说在弦理论中发现了引力。

超弦理论（Superstring Theory）：一般的弦理论，只能给出自旋为整数的激发态粒子，即只包含玻色子，如果要引入费米子，就必须引入超对称性（玻色子与费米子之间的对称性，supersymmetry, SUSY）。引入超对称性的弦理论，称为超弦理论。



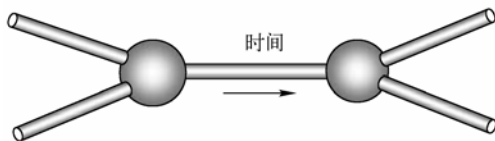


图 11.3.2 一根弦的截面，包含这一自旋为 2 的物质质量粒子的发散和重新吸收

## 5. 真空场理论的基本结构

真空场在数学形式上基本保持了量子场理论的形式，所改变的是把粒子内禀自由度视为场量的一个维度，增加了场量的维度。维度除了时空维度之外还增加了质量维度和自旋维度等。相应地，对于算符而言，算符也要增加，要增加质量算符和自旋算符等。

真空场理论中，基本粒子也不再是点粒子，同样也存在内禀结构。和弦理论不同的是，粒子的内禀结构是一个具有纤维结构三维体，由四维时空标架  $\xi(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$  描述， $x^\mu (\mu=0, 1, 2, 3)$  是观测时空标架，四维时空被扩展为  $N$  维空间，这样可以表述粒子的内禀自由度。内禀空间  $\xi(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$  和观测是空的关系为

$$x^0 = \begin{pmatrix} \xi^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi^3 \end{pmatrix}, \quad x^4 = x_M = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \quad (11.3.5)$$

基本粒子内部时空可延伸至观测时空中，这使得粒子即有内禀空间结构，同时理论可以被简化。粒子不再是经典场论中的点粒子，这点和弦理论的观点是相近的。

内禀空间上两相邻的点  $\xi$  和  $\xi + d\xi$ ，它们之间的长度为

$$ds = \sqrt{g_{\alpha\beta}(\xi) d\xi^\alpha d\xi^\beta} \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \quad (11.3.6)$$

由于内禀空间标架和时空自由度空间标架重合，因而延伸到  $N$  维空间（即  $N$  自由度空间）后，它们之间的长度变为  $ds = \sqrt{g_{ij}(x) dx^i dx^j}$ ，考虑自由度空间为平直空间

$$ds = \sqrt{\eta_{ij}(x) dx^i dx^j}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (11.3.7)$$

同样，要计算几率幅。粒子从  $a$  到  $b$  的过程中，从时刻  $t_a$  的点  $x_a$  到时刻  $t_b$  的点  $x_b$  的几率  $P(b, a)$  是  $a$  到  $b$  的几率幅的绝对平方

$$P(b, a) = |K(b, a)|^2 \quad (11.3.8)$$

这个几率幅是每条路径的贡献  $\phi[x(t)]$  之和

$$K(b, a) = \sum_{\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的所有路径}} \phi[x(t)] \quad (11.3.9)$$

单条路径的贡献具有一个与作用量  $S$  成正比的相角  $\phi[x(t)] = \text{conste}^{(i/\hbar)S[x(t)]}$ ，因而

$$S[a, b] = \int_a^b L(\dot{x}, x, t) dx \quad (11.3.10)$$

$$S[x, g] = \frac{1}{2} \int_a^b d\varphi \eta^{ij} D_i \varphi(x) D_j \varphi(x) \quad (11.3.11)$$

上式中， $i, j$  是  $N$  自由度空间中的矢量指标， $i, j = 0, 1, 2, \dots, N$ ， $\eta_{ij}$  是  $N$  维时空的闵氏

度规，即

$$\eta_{ij} = (+, -, -, \cdots, -) \tag{11.3.12}$$

由于纤维结构的量子场内禀时空和观测时空重合，粒子内禀空间 4 动量就是观测时空的 4 动量，简化后的内禀波函数和粒子空间的内禀波函数相同，配合自由度空间的场算符  $\gamma_n \partial_n$  ( $n = 0, 1, 2, \cdots, N$ )，这样真空场的数学表述就退化为经典量子场的表述形式，使得理论大为简化。有趣的是相对于观测而言， $N$  维自由度空间中，超出四维时空多余的维度被限制在内禀空间中，这和弦理论有点相似。

6. 超对称

超对称的引入，对于超弦理论极为重要。如果不引入超对称，超弦理论就无法描述费米子。真空场不涉及超对称的概念。

11.3.2 粒子的相互作用

1. 弦理论基本粒子间的相互作用

弦本身很简单，只是一根极微小的线，弦可以闭合成圈（闭弦），也可以打开像头发（开弦）。一根弦还能分解成更细小的弦，也能与别的弦碰撞构成更长的弦。例如，一根开弦可以分裂成两根小的开弦；也可以形成一根开弦和一根闭弦；一根闭弦可以分裂成两个小的闭弦；两根弦碰撞可以产生两个新的弦。

基本粒子间的相互作用被看成是这些圈连接到一起，随后又在分离开来。这样一个事件可以用空间时间中的一个二维面来描述，这完全是因为当一根弦在空间中运动时会在空间时间中扫出一个二维曲面（一根管子）。粒子间的任一特性的反应就应该看成是一个二维曲面进行各种分裂和再结合的历程，在这个反应过程中那些存在于初态中的弦圈被吸收了，而发射出那些处于终态的弦圈。

如两个粒子入射进来，三个粒子发射出去的散射过程可以用这样一种二维曲面来描述，它有两根进入的长管（代表初态粒子），在有三条伸出的长管（代表终态粒子。）这两者之间曲面本身可能有相当复杂的拓扑结构，如图 11.3.3 所示。

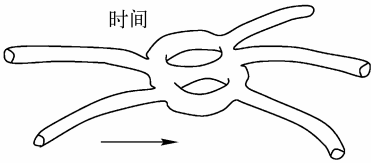


图 11.3.3 弦理论中两个粒子变成三个粒子的散射过程

2. 真空场理论基本粒子间的相互作用

现在来考虑真空场理论中粒子间的相互作用。在真空场理论中，粒子传递相互作用的物理图像和弦模型不同，粒子间的相互作用有两种形式。

(1) 静态相互作用

这种相互作用形式存在于引力场和电磁场中。引力是空间的弯曲。两物体间的引力先互作用是由空间弯曲造成的，曲率张量为

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta} \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\gamma} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} \Gamma^{\sigma}{}_{\sigma\beta}$$

表现为存在万有引力。

电磁场空间弯曲，表现为存宏观在静态电磁场，对于相对静止或低速运动的两荷电体或两磁体之间通过电力线和磁力线实现相互作用，为经典电磁场理论所描述。电磁空间的曲率为  $F^{\mu\nu}$ （反对称二阶张量）： $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$ ，此时电磁场的拉格朗日密度为： $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ 。

(2) 交换中间玻色子的相互作用

适用于微观粒子间的相互作用。粒子间通过交换中间玻色子来实现相互作用。从微观粒子的角度来看，强、弱、电、引力 4 种相互作用均可以通过交换中间玻色子来实现相互作用。其中强、弱两种相互作用只存在于粒子内禀空间中，因而无法通过强场、弱场空间的弯曲来实现相互作用，只有通过交换中间玻色子一种方式来实现相互作用。

这里有必要说明的是引力场和电磁场来说，两种方式均存在。这里研究的角度是微观粒子还是宏观物体。两费米子间的引力相互作用也可以通过交换引力子来实现，如图 11.3.4 所示。

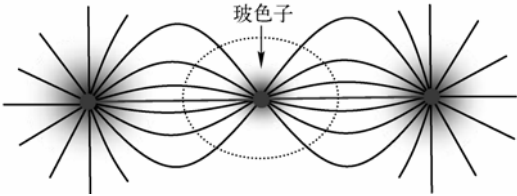


图 11.3.4 真空场理论中两个粒子性互作用是通过电力线来交换带有纤维结构的玻色子实现相互作用

对电磁场而言，两种情况都可同时存在。对于交换光子实现相互作用，此时电磁场的拉格朗日密度为： $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_{\nu} A_{\mu})(\partial^{\nu} A^{\mu})$ 。

有必要加以说明的是费米子要发射玻色子粒子，那么其振动的速度要超光速。对于由静质量的粒子而言，粒子内禀中心点达到应变极限，从粒子内禀空间来看，任何速度的运动都超光速，因而可以发射玻色子，当然也包含引力子。

真空场理论的相互作用和弦理论不同，但和经典量子场论是一致的，不同之处在于引入了纤维结构，这种引入使得能够估算耦合常数。

11.3.3 四种力场的统一物理机制的比对

弦理论中，弦的振动模式与粒子的引力作用之间存在着直接的联系。同样的关联也存在于弦振动模式与其他力的性质之间，一根弦所携带的电磁力、弱力和强力也完全由它的振动模式决定。

在真空场理论中，粒子的引力、电磁力、弱力和强力均源自于真空场形变，而电磁力、弱力和强力之间的不同是由于纤维场作用形式和纤维场的形态不同造成的。在物理图像上，4 种力场的纤维场图像比弦理论的振动模式图像更为直观。

### 1. 粒子的波粒二象性

依照弦理论，每种基本粒子所表现的性质都源自它内部弦的不同的振动模式。每个基本粒子都由一根弦组成，而所有的弦都是绝对相同的。不同的基本粒子实际上是在相同的弦上弹奏着不同的“音调”。由无数这样振动着的弦组成的宇宙，就像一支伟大的交响曲。在量子理论中，每一个粒子还具有波的特性，这就是波粒二象性。粒子的波动性是由弦的振动产生的。

真空场粒子的波动性是由于粒子传播时，中心点在垂直于传播方向发生振动造成的。由于量子场具有纤维结构，可对粒子进行简化，简化成振动的“弦”。和弦理论不同的是真空场理论中简化的“弦”的长度为粒子内禀空间直径，满足  $\Phi \cdot p = \hbar$ ， $p$  为粒子动量， $\Phi$  弦理论中弦的长度。

### 2. 粒子的质量

弦与粒子质量的关联是很容易理解的。弦的振动越剧烈，粒子的能量就越大；振动越轻柔，粒子的能量就越小。当我们用力拨动琴弦时，振动会很剧烈；轻轻拨动它时，振动会很轻柔。而依据爱因斯坦的质能原理，能量和质量像一枚硬币的两面，是同一事物的不同表现：大能量意味着大质量，小能量意味着小质量。因此，振动较剧烈的粒子质量较大，反之，振动较轻柔的粒子则质量较小。

真空场理论中，质量源自于粒子内禀空间的传播特性，彻底摒弃了质量参数，跳出了质量解释质量的逻辑循环。在弦理论中，静止弦仍然存在微小的质量，振动使得能量增加，并没有跳出了质量解释质量的逻辑循环。

真空场可以解释质量的起源，并使我们明白质量的本质。质量满足： $mc^2 \cdot R = h_f$ ， $R$  为费米子内禀空间半径。这样关系描述了中心点质量和内禀空间的关系，但是却无法计算和确定质量的大小，静质量本身是量子场中心点达到形变极限的效应，再形变就是塑性形变。只有研究塑性形变，才能确定质量。想要研究塑性形变，就必须进入到费米子中心点这个更小的区域，这个小空间的大小为  $h_f$ ，这真是超弦/M 理论研究的范围。只有把量子场中心的和其邻域的性质研究透，物理学才是完美的。

### 3. 相对论与量子理论的关系

引力相互作用是由于背景空间弯曲造成的，空间弯曲所导致的引力是无法通过粒子交换而来的，量子力学是微观的理论，量子理论无法涵盖引力。相对论和量子理论在三维空间里，它们就像两块互不相干的碎片，永远也拼合不到一起。但把空间“向上”抬一抬，把宇宙变为十维空间，相对论和量子理论这两块看似互不相干的碎片就会令人震惊地结合得天衣无缝，成为一个更完整的理论大厦的两根互相依存的支柱！虽然在三维空间中无法想象和描述一个多维的空间，但却能通过复杂的数学方程推导出它的存在。

在真空场理论中，相对论和量子理论的统一目前仅只是在物理图像上进行了统一。由于考虑问题的角度不同，理论的描述范围不同是造成相对论和量子理论不相容的原因。如果从粒子性互作用的角度来看，有质量的费米子内禀质量空间可以被简化为有质量的闭弦结构。粒子间可以交换引力子，这样可以实现相对论和量子理论的统一，具有纤维结构的量子场发射引力波这一工作目前还未完成。

#### 4. 时空间结构的颗粒性

超弦理论中的空间结构是离散的，而不是连续的。在日常经验中，空间和时间总是无限可分的，但事实却大谬不然。空间和时间都有自己的最小值：空间的最小尺度为  $10^{-33}$  cm，时间的最小值是  $10^{-43}$  s。因为当空间小到  $10^{-33}$  cm 后，时间和空间就会融为一体，空间维度就会高达十维，在这样的情况下，即使空间还能分割，那也是目前所不能了解的了。

而量子理论中——能量的不连续正是由于空间有最小的、不可分割的单位，才会影响到基本粒子的能量发射方式。

在真空场理论中，真空由场基本单元构成，场基本单元的大小为  $\hbar_f = 2\hbar$ 。场基本单元在发生形变后具有三个维度，形变前的维度取向是任意的。小应变情况下，单一场基本单元可以同时存在多个应变。目前的真空场理论还没有像弦理论一样，对场基本单元的内部情况进行更深的研究。

#### 11.3.4 狄拉克“大数假设”

狄拉克在 1937 年提出的“大数假设”也许是 20 世纪提出过的最大胆的假设之一。我们知道，氢原子中静电力与万有引力之比为

$$e^2 / G m_p m_e = 2.3 \times 10^{39} = \alpha_1$$

以原子单位来度量的宇宙年龄

$$m_e c^3 / e^2 H = 7 \times 10^{39} = \alpha_2$$

以质子质量单位表示的宇宙总质量

$$8\pi \rho c^3 / 3m_p H^3 = 1.2 \times 10^{78} = \alpha_3$$

其中， $G$  表示牛顿引力常数， $H$  为哈勃常数。这三个数之间存在有趣的联系：

$$\alpha_1 = \alpha_2 = (\alpha_3)^{1/2} \approx 10^{39}$$

这里  $\alpha_2$  为宇宙的年龄，应该是一个与  $t$  成正比的数， $\alpha_1$ ， $\alpha_3$  则是常数<sup>①</sup>。

首先，把整个宇宙类比为—个氢原子，然后再进行分析。氢原子中静电力与万有引力之比就是真空场中，静电场造成的场的形变量与万有引力造成的场的形变量之比。场基本单元的形变量为应变，那么就是应变之比，应变对应的是内禀动量。原子内禀时间就是原子从无到有的时间，记为  $\Phi_{e0}$ ，原子内禀空间记为  $\Phi_e$ （直径）；把整个宇宙视为—个巨大的球体。类比原子，宇宙的年龄就是宇宙从无到有的时间，对应原子的内禀时间，记为  $\Phi_0$ ，宇宙直径记为  $\Phi$ ，宇宙的内禀动量可记为  $p_G$ ，电子的内禀动量记为  $p_e$ ，满足

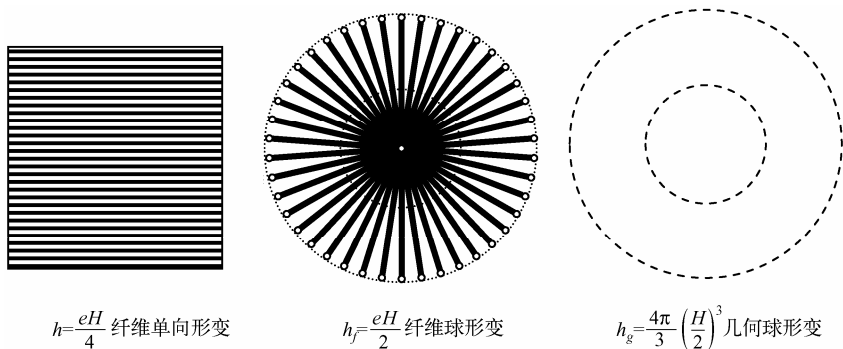
$$p_e \cdot \Phi = E_e \cdot \Phi_0 = h_f = \frac{eH}{2} \quad (11.3.13)$$

对于引力场而言，满足

$$p_G \cdot \Phi = E_G \cdot \Phi_0 = h_g = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{H}{2} \right)^3 \quad (11.3.14)$$

如图 11.3.5 所示，可以近似地认为  $h_f = \frac{1}{2} h_g$ ，这样存在如下关系

① 【美】理查德·费曼 S.温伯格 著,李培廉 译. 从反粒子到最终定律. 湖南科技出版社, 2003.

图 11.3.5 近似的认为  $h_f = \frac{1}{2}h_g$ 

$$2p_e \cdot \Phi = 2E_e \cdot \Phi_0 = p_G \cdot \Phi = E_G \cdot \Phi_0 \quad (11.3.15)$$

即得到这样的结论

$$\frac{2p_e}{p_G} = \frac{2E_e}{E_G} = \frac{\Phi}{\Phi_e} = \frac{\Phi_0}{\Phi_{e0}} = \alpha \quad (11.3.16)$$

原子静电力与万有引力之比等价于原子内禀时间与宇宙年龄之比为  $\alpha$ ，并得到新的结论，及单位时空原子静电场能量与单位时空引力场能量之比为  $\alpha$ ，宇宙空间大小与原子内禀空间大小之比为  $\alpha$ 。

在目前的理论中，并不存在  $h_f$ ，只有  $h$ 。 $2h = h_f$  于是可得  $h = \frac{1}{4}h_g$ 。在实验中，只能沿某一方向进行测量， $h_f$  没有可观测性。氢原子的静电力满足

$$p_{e'} \cdot \Delta x = E_{e'} \cdot \Delta t = h \quad (11.3.17)$$

取时空范围相同才具有可比性，即  $\Phi = \Delta x$ ， $\Phi_0 = \Delta t$ ，那么可得  $p_e = 2p_{e'}$ ，得到

$$\frac{4p_e}{p_G} = \frac{e^2}{Gm_p m_e} = 9.2 \times 10^{39} = \alpha_1$$

宇宙年龄（即宇宙时间  $\Phi_0$  与原子时间之比  $\Phi_{0e}$ ）

$$\frac{\Phi_0}{\Phi_{e0}} = \frac{m_e c^3}{e^2 H} = 7 \times 10^{39} = \alpha_2$$

$\alpha_1 - \alpha_2 = 2.2 \times 10^{39}$ 。没有完全相等。这是由于宇宙还处于形成区，还有  $2.2 \times 10^{39}$  的时间宇宙完全成形，从这样的角度来分析，现在处于宇宙寿命的  $2/3$  时段上，宇宙的总寿命是  $9.2 \times 10^{39}$ 。

现在继续来了解为什么以质子质量单位表示的宇宙总质量的问题。

由于宇宙空间直径和原子空间直径存在如下关系

$$\frac{\Phi}{\Phi_e} = 7 \times 10^{39} = \alpha_2$$

这里，取  $\Phi_e = 1$ 。质子的质量近似等于氢原子的质量，略小。对于一个实心球体而言，如果宇宙由原子构成，那么存在如下关系

$$\frac{M_G}{m_p} = \frac{\rho \frac{1}{6} \pi \Phi^3}{\rho \frac{1}{6} \pi \Phi_e^3} = \Phi^3$$

对于一个球壳层结构体而言，如果宇宙由原子构成，那么存在如下关系

$$\frac{M_G}{m_p} = \frac{\rho \frac{1}{4} \pi \Phi^2}{\rho \frac{1}{4} \pi \Phi_e^2} = \Phi^2 \approx \alpha_2^2$$

这表明宇宙和质子都具有壳层结构，不是实心体结构。

从上述讨论来看，宇宙和原子是同构的。

# 附录 A

笔者通过网络和其他渠道收集了部分读者感兴趣的问题，从真空场理论的角度给予了回答，回答内容在该问题后的章节可以找到。

1. 【☆问题：什么是以太？】 1.2.1 以太的真空图像
2. 【☆问题：真空是空的吗？】 1.3.1 实验手段及面临的困难
3. 【☆问题：认识真空存在那些困难？】 1.3.2 真空场的基本假设
4. 【☆问题：如何通过现有知识来认识真空？】 1.3.2 真空场的基本假设
5. 【☆问题：真空场理论是如何实现四种力场统一的？】 1.5 真空中量子场理论建立的基本思想
6. 【☆问题：为什么惯性参照系会具有等价性？】 4.2.1 测量协变原理
7. 【☆问题：为什么光速会具有不变性？】 4.2.3 光速不变原理
8. 【☆问题：什么是时钟？】 4.3.1 时间的原始概念
9. 【☆问题：时间为什么具有单向性？】 4.3.1 时间的原始概念
10. 【☆问题：是什么在控制时钟的快慢？】 4.3.1 时间的原始概念
11. 【☆问题：我们能够回到过去吗？】 4.3.1 时间的原始概念
12. 【☆问题：什么是量子场涨落？】 4.4.4 引力场和量子场间的关系
13. 【☆问题：为什么正反物质都具有万有引力特性？】 4.6.3 引力场的万有特性
14. 【☆问题：光子的电磁波图像是什么？】 5.1.1 光子的电磁波图像
15. 【☆什么是粒子的内禀空间？】 5.2.1 真空场理论中光子的图像概述
16. 【☆光子的为什么停不下来？】 5.2.2 光子 $\xi^4$ 维概述
17. 【☆问题：基本粒子的内禀时间是什么？】 5.2.3 形变极限值 $\mathcal{M}$ 的真空场物理意义
18. 【☆光子是波却不扩散性？】 6.1.3 光子纵波的非扩散性
19. 【☆光子的电力线是什么样的？】 6.1.4 光子的纤维结构
20. 【☆普朗克常数的物理意义是什么？】 6.1.4 光子的纤维结构
21. 【☆普朗克常数的物理意义是什么？】 6.1.4 光子的纤维结构
22. 【☆问题：光子的能量动量与普朗克常数的关系是什么？】 6.1.4 光子的纤维结构
23. 【☆问题：为什么光子会是横波呢？】 6.1.6 光子横向波动及几率波
24. 【☆问题：为什么光子的自旋是 $1\hbar$ ？】 6.1.7 光子的极化和自旋
25. 【☆光子为什么会具有波粒二象性？】 6.1.8 光子波粒二象性的物理图像
26. 【☆问题：电子对是如何产生出来的？】 7.1 轻子的纤维结构
27. 【☆问题：电力线真实存在吗？为什么电子会有电力线？】 7.1.1 单电子内禀场的应变
28. 【☆问题：电子是如何运动的？】 7.1.6 轻子和光子的耦合构成德布罗意波
29. 【☆问题：电荷为什么具有全同性？】 7.1.7 电子的电力线
30. 【☆问题：电子的磁力线是如何产生出来的？】 7.1.8 电子的磁力线



31. 【☆问题：电子为什么会有自旋？电子真的在自旋吗？】 7.2.1 轻子自旋波的产生
32. 【☆问题：为什么电子的自旋值是  $\hbar/2$ ？】 7.2.4 自旋角动量
33. 【☆问题：为什么电子能以任意的速度传播呢？】 7.3.1 轻子的传播特性
34. 【☆问题：电子静止质量的本质是什么？】 7.3.2 轻子的惯性质量
35. 【☆问题：电磁耦合常数能计算吗？如何算出来？】 7.6.2 考虑电子的情况
36. 【☆问题：中微子具有什么样的结构？与电子有何不同？】 7.7.1 中微子内禀空间的构成
37. 【☆问题：中微子为什么没有静质量，并以光速运动？】 7.7.3 自旋量子波角
38. 【☆问题：电子为什么会具有波粒二象性？】 7.7.8 轻子的点模型构成量子力
39. 【☆问题：如何直观理解规范场？】 8.1 整体规范不变性
40. 【☆问题：什么是弱作用？】 第 9 章 弱作用场（开头）
41. 【☆问题：什么是 Higgs 场？】 9.2.2 真空场中的弱电统一模型
42. 【☆问题：什么是温伯格角？】 9.2.3 温伯格角  $\theta_w$  的物理意义
43. 【☆问题：温伯格角是如何算出来？】 9.2.3 温伯格角  $\theta_w$  的物理意义
44. 【☆问题： $\pi^0$  介子的结构如何？】 10.1  $\pi^0$  介子态的真空场图像
45. 【☆问题： $e^\pm$  中心点的结构如何？】 10.2  $\pi^\pm$  介子的真空场图像
46. 【☆问题：质子的结构如何？】 11.3.1 质子的形成
47. 【☆问题：夸克的颜色是什么？】 11.3.1 质子的形成
48. 【☆问题：什么是质子的自旋？】 10.3.2 质子自旋
49. 【☆问题：为什么宇宙中并无反物质存在？】 10.3.3 质子的弦与稳定性
50. 【☆问题：如何估算出强作用耦合常数？】 10.4.1 中性  $\pi^0$  介子与核子的强相互作用
51. 【☆问题：为什么越靠近电荷电磁耦合常数会越大？】 11.1.3 跑动耦合常数
52. 【☆问题：为什么强相互作用距离越近强耦合常数会越小？】 11.1.3 跑动耦合常数
53. 【☆问题：真空场理论与弦理论有些什么不同？】 11.2 真空场论与超弦/M 理论